

國立清華大學

碩士論文

題目：使用決策理論於區間反應變數模型之參
數估計

The Use of Decision Theorem on the
Parameter Estimation of Interval Response
Model

所 別： 統計學研究所 組別：工業統計組

指導教授： 鄭少為(Shao-Wei Cheng) 博士

姓 名： 陳皇維(Huang-Wei Chen)

學 號： 9724506

中華民國九十九年七月

摘要

在一般常見的線性模型中，反應變數常常是單一反應變數，但在一些問題中，可能會遇見反應變數是一個區間的數據，對此我們稱之為區間反應變數。與單一反應變數相比，區間反應變數有區間下界及上界兩個值，故針對區間反應變數的建模方式較為複雜。另一方面，衡量兩個區間是否相似的距離函數，也比單一反應變數的情況，要考慮更多的因素，這使得區間距離函數的定義方式，有許多種可能的選擇。本文將奠基於決策理論，提出一套對任意區間距離函數與任意區間模型，皆可使用的分析方法。對於某些距離函數和區間模型，我們可以獲得解析解，而對我們無法求得解析解的狀況，我們則利用數值方法來提供其數值解。我們將此分析方法套用於文獻上提及的各種區間距離函數與各種區間模型配適，發現搭配不同的區間距離函數時，所得到的配適區間會出現較保守或者較開放的性質，這些不同的性質可讓我們針對真實數據的不同特色，獲得較好的配適模型。

關鍵字：決策理論，區間反應變數，模型配適，保守型配適，開放型配適。

目錄

1	緒論與文獻回顧	1
1.1	緒論	1
1.2	文獻回顧	1
2	統計決策理論用於區間反應變數配適之理論推導	4
2.1	第一種區間模型與第一種區間距離函數之模型配適	4
2.2	第二種區間模型與第一種區間距離函數之模型配適	9
3	統計決策理論用於區間反應變數配適之數值方法	15
3.1	風險函數計算與最小化的數值方法	15
3.1.1	第一種區間模型配適之風險函數計算方法	17
3.1.2	第二種區間模型配適之風險函數計算方法	18
3.2	第二種區間模型與第一種區間距離函數之配適演算	20
3.3	第二種區間距離函數之數值演算	22
3.3.1	第二種區間距離函數與第一種區間模型之配適流程	25
3.3.2	第二種區間距離函數與第二種區間模型之配適流程	27
3.3.3	第二種權重區間距離函數	29
3.4	參數估計量的標準差和標準誤之數值計算	29
4	數值模擬	32
4.1	第二種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間性質比較	32
4.2	第二種區間距離函數與第二種區間模型之配適區間性質比較	38
4.3	第一型態配適值與第二型態配適值性質比較	41

4.4 參數估計量之標準差與標準誤計算	44
5 實例分析	46
6 結論	56
參考文獻	56



圖目錄

3.1	兩區間移動情況	22
3.2	兩區間交集重疊情況	25
4.1	模擬數據三	39
4.2	數據三, 第一種型態配適, 保守型配適區間	42
4.3	數據三, 第二種配適型態, 保守型配適區間	42
4.4	數據三, 第一種配適型態, 開放型配適區間	43
4.5	數據三, 第二種配適型態, 開放型配適區間	43
5.1	保守型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第二種區間模型之配適區間	51
5.2	開放型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第二種區間模型之配適區間	52
5.3	保守型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	55
5.4	開放型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	55

表目錄

4.1	模擬數據一	32
4.2	模擬數據二	33
4.3	數據一, 三種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	33
4.4	數據二, 三種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	34
4.5	數據一, 保守型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	35
4.6	數據一, 開放型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	36
4.7	數據二, 保守型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	37
4.8	數據二, 開放型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	37
4.9	模擬數據三	38
4.10	數據三, 保守型權重區間距離函數與第二種區間模型之配適區間	40
4.11	數據三, 開放型權重區間距離函數與第二種區間模型之配適區間	40
4.12	數據一, 參數估計量之標準差與標準誤	44
4.13	模型四, 參數估計量之標準差	45
5.1	焊接實驗數據	47
5.2	第二種區間模型之選取變數	47
5.3	第二種區間距離函數與第二種區間模型之參數估計量	48
5.4	第二種區間距離函數與第二種區間模型之配適區間	49
5.5	第二種區間距離函數與第二種區間模型之參數估計量標準誤	50
5.6	第二種權重區間距離函數與第二種區間模型之參數估計量	51
5.7	第一種區間模型之選取變數	52
5.8	第二種區間距離函數與第一種區間模型之參數估計量	52

5.9	第二種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間	53
5.10	第二種區間距離函數與第一種區間模型之參數估計量標準誤 . . .	54
5.11	第二種權重區間距離函數與第一種區間模型之參數估計量	54



第 1 章

緒論與文獻回顧

1.1 緒論

在迴歸模型中，若反應變數的形式由常見的單一值變數變成一個區間 (interval)，則我們稱其為區間反應變數 (interval response)。一些有關區間反應變數的研究，可參見Li et al. (2001)與Chang (2008)，前者提出了以區間中心和 \ln (半區間長度) 分別建立迴歸模型的分析方法，後者則提出了多種區間反應變數模型，以及兩個區間的距離定義，並且使用貝氏方法來篩選重要的效應。本文將由傳統的頻率論(frequentist) 角度，探討使用決策理論於區間反應變數模型上的分析。本文後續將提出一套奠基於決策理論的模型配適法，其可套用於Chang (2008)所提出的任意區間距離函數及任意區間模型上。

本章中其餘的部份將做文獻回顧。第二章將討論在較簡易的區間距離函數下，所推導出之參數估計量表達式(close form)。而對任意區間距離函數及任意區間模型，參數估計量的表達式有可能極為複雜不易導出或根本不存在，故我們在第三章中提出一套數值方法以求得參數估計值及其標準差。第四章將利用數值模擬，來瞭解我們所提出的方法之性質。第五章為實例分析，第六章為結論。

1.2 文獻回顧

在Rao and Toutenburg (1995)中，曾經討論應用決策理論於單一反應變數之線性模型的估計方法。

令 Y 為反應變數, X 為模型矩陣, ε 為誤差, 模型為:

$$Y = X\beta + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (1.1)$$

若 C 為未知矩陣, d 為未知向量, 且限定 $\hat{\beta}$ 為 Y 的線性函數:

$$\hat{\beta} = CY + d$$

定義損失函數(loss function) 為二次殘差和 (residual sum of square):

$$(Y - X\hat{\beta})' (Y - X\hat{\beta})$$

令風險函數為上式的期望值:

$$\begin{aligned} R(\beta, \hat{\beta}) &= E(Y - X\hat{\beta})' (Y - X\hat{\beta}) \\ &= E(Y - X(CY + d))' (Y - X(CY + d)) \\ &= R(\beta, (C, d)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

其可視為 Y 的觀測值與配適值之間的距離平均, 且配適準則為:

$$(\hat{C}, \hat{d}) = \arg \min_{C, d} R(\beta, (C, d))$$

則Rao and Toutenburg (1995)得到 \hat{C} 與 \hat{d} 與 β 無關且 $\hat{C} = (X'X)^{-1} X'$, $\hat{d} = 0$, 故

$$\hat{\beta} = \hat{C}Y + \hat{d} = (X'X)^{-1} X'Y$$

此時可獲得 $\hat{\beta}$ 為一般迴歸分析中的最小平方估計量, 亦即

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

故最小平方估計式為決策理論的一個特例。決策理論中損失函數的概念, 若套用於本文所討論的區間反應變數上, 則可視為配適區間(fitted interval) 與觀測區間(observed interval) 的距離定義。

由單一反應變數模型推廣至區間反應變數模型。令 I 為觀測區間, \hat{I} 為配適區間, D 為區間距離函數, β 為某個區間反應變數模型 (以下章節會有更詳細關於這些模型的說明) 中的參數, $\hat{\beta}$ 為 β 的某個估計式, 則廣義損失函數可定義為:

$$Loss(\beta, \hat{\beta}) = D(I, \hat{I}) \quad (1.3)$$

廣義風險函數定義為損失函數的期望值:

$$R(\beta, \hat{\beta}) = E(D(I, \hat{I})) \quad (1.4)$$

若我們希望 I 與 \hat{I} 的距離越小越好時, 便可以最小化該風險函數當區間配適準則來獲得參數估計式, 亦即:

$$\hat{\beta}^* = \arg \min_{\hat{\beta}} R(\hat{\beta}, \beta)$$

後續章節我們將參考上述 Rao and Toutenburg (1995) 方法並應用於區間反應變數模型中。Chang (2008) 建議了許多區間反應變數模型。該文中定義的第一種區間模型對區間下界與區間上界分別建構一個線性模型。該文中定義的第二種區間模型則對區間中心與 \ln (半區間長度) 分別建立一個線性模型。後續我們在下述章節中, 會詳細介紹此兩種區間反應變數的建模法。Chang (2008) 也同時定義了多種區間距離函數。該文定義的第一種區間距離為兩區間之上界距離與下界距離和。該文定義的第二種區間距離, 則為第一種區間距離加入配適錯誤比例之懲罰項。相同的, 我們也會在下述章節中詳細介紹這兩種距離定義。

第 2 章

統計決策理論用於區間反應變數配適之理論推導

在某些區間模型和區間距離下，我們可以推導出參數估計量之表達式，在此章中介紹與推導。2.1 節將介紹把 Chang (2008) 中第一種區間模型搭配第一種區間距離時，所導出之參數估計式。2.2 節中會討論 Chang (2008) 中第二種區間模型搭配第一種區間距離函數時的情形，此時因風險函數稍微複雜，導致無法導出參數估計之表達式，但仍可推導出預測區間的表達式。

2.1 第一種區間模型與第一種區間距離函數之模型配適

在 Chang (2008) 中提及之第一種區間模型為：

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & u_1 \\ l_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots \\ l_n & u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{l,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{l,i} \varphi_{l,i}(x_1) & \beta_{u,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{u,i} \varphi_{u,i}(x_1) \\ \beta_{l,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{l,i} \varphi_{l,i}(x_2) & \beta_{u,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{u,i} \varphi_{u,i}(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{l,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{l,i} \varphi_{l,i}(x_n) & \beta_{u,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{u,i} \varphi_{u,i}(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{l,1} & \varepsilon_{u,1} \\ \varepsilon_{l,2} & \varepsilon_{u,2} \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_{l,n} & \varepsilon_{u,n} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

其中假設:

- 1 $\varepsilon_{l,1}, \varepsilon_{l,2}, \dots, \varepsilon_{l,n}$ 服從期望值0且變異數 σ_2^2 的常態分配
- 2 $\varepsilon_{u,1}, \varepsilon_{u,2}, \dots, \varepsilon_{u,n}$ 服從期望值0且變異數 σ_1^2 的常態分配
- 3 $\varepsilon_{l,1}, \varepsilon_{l,2}, \dots, \varepsilon_{l,n}, \varepsilon_{u,1}, \varepsilon_{u,2}, \dots, \varepsilon_{u,n}$ 相互獨立

令

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{u,1}(x_1) & \varphi_{u,2}(x_1) & \dots & \varphi_{u,p}(x_1) \\ 1 & \varphi_{u,1}(x_2) & \varphi_{u,2}(x_2) & \dots & \varphi_{u,p}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \varphi_{u,1}(x_n) & \varphi_{u,2}(x_n) & \dots & \varphi_{u,p}(x_n) \end{bmatrix}, \beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{u,0} \\ \beta_{u,1} \\ \vdots \\ \beta_{u,p} \end{bmatrix}, \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{u,1} \\ \varepsilon_{u,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{u,n} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{l,1}(x_1) & \varphi_{l,2}(x_1) & \dots & \varphi_{l,p}(x_1) \\ 1 & \varphi_{l,1}(x_2) & \varphi_{l,2}(x_2) & \dots & \varphi_{l,p}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \varphi_{l,1}(x_n) & \varphi_{l,2}(x_n) & \dots & \varphi_{l,p}(x_n) \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} \beta_{l,0} \\ \beta_{l,1} \\ \vdots \\ \beta_{l,p} \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{l,1} \\ \varepsilon_{l,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{l,n} \end{bmatrix}$$

則 (2.1) 式中的模型根據上述矩陣與向量可簡化成:

$$\begin{cases} U = X_1\beta_1 + \varepsilon_1 \\ L = X_2\beta_2 + \varepsilon_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

而假設條件則可改寫成: $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma_1^2 I), \varepsilon_2 \sim N(0, \sigma_2^2 I), \varepsilon_1$ 與 ε_2 相互獨立。

第一種區間距離函數為:

$$D_1(I_1, I_2) = D_1((l_1, u_1), (l_2, u_2)) = (u_1 - u_2)^2 + (l_1 - l_2)^2$$

此種區間距離函數以「區間上界的距離平方」及「區間下界的距離平方」來衡量兩區間相似程度。

當配適區間與觀測區間不同時，會產生配適誤差，故損失函數可定義成「配適區間」和「觀測區間」的距離函數：

$$Loss\left((\beta_1, \beta_2), (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)\right) = \left(U - X_1 \hat{\beta}_1\right)' \left(U - X_1 \hat{\beta}_1\right) + \left(L - X_2 \hat{\beta}_2\right)' \left(L - X_2 \hat{\beta}_2\right)$$

風險函數則定義為損失函數的期望值：

$$\begin{aligned} R\left((\beta_1, \beta_2), (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)\right) \\ &= E\left[\left(U - X_1 \hat{\beta}_1\right)' \left(U - X_1 \hat{\beta}_1\right) + \left(L - X_2 \hat{\beta}_2\right)' \left(L - X_2 \hat{\beta}_2\right)\right] \quad (2.3) \\ &= E\left(U - X_1 \hat{\beta}_1\right)' \left(U - X_1 \hat{\beta}_1\right) + E\left(L - X_2 \hat{\beta}_2\right)' \left(L - X_2 \hat{\beta}_2\right) \end{aligned}$$

根據Rao and Toutenburg (1995)提供我們參數估計量為反應變數線性函數的想法，我們可令 $\hat{\beta}_1$ 與 $\hat{\beta}_2$ 為：

$$\hat{\beta}_1 = C_1 U + d_1, \hat{\beta}_2 = C_2 L + d_2 \quad (2.4)$$

若將(2.4) 式代入 (2.3) 式，則風險函數可改寫成：

$$\begin{aligned} R\left((\beta_1, \beta_2), (C_1, d_1, C_2, d_2)\right) \\ &= E\left(U - X_1 (C_1 U + d_1)\right)' \left(U - X_1 (C_1 U + d_1)\right) \\ &\quad + E\left(L - X_2 (C_2 L + d_2)\right)' \left(L - X_2 (C_2 L + d_2)\right) \quad (2.5) \\ &= E\left((I - X_1 C_1) U + X_1 d_1\right)' \left((I - X_1 C_1) U + X_1 d_1\right) \\ &\quad + E\left((I - X_2 C_2) L + X_2 d_2\right)' \left((I - X_2 C_2) L + X_2 d_2\right) \end{aligned}$$

若 Y 為隨機向量，則 $E(Y'Y) = tr(cov(Y)) + [E(Y)]' [E(Y)]$ ，故風險函數 (2.5) 式可改寫為：

$$\begin{aligned} &[E((I - X_1 C_1)U - X_1 d_1)]' [E((I - X_1 C_1)U - X_1 d_1)] \\ &+ tr[cov((I - X_1 C_1)U)] \quad (2.6) \\ &+ [E((I - X_2 C_2)L - X_2 d_2)]' [E((I - X_2 C_2)L - X_2 d_2)] \\ &+ tr[cov((I - X_2 C_2)L)] \end{aligned}$$

由 (2.2) 式得到 $E(U) = X_1\beta_1, Var(U) = \sigma_1^2 I, E(L) = X_2\beta_2, Var(L) = \sigma_2^2 I$,
故 (2.6) 式可改寫為:

$$\begin{aligned}
& [(I - X_1C_1)X_1\beta_1 - X_1d_1]' [(I - X_1C_1)X_1\beta_1 - X_1d_1] \\
& + tr [\sigma_1^2(I - X_1C_1)(I - X_1C_1)'] \\
& + [(I - X_2C_2)X_2\beta_2 - X_2d_2]' [(I - X_2C_2)X_2\beta_2 - X_2d_2] \\
& + tr [\sigma_2^2(I - X_2C_2)(I - X_2C_2)'] \\
& = [(I - C_1X_1)\beta_1 - d_1]' X_1'X_1 [(I - C_1X_1)\beta_1 - d_1] \\
& + tr [\sigma_1^2(I - X_1C_1)(I - C_1'X_1')] \\
& + [(I - C_2X_2)\beta_2 - d_2]' X_2'X_2 [(I - C_2X_2)\beta_2 - d_2] \\
& + tr [\sigma_2^2(I - X_2C_2)(I - C_2'X_2')] \\
& = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2
\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $(a_1^2, b_1^2, a_2^2, b_2^2)$ 為:

$$\begin{aligned}
a_1^2 & = [(I - C_1X_1)\beta_1 - d_1]' X_1'X_1 [(I - C_1X_1)\beta_1 - d_1] \\
b_1^2 & = tr [\sigma_1^2(I - X_1C_1)(I - C_1'X_1')] \\
a_2^2 & = [(I - C_2X_2)\beta_2 - d_2]' X_2'X_2 [(I - C_2X_2)\beta_2 - d_2] \\
b_2^2 & = tr [\sigma_2^2(I - X_2C_2)(I - C_2'X_2')]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

後續找尋 (C_1, d_1, C_2, d_2) 使 (2.7) 式風險函數最小。我們可先找尋 C_1 與 C_2 各別使得 b_1^2 與 b_2^2 最小。

$$\begin{aligned}
b_1^2 & = tr [\sigma_1^2(I - X_1C_1)(I - C_1'X_1')] \\
& = \sigma_1^2 tr [I - 2X_1C_1' + C_1'X_1'X_1C_1]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

由 (2.9) 式對 C_1 一階微分且令為 0 得到下式:

$$\frac{\partial}{\partial C_1} (\sigma_1^2 tr [I - 2X_1C_1' + C_1'X_1'X_1C_1]) |_{C_1=\hat{C}_1} = 0 \tag{2.10}$$

令 A 與 C 為一般矩陣, 可根據定理得到:

$$\frac{\partial}{\partial C} tr(AC) = A', \frac{\partial}{\partial C} tr(C'AC) = AC + A'C$$

故 (2.10) 式可化簡為:

$$-2X_1' + X_1'X_1\hat{C}_1 + (X_1'X_1)'\hat{C}_1 = 0$$

上式經由移項求解得到:

$$\hat{C}_1 = (X_1'X_1)^{-1} X_1'$$

進一步對 (2.9) 式對 C_1 二階微分後代入 \hat{C}_1 , 得到二次微分矩陣 $2X_1'X_1$ 為正定矩陣 (positive defining matrix), 故 \hat{C}_1 使 b_1^2 最小。

應用相同的方法於 b_2^2 則可使得 b_2^2 達到最小值的估計式為:

$$\hat{C}_2 = (X_2'X_2)^{-1} X_2'$$

我們觀察 (2.8) 式, 因為 $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0$, 故若

$$\begin{cases} (I - C_1X_1)\beta_1 - d_1 = 0 \\ (I - C_2X_2)\beta_2 - d_2 = 0 \end{cases}$$

則 a_1^2 與 a_2^2 有最小值。而把 \hat{C}_1 與 \hat{C}_2 代入上式得到:

$$\hat{d}_1 = (I - \hat{C}_1X_1)\beta_1 = (I - (X_1'X_1)^{-1} X_1'X_1)\beta_1 = 0$$

$$\hat{d}_2 = (I - \hat{C}_2X_2)\beta_2 = (I - (X_2'X_2)^{-1} X_2'X_2)\beta_2 = 0$$

故參數估計式為:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \hat{C}_1U + \hat{d}_1 = (X_1'X_1)^{-1} X_1'U \\ \hat{\beta}_2 = \hat{C}_2L + \hat{d}_2 = (X_2'X_2)^{-1} X_2'L \end{cases} \quad (2.11)$$

事實上, (2.11) 式即為各別對區間上界模型與區間下界模型, 使用最小平方方法所得到的最小平方估計式。

因為區間上界不會比區間下界小, 因此第一種區間模型需要給予限制式 $U_j > L_j, j = 1, 2, \dots, n$ 。且配適區間也需擁有此性質, 故一個合理的參數估計量應要能保證 $\hat{U}_j > \hat{L}_j, j = 1, 2, \dots, n$ 的限制。但很明顯的 (2.11) 式並無法保證一定能滿足這個性質, 而若把此限制式加入損失函數則會使風險函數複雜, 因此在第三章我們將會利用數值手法來解決這個問題。

2.2 第二種區間模型與第一種區間距離函數之模型配適

在Chang (2008)中所提及第二種區間模型:

$$\begin{pmatrix} cen_1 & \ln(len_1) \\ cen_2 & \ln(len_2) \\ \vdots & \vdots \\ cen_n & \ln(len_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{cen,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{cen,i} \varphi_{cen,i}(x_1) + \varepsilon_{cen,1} & \beta_{len,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{len,i} \varphi_{len,i}(x_1) + \varepsilon_{len,1} \\ \beta_{cen,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{cen,i} \varphi_{cen,i}(x_2) + \varepsilon_{cen,2} & \beta_{len,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{len,i} \varphi_{len,i}(x_2) + \varepsilon_{len,2} \\ \vdots & \vdots \\ \beta_{cen,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{cen,i} \varphi_{cen,i}(x_n) + \varepsilon_{cen,n} & \beta_{len,0} + \sum_{i=1}^p \beta_{len,i} \varphi_{len,i}(x_n) + \varepsilon_{len,n} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

其中假設:

- 1 $\varepsilon_{cen,1}, \varepsilon_{cen,2}, \dots, \varepsilon_{cen,n}$ 服從期望值0且變異數 σ_1^2 的常態分配
- 2 $\varepsilon_{len,1}, \varepsilon_{len,2}, \dots, \varepsilon_{len,n}$ 服從期望值0且變異數 σ_2^2 的常態分配
- 3 $\varepsilon_{cen,1}, \varepsilon_{cen,2}, \dots, \varepsilon_{cen,n}, \varepsilon_{len,1}, \varepsilon_{len,2}, \dots, \varepsilon_{len,n}$ 相互獨立。

令

$$Cen = \begin{bmatrix} cen_1 \\ cen_2 \\ \vdots \\ cen_n \end{bmatrix}, X_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{cen,1}(x_1) & \varphi_{cen,2}(x_1) & \dots & \varphi_{cen,p}(x_1) \\ 1 & \varphi_{cen,1}(x_2) & \varphi_{cen,2}(x_2) & \dots & \varphi_{cen,p}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \varphi_{cen,1}(x_n) & \varphi_{cen,2}(x_n) & \dots & \varphi_{cen,p}(x_n) \end{bmatrix},$$

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} \beta_{cen,0} \\ \beta_{cen,1} \\ \vdots \\ \beta_{cen,p} \end{bmatrix}, \varepsilon_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{cen,1} \\ \varepsilon_{cen,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{cen,n} \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} \beta_{len,0} \\ \beta_{len,1} \\ \vdots \\ \beta_{len,p} \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{len,1} \\ \varepsilon_{len,2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{len,n} \end{bmatrix},$$

$$\ln(Len) = \begin{bmatrix} \ln(len_1) \\ \ln(len_2) \\ \vdots \\ \ln(len_n) \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 1 & \varphi_{len,1}(x_1) & \varphi_{len,2}(x_1) & \dots & \varphi_{len,p}(x_1) \\ 1 & \varphi_{len,1}(x_2) & \varphi_{len,2}(x_2) & \dots & \varphi_{len,p}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \varphi_{len,1}(x_n) & \varphi_{len,2}(x_n) & \dots & \varphi_{len,p}(x_n) \end{bmatrix},$$

則 (2.12) 式中的模型根據上述矩陣和向量可簡化成:

$$\begin{cases} Cen = X_1\beta_1 + \varepsilon_1 \\ Z = \ln(Len) = X_2\beta_2 + \varepsilon_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

而假設條件則改寫成:

1. $\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma_1^2 I), \varepsilon_2 \sim N(0, \sigma_2^2 I)$
2. ε_1 和 ε_2 互相獨立

若在Chang (2008)的第一種距離函數下:

$$\begin{aligned} D_1(I_1, I_2) &= D_1((l_1, u_1), (l_2, u_2)) = (u_1 - u_2)^2 + (l_1 - l_2)^2 \\ &= [(cen_1 + len_1) - (cen_2 + len_2)]^2 + [(cen_1 - len_1) - (cen_2 - len_2)]^2 \\ &= [(cen_1 - cen_2) + (len_1 - len_2)]^2 + [(cen_1 - cen_2) - (len_1 - len_2)]^2 \\ &= 2(cen_1 - cen_2)^2 + 2(len_1 - len_2)^2 \\ &= 2(cen_1 - cen_2)^2 + 2(e^{\ln(len_1)} - e^{\ln(len_2)})^2 \end{aligned}$$

風險函數改寫為:

$$\begin{aligned} R((\beta_1, \beta_2), (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)) \\ &= E \left[2 \left(Cen - X_1\hat{\beta}_1 \right)' \left(Cen - X_1\hat{\beta}_1 \right) + \left(e^{\ln(Len)} - e^{X_2\hat{\beta}_2} \right)' \left(e^{\ln(Len)} - e^{X_2\hat{\beta}_2} \right) \right] \\ &= 2E \left(Cen - X_1\hat{\beta}_1 \right)' \left(Cen - X_1\hat{\beta}_1 \right) + 2E \left(e^{\ln(Len)} - e^{X_2\hat{\beta}_2} \right)' \left(e^{\ln(Len)} - e^{X_2\hat{\beta}_2} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

在此定義：

$$e^{\ln(Len)} = \begin{bmatrix} e^{\ln(len_1)} \\ e^{\ln(len_2)} \\ \vdots \\ e^{\ln(len_n)} \end{bmatrix}, e^{X_2 \hat{\beta}_2} = \begin{bmatrix} e^{x_{2,row,1}^T \hat{\beta}_2} \\ e^{x_{2,row,2}^T \hat{\beta}_2} \\ \vdots \\ e^{x_{2,row,n}^T \hat{\beta}_2} \end{bmatrix}, X_i = \begin{bmatrix} x_{i,row,1}^T \\ x_{i,row,2}^T \\ \vdots \\ x_{i,row,n}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i,col,1}^T \\ x_{i,col,2}^T \\ \vdots \\ x_{i,col,p+1}^T \end{bmatrix}'$$

其中 $i = 1, 2$

若參數估計量亦限制為反應變數之線性函數型態：

$$\hat{\beta}_1 = C_1 Cen + d_1, \hat{\beta}_2 = C_2 Z + d_2$$

則因風險函數(2.14) 式較為複雜，難以求得使風險函數最小的參數估計量表達式。我們後續在3.2節中將用數值方法求得參數估計量。

雖然在這個狀況下，參數估計量表達式難以推導，但加上某些條件時，我們依然可推導出預測區間表達式。假設設定值在於 x_0 ，令預測區間的型式為：

$$\hat{I}_{x_0} = (g_1(Cen, x_0) - g_2(Len, x_0), g_1(Cen, x_0) + g_2(Len, x_0))$$

若要預測區間與觀測區間相近，則可定義損失函數為：

$$\begin{aligned} D_1 \left(\left(x_0^T \beta_1 - e^{x_0^T \beta_2}, x_0^T \beta_1 + e^{x_0^T \beta_2} \right), \hat{I}_{x_0} \right) \\ = 2 \left(g_1(Cen, x_0) - x_0^T \beta_1 \right)^2 + 2 \left(g_2(Len, x_0) - e^{x_0^T \beta_1} \right)^2 \end{aligned}$$

此時風險函數為：

$$R(I_{x_0}, \hat{I}_{x_0}) = 2E \left(g_1(Cen, x_0) - x_0^T \beta_1 \right)^2 + 2E \left(g_2(Len, x_0) - e^{x_0^T \beta_2} \right)^2 \quad (2.15)$$

故我們可找尋使得風險函數 (2.15) 式最小的函數 g_1 與 g_2 ，亦即：

$$(g_1^*, g_2^*) = \arg \min_{g_1, g_2} R(I_{x_0}, \hat{I}_{x_0})$$

要找尋使得 $E(g_1(Cen, x_0) - x_0^T \beta_1)^2$ 最小的 g_1 , 可考量由 Cen 的機率密度函數著手。由模型 (2.13) 式得知 Cen 機率密度函數為:

$$\begin{aligned} f(Cen) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n (cen_i - x_{1,row,i}^T \beta_1)^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n cen_i^2 + \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n cen_i x_{1,row,i}^T \beta_1 - \frac{1}{2\sigma_1^2} \sum_{i=1}^n (x_{1,row,i}^T \beta_1)^2\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

由矩陣與向量運算得知:

$$\sum_{i=1}^n cen_i x_{1,row,i}^T \beta_1 = \sum_{i=1}^n cen_i \sum_{j=1}^{p+1} x_{1,ij} \beta_{1,j-1} = \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{i=1}^n x_{1,ij} cen_i \beta_{1,j-1} = \sum_{j=1}^{p+1} x_{1,col,j}^T Cen \beta_{1,j-1}$$

故 (2.16) 式改寫成:

$$f(Cen) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2} Cen^T Cen + \frac{1}{\sigma_1^2} \sum_{j=1}^{p+1} x_{1,col,j}^T Cen \beta_{1,j-1} - \frac{1}{2\sigma_1^2} \beta_1' X_1' X_1 \beta_1\right)$$

其屬於多重常態分配為指數群且 $(x_{1,col,1}^T Cen, x_{1,col,2}^T Cen, \dots, x_{1,col,p+1}^T Cen, Cen^T Cen)$ 包含 $p+2$ 維空間長方體, 因此 $(X_1^T Cen, Cen^T Cen)$ 是 (β_1, σ_1^2) 的完備充分統計量, 且

$$\begin{aligned} E\left(x_0^T (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen\right) &= x_0^T (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T E(Cen) \\ &= x_0^T (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T X_1 \beta_1 = x_0^T \beta_1 \end{aligned}$$

根據黎曼雪費定理 (Lehmann-Scheffe theorem), $x_0^T (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen$ 為 $x_0^T \beta_1$ 的均勻最小變異數不偏估計量 (uniform minimum variance unbiased estimator)。

換言之, 此估計量有最小變異數:

$$Var\left(x_0^T (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen\right) = E\left(x_0^T (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen - x_0^T \beta_1\right)^2$$

故使 $2E(g_1(Cen, x_0) - x_0^T \beta_1)^2$ 最小的 g_1 為:

$$g_1^* = x_0^T (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen \quad (2.17)$$

若要找尋使 $E \left(g_2 (Len, x_0) - e^{x_0^T \beta_2} \right)^2$ 最小的函數 g_2 , 則可由 Z 的機率密度函數著手。相似於 (2.16) 式, 我們可得到 $(X_2^T Z, Z^T Z)$ 是 (β_2, σ_2^2) 的完備充分統計量。故若存在 $(X_2^T Z, Z^T Z)$ 的函數使得其為 $e^{x_0^T \beta_2}$ 之不偏估計量, 便可找到 $e^{x_0^T \beta_2}$ 的均勻最小變異數不偏估計量。

令 $b = (X_2^T X_2)^{-1} X_2^T Z, \sigma_*^2 = \sigma_2^2 x_0^T (X_2^T X_2)^{-1} x_0$, 由模型 (2.13) 式推得:

$$x_0^T b \sim N(x_0^T \beta_2, \sigma_*^2)$$

由常態分配的動差母函數得知:

$$E(e^{x_0^T b}) = e^{x_0^T \beta_1 + \frac{\sigma_*^2}{2}}$$

故 $e^{x_0^T b}$ 不為 $e^{x_0^T \beta_1}$ 的不偏估計量, 以下我們嘗試找尋 $e^{-\frac{\sigma_*^2}{2}}$ 的不偏估計量來調整 $e^{x_0^T b}$ 。

我們先考量 σ_*^2 的估計量為:

$$\hat{\sigma}_*^2 = \hat{\sigma}_2^2 x_0^T (X_2^T X_2)^{-1} x_0 = \frac{(Z - X_2 b)^T (Z - X_2 b)}{n - (p + 1)} x_0^T (X_2^T X_2)^{-1} x_0$$

其恰為完備充份統計量 $(X_2^T Z, Z^T Z)$ 的函數, 若我們可以找到函數 Q 使得 $E(Q(\hat{\sigma}_*^2)) = e^{-\frac{\sigma_*^2}{2}}$, 又因為 $\hat{\sigma}_1^2$ 與 b 獨立推得 $\hat{\sigma}_*^2$ 與 b 獨立, 則 $E(e^{x_0^T b} Q(\hat{\sigma}_*^2)) = E(e^{x_0^T b}) E(Q(\hat{\sigma}_*^2)) = e^{x_0^T \beta_2}$, 進而得到 $e^{x_0^T b} Q(\hat{\sigma}_*^2)$ 為 $e^{x_0^T \beta_2}$ 的不偏估計量。

找尋函數 $Q(\hat{\sigma}_*^2)$ 可由 $\hat{\sigma}_*^2$ 的機率分配著手:

$$\hat{\sigma}_*^2 \sim \frac{\sigma_*^2 \chi_{n-(p+1)}^2}{n - (p + 1)} = \text{gamma} \left(m, \frac{m}{\sigma_*^2} \right), m = \frac{n - (p + 1)}{2}$$

故 $\hat{\sigma}_*^2$ 的動差母函數為:

$$M_{\hat{\sigma}_*^2}(t) = \left(\frac{m}{m - \sigma_*^2 t} \right)^m$$

利用上述動差母函數計算各階動差, 發現有以下規律存在:

$$\frac{\partial M_{\hat{\sigma}_*^2}(t)}{\partial t} = m^m (m - \sigma_*^2 t)^{-m-1} m \sigma_*^2, \text{ 則 } E(\hat{\sigma}_*^2) = \sigma_*^2$$

$$\frac{\partial^2 M_{\hat{\sigma}_*^2}(t)}{\partial t^2} = m^m (m - \sigma_*^2 t)^{-m-2} m(m+1)(\sigma_*^2)^2, \text{ 則 } E(\hat{\sigma}_*^2)^2 = (\sigma_*^2)^2 (1 + \frac{1}{m})$$

$$\frac{\partial^3 M_{\hat{\sigma}_*^2}(t)}{\partial t^3} = m^m (m - \sigma_*^2 t)^{-m-3} m(m+1)(m+2)(\sigma_*^2)^3, \text{ 則 } E(\hat{\sigma}_*^2)^3 = (\sigma_*^2)^3 (1 + \frac{1}{m})(1 + \frac{2}{m})$$

藉由數學歸納法可證明:

$$E(\hat{\sigma}_*^2)^j = (\sigma_*^2)^j \prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{i}{m}\right), j = 1, 2, \dots, \infty$$

上式經由移項得到:

$$E\left((\hat{\sigma}_*^2)^j \left(\prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{i}{m}\right)\right)^{-1}\right) = (\sigma_*^2)^j, j = 1, 2, \dots, \infty \quad (2.18)$$

由 (2.18) 式與泰勒展開性質推得:

$$\begin{aligned} & E\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(-\hat{\sigma}_*^2/2\right)^j \left(\prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{i}{m}\right)\right)^{-1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(-\frac{1}{2}\right)^j E\left((\hat{\sigma}_*^2)^j \left(\prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{i}{m}\right)\right)^{-1}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \frac{(\sigma_*^2)^j}{j!} = e^{-\frac{\sigma_*^2}{2}} \end{aligned}$$

故 $e^{-\frac{\sigma_*^2}{2}}$ 的均勻最小變異數不偏估計量為:

$$Q(\hat{\sigma}_*^2) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(-\hat{\sigma}_*^2/2\right)^j \left(\prod_{i=0}^{j-1} \left(1 + \frac{i}{m}\right)\right)^{-1}$$

故我們得到 $e^{x_0^T \beta_2}$ 的不偏估計量為 $e^{x_0^T b} Q(\hat{\sigma}_*^2)$ 。根據黎曼雪費定理得知 $e^{x_0^T b} Q(\hat{\sigma}_*^2)$ 為 $e^{x_0^T \beta_2}$ 的均勻最小變異數不偏估計量, 換言之, 此不偏估計量有最小變異數:

$$Var\left(e^{x_0^T b} Q(\hat{\sigma}_*^2)\right) = E\left(e^{x_0^T b} Q(\hat{\sigma}_*^2) - e^{x_0^T \beta_2}\right)^2$$

故使 $2E\left(g_2(Len, x_0) - e^{x_0^T \beta_2}\right)^2$ 最小所對應的 g_2 為:

$$g_2^* = e^{x_0^T b} Q(\hat{\sigma}_*^2) \quad (2.19)$$

利用 (2.17) 式與 (2.19) 式我們可使風險函數 (2.15) 式有最小值, 故 x_0 設定值下, 其預測區間為:

$$(g_1^* - g_2^*, g_1^* + g_2^*)$$

若未來需要作預測, 便可套用此表達式。

第 3 章

統計決策理論用於區間反應變數配適之數值方法

對一個區間模型，若配合不同的區間距離，便可得到不同性質的配適區間。但是當區間距離函數較複雜時，我們常無法推導出參數估計量的數學表達式，故在本章中我們將討論使用數值方法求解的處理手法，其可適用於任意的區間距離函數與區間模型。我們會將此數值方法應用於Chang (2008)所提出的，第二種區間距離及各種區間反應變數的模型配適上，最終再利用數值方法計算參數估計量標準差與標準誤(standard error)。

3.1 風險函數計算與最小化的數值方法

利用數值的方法計算風險函數，便是利用電腦生成仿隨機數 (pseudo random number) 來計算期望值的一套手法。以下我們先對單一反應變數模型建構一套數值方法計算風險函數 (1.4) 式後，再討論相似的方法如何推廣到區間反應變數模型。

若有單一反應變數模型為： $Y = X\beta + \varepsilon$ 。在因子設定 x_1, x_2, \dots, x_n 下做一次實驗得到的反應變數為 $y_{obs,1}, y_{obs,2}, \dots, y_{obs,n}$ ，我們稱之為在 x_1, x_2, \dots, x_n 下的觀測值，並以向量 y_{obs} 表示。給定 y_{obs} 後，未來同因子設定 x_1, x_2, \dots, x_n 下再做一次實驗得到的反應變數令其為 $y_{rep|obs}$ 。根據Gelfand and Ghosh (1998)之建模方式， $y_{rep|obs}$ 機

率分配為:

$$y_{rep|obs} \sim N(X(X'X)^{-1}X'y_{obs}, \sigma^2(I + X(X'X)^{-1}X')) \quad (3.1)$$

若改寫(1.4) 式, 令新的風險函數為:

$$R(\beta, \hat{\beta}) = E_{Y_{rep|obs}} (Y_{rep|obs} - \hat{Y})' (Y_{rep|obs} - \hat{Y}) \quad (3.2)$$

其中配適值 \hat{Y} 分成以下兩種型態:

- 第一種配適型態為: $\hat{Y} = X\hat{\beta} = X(CY_{rep|obs} + d)$ 其可解釋為: 給定 y_{obs} 底下, 未來重複設定實驗之配適值。這種配適型態帶入 (3.2) 式後, 會使得風險函數較重視對未來資料之預測。
- 第二種配適型態為: $\hat{Y} = X\hat{\beta} = X(CY_{obs} + d)$ 其解釋為: 觀測數據 y_{obs} 之配適值。這種配適型態帶入 (3.2) 式後, 會使得風險函數較重視目前的資料配適是否良好。

利用 (3.1) 式我們可生成仿隨機數。若無法由先前經驗獲得 σ^2 的資訊, 則 (3.1) 式機率分配會有未知參數 σ^2 , 使得我們無法利用電腦生成仿隨機數 $y_{rep|obs}^*$ 。此時可利用 y_{obs} 及 X 使用最小平方估計 σ^2 且代入 (3.2) 式來解決此問題。後續利用電腦生成 m 筆仿隨機數 $y_{rep|obs,1}^*, y_{rep|obs,2}^*, \dots, y_{rep|obs,m}^*$, 進而計算:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y_{rep|obs,j}^* - \hat{y})' (y_{rep|obs,j}^* - \hat{y})$$

其中 \hat{y} 可用第一種配適型態或者第二種配適型態。當 m 夠大的時候, 根據大數法則, 上式便趨近於 (3.2) 式。一旦 C 與 d 代值後, 便可經由此數值方法得到 (C, d) 對應的風險函數值。

我們可將上述單一反應變數數值方法推廣至區間反應變數。在此回顧 (1.4) 式廣義風險函數:

$$R(\beta, \hat{\beta}) = E(D(I, \hat{I}))$$

其中因子設定 x_1, x_2, \dots, x_n 下做一次實驗得到的反應變數為 $I_{obs,1}, I_{obs,2}, \dots, I_{obs,n}$, 我們稱之為在 x_1, x_2, \dots, x_n 下的觀測區間, 並以向量 I_{obs} 表示。給定 I_{obs} 後, 未來相同因子設定 x_1, x_2, \dots, x_n 下若再做一次實驗得到的反應變數令其為 $I_{rep|obs}$ 。

改寫 (1.4) 式, 令新的廣義風險函數為:

$$R(\beta, \hat{\beta}) = E_{I_{rep|obs}} \left(D(I_{rep|obs}, \hat{I}) \right) \quad (3.3)$$

請注意 (3.3) 式的解釋意義不同於第 2.1 節風險函數 (2.3) 式與第 2.2 節中風險函數 (2.14) 式。在 (3.3) 式中的風險函數主要衡量在給定觀測資料後, 對未來重複設定實驗之觀測值與配適值之間的相似度。

假設 $I_{rep|obs} \sim F$, 若機率分配 F 不含未知數參數時, 便可生成仿隨機區間 $I_1^*, I_2^*, \dots, I_m^*$, 及配適區間 $\hat{I}_1^*, \hat{I}_2^*, \dots, \hat{I}_m^*$, 進而計算:

$$\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m D(I_{rep|obs,j}^*, \hat{I}_j^*) \quad (3.4)$$

一旦 m 夠大的時候, (3.4) 式便趨近 (3.3) 式。其中 \hat{I} 與 F 隨著不同的區間模型而有所不同 (在以下各節會詳細說明)。而前述介紹了 Chang (2008) 第一種區間模型與第二種區間模型代入上述流程中, 在 3.1.1 節與 3.1.2 節各別詳述。

3.1.1 第一種區間模型配適之風險函數計算方法

回顧 2.1 節 (2.2) 式之第一種區間模型: $U = X_1\beta_1 + \varepsilon_1$ 與 $L = X_2\beta_2 + \varepsilon_2$, 令 L_{obs} 為觀測區間下界, U_{obs} 為觀測區間上界, L_{rep} 為未來同樣設定下獲得的區間下界, U_{rep} 為未來同樣設定下獲得的區間上界。我們可依 (3.1) 式的建模方式來指定 $U_{rep|obs}$ 與 $L_{rep|obs}$ 的機率分配為:

$$\begin{cases} U_{rep|obs} \sim N(X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T U_{obs}, \sigma_1^2(I + X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T)) \\ L_{rep|obs} \sim N(X_2(X_2^T X_1)^{-1} X_2^T L_{obs}, \sigma_2^2(I + X_2(X_2^T X_1)^{-1} X_2^T)) \end{cases} \quad (3.5)$$

且令其滿足

$$u_{rep|obs,j} \geq l_{rep|obs,j} \quad (3.6)$$

的限制式, 其中 $j = 1, 2, \dots, n$ 。再利用 (3.5) 及 (3.6) 式生成 m 組仿隨機數為:

- $U_{rep|obs,1}^*, U_{rep|obs,2}^*, \dots, U_{rep|obs,m}^*$
- $L_{rep|obs,1}^*, L_{rep|obs,2}^*, \dots, L_{rep|obs,m}^*$

故得到了仿隨機區間為:

$$I_{rep|obs,j}^* = (L_{rep|obs,j}^*, U_{rep|obs,j}^*) = \begin{pmatrix} (l_{rep|obs,j,1}^*, u_{rep|obs,j,1}^*) \\ (l_{rep|obs,j,2}^*, u_{rep|obs,j,2}^*) \\ \vdots \\ (l_{rep|obs,j,n}^*, u_{rep|obs,j,n}^*) \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, m$$

在 (3.3) 式風險函數中的 \hat{I} , 在此區間模型底下可分成兩種型態:

- 第一型態配適值: $\hat{I} = (X_2 \hat{\beta}_L, X_1 \hat{\beta}_U) = (X_2 (C_2 L_{rep|obs} + d_2), X_1 (C_1 U_{rep|obs} + d_1))$
- 第二型態配適值: $\hat{I} = (X_2 \hat{\beta}_L, X_1 \hat{\beta}_U) = (X_2 (C_2 L_{obs} + d_2), X_1 (C_1 U_{obs} + d_1))$

因為配適區間不應出現上界比下界小的情況, 所以必須在 $(\hat{\beta}_U, \hat{\beta}_L)$ 上增加以下的限制式:

$$(X_1 \hat{\beta}_U)_j \geq (X_2 \hat{\beta}_L)_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

若鎖定其中一種型態配適值, 生成仿隨機區間後, 給定 (C_1, d_1) 與 (C_2, d_2) 代入此配適值公式, 進而得到仿配適區間 $\hat{I}_1^*, \hat{I}_2^*, \dots, \hat{I}_m^*$, 再代入 (3.4) 式估算風險函數, 則對任意不同的區間距離函數 D , 在第一種區間模型下, 對給定的 (C_1, d_1) 與 (C_2, d_2) , 皆可計算出風險函數值。

與 (2.2) 式模型相比, 這裡多了 (3.6) 式與 (3.7) 式限制, 這使數據生成和模型配適的計算變得相當的複雜。因此在數據生成的部份, 我們先依照 (3.5) 式生成仿隨機區間, 若該仿隨機區間不滿足 (3.6) 式或 (3.7) 式, 則不使用於風險函數 (3.4) 式的計算, 重覆此檢查直到生成 m 筆資料為止。

3.1.2 第二種區間模型配適之風險函數計算方法

回顧2.2節 (2.13) 式之第二種區間距離模型: $Cen = X_1\beta_1 + \varepsilon_1, Z = X_2\beta_2 + \varepsilon_2$, 其中 Cen_{obs} 為觀測區間中心, Z_{obs} 為觀測區間半區間長度取自然對數。若令 Cen_{rep} 為未來在同樣設定下獲得的區間中心, Z_{rep} 為未來在同樣設定下獲得的觀測區間半區間長度取自然對數。則我們可依 (3.1) 式的建模方式來指定 $Cen_{rep|obs}$ 與 $Z_{rep|obs}$ 機率分配為:

$$\begin{cases} Cen_{rep|obs} \sim N(X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen_{obs}, \sigma_1^2(I + X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T)) \\ Z_{rep|obs} \sim N(X_2(X_2^T X_2)^{-1} X_2^T Z_{obs}, \sigma_2^2(I + X_2(X_2^T X_2)^{-1} X_2^T)) \end{cases} \quad (3.8)$$

利用上述機率分配生成 m 組仿隨機數為:

- $Cen_{rep|obs,1}^*, Cen_{rep|obs,2}^*, \dots, Cen_{rep|obs,m}^*$
- $Z_{rep|obs,1}^*, Z_{rep|obs,2}^*, \dots, Z_{rep|obs,m}^*$

得到了仿隨機區間為:

$$I_{rep|obs,j}^* = \left(Cen_{rep|obs,j}^* - e^{Z_{rep|obs,j}^*}, Cen_{rep|obs,j}^* + e^{Z_{rep|obs,j}^*} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \left(cen_{rep|obs,j,1}^* - e^{z_{rep|obs,j,1}^*}, cen_{rep|obs,j,1}^* + e^{z_{rep|obs,j,1}^*} \right) \\ \left(cen_{rep|obs,j,2}^* - e^{z_{rep|obs,j,2}^*}, cen_{rep|obs,j,2}^* + e^{z_{rep|obs,j,2}^*} \right) \\ \vdots \\ \left(cen_{rep|obs,j,n}^* - e^{z_{rep|obs,j,n}^*}, cen_{rep|obs,j,n}^* + e^{z_{rep|obs,j,n}^*} \right) \end{pmatrix}$$

其中 $j = 1, 2, \dots, m$ 。

在此種模型底下 (3.3) 式中的 \hat{I} 可寫為:

$$\hat{I} = \left(X_1 \hat{\beta}_{Cen} - e^{X_2 \hat{\beta}_Z}, X_1 \hat{\beta}_{Cen} + e^{X_2 \hat{\beta}_Z} \right)$$

其中 $\hat{\beta}_{Cen}$ 與 $\hat{\beta}_Z$ 可分成兩種型態:

- 第一型態配適值: $\hat{\beta}_{Cen} = C_1 Cen_{rep|obs} + d_1, \hat{\beta}_Z = C_2 Z_{rep|obs} + d_2$
- 第二型態配適值: $\hat{\beta}_{Cen} = C_1 Cen_{obs} + d_1, \hat{\beta}_Z = C_2 Z_{obs} + d_2$

若鎖定其中一種型態配適值, 生成仿隨機區間後, 給定 (C_1, d_1) 與 (C_2, d_2) 代入此配適值公式, 進而得到仿配適區間 $\hat{I}_1^*, \hat{I}_2^*, \dots, \hat{I}_m^*$, 再代入 (3.4) 式估算風險函數, 則對任意不同的區間距離函數 D , 在第二種區間模型下, 對給定的 (C_1, d_1) 與 (C_2, d_2) , 皆可計算出風險函數值。

在介紹了如何使用數值的方法對不同的 (C_1, d_1, C_2, d_2) 計算其風險函數值後, 我們由最小化風險函數值求得 $(\hat{C}_1, \hat{d}_1, \hat{C}_2, \hat{d}_2)$ 。因此我們依照數值法得到的風險函數值寫成 (C_1, d_1, C_2, d_2) 的函數:

$$g(C_1, d_1, C_2, d_2) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m D(I_{rep|obs,j}^*, \hat{I}_j^*)$$

爲了尋找使函數 g 最小的 $(\hat{C}_1, \hat{d}_1, \hat{C}_2, \hat{d}_2)$, 以得到參數估計量, 我們使用的工具是 Gay (1990) 提出的 Selected Optimization Routines。其數值法的內容較爲複雜, 故我們不在此詳細討論。

3.2 第二種區間模型與第一種區間距離函數之配適演算

回顧第 2.2 節提及第一種區間距離函數用於配適第二種區間模型, 發現風險函數 (2.14) 式最小化推導相當困難後, 只推導出未來預測區間的表達式。此節便是利用數值方法計算出參數估計值。

回顧第 2.2 節 (2.13) 式之第二種區間模型爲: $Cen = X_1\beta_1 + \varepsilon_1, Z = X_2\beta_2 + \varepsilon_2$, 套入第一種距離函數後, 得到的風險函數爲:

$$\begin{aligned} & R((\beta_1, \beta_2), (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)) \\ &= 2E(Cen - X_1\hat{\beta}_1)'(Cen - X_1\hat{\beta}_1) + 2E(e^Z - e^{X_2\hat{\beta}_2})'(e^Z - e^{X_2\hat{\beta}_2}) \end{aligned}$$

其中令 $\hat{\beta}_1 = C_1 Cen + d_1$ 且 $\hat{\beta}_2 = C_2 Z + d_2$ 代入上式得到:

$$\begin{aligned}
& R((\beta_1, \beta_2), (C_1, d_1, C_2, d_2)) \\
&= 2E(Cen - X_1(C_1 Cen + d_1))'(Cen - X_1(C_1 Cen + d_1)) \quad (3.9) \\
&+ 2E(e^Z - e^{X_2(C_2 Z + d_2)})'(e^Z - e^{X_2(C_2 Z + d_2)})
\end{aligned}$$

得到風險函數後, 若使用 3.1 節的數值方法, 便可得到在第一種區間距離與第二種區間模型下的配適流程為:

1 生成仿隨機數:

$$\begin{aligned}
& Cen_{rep|obs,1}^*, Cen_{rep|obs,2}^*, \dots, Cen_{rep|obs,m}^* \\
& \sim N(X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen_{obs}, \sigma_1^2(I + X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T)) \\
& Z_{rep|obs,1}^*, Z_{rep|obs,2}^*, \dots, Z_{rep|obs,m}^* \\
& \sim N(X_2(X_2^T X_1)^{-1} X_2^T Z_{obs}, \sigma_2^2(I + X_2(X_2^T X_1)^{-1} X_2^T))
\end{aligned}$$

2 令 (3.9) 式風險函數為 (C_1, d_1, C_2, d_2) 的函數:

$$\begin{aligned}
& g(C_1, d_1, C_2, d_2) \\
&= \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \left(Cen_{rep|obs,j}^* - X_1 \hat{\beta}_1^* \right)' \left(Cen_{rep|obs,j}^* - X_1 \hat{\beta}_1^* \right) \\
&+ \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \left(e^{Z_{rep|obs,j}^*} - e^{X_2 \hat{\beta}_2^*} \right)' \left(e^{Z_{rep|obs,j}^*} - e^{X_2 \hat{\beta}_2^*} \right) \\
&= \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \left(Cen_{rep|obs,j}^* - X_1 (C_1 Cen_{rep|obs,j}^* + d_1) \right)' \left(Cen_{rep|obs,j}^* - X_1 (C_1 Cen_{rep|obs,j}^* + d_1) \right) \\
&+ \frac{2}{m} \sum_{j=1}^m \left(e^{Z_{rep|obs,j}^*} - e^{X_2 (C_2 Z_{rep|obs,j}^* + d_2)} \right)' \left(e^{Z_{rep|obs,j}^*} - e^{X_2 (C_2 Z_{rep|obs,j}^* + d_2)} \right)
\end{aligned}$$

3 由 Gay (1990) 方法, 找尋使 $g(C_1, d_1, C_2, d_2)$ 有最小值的 (C_1, d_1, C_2, d_2)

$$(\hat{C}_1, \hat{d}_1, \hat{C}_2, \hat{d}_2) = \arg \min_{(C_1, d_1, C_2, d_2)} g(C_1, d_1, C_2, d_2)$$

4 由上式得到參數估計量爲:

$$\hat{\beta}_1 = \hat{C}_1 Cen_{obs} + \hat{d}_1, \hat{\beta}_2 = \hat{C}_2 Z_{obs} + \hat{d}_2$$

上述配適流程, 爲第一種配適型態的 \widehat{Cen} 與 \widehat{Z} , 如果爲第二種配適型態, 需改寫第二步驟中的 $\hat{\beta}_1^*$ 與 $\hat{\beta}_2^*$ 如下式:

$$\hat{\beta}_1^* = C_1 Cen_{obs} + d_1, \hat{\beta}_2^* = C_2 Z_{obs} + d_2$$

3.3 第二種區間距離函數之數值演算

在某些情形下, 若僅以兩區間端點的距離來衡量區間的相似程度, 會有所不足。在此以圖例說明。

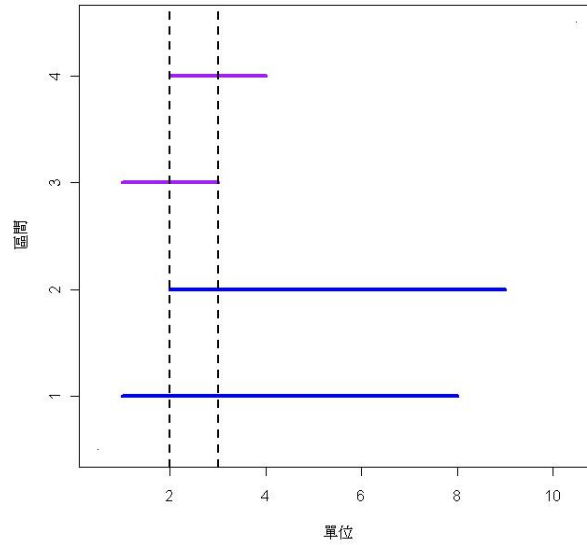


圖 3.1: 兩區間移動情況

把上圖的4號區間向左移動一個單位形成3號區間, 把2號區間向左移動一個單位形成1號區間。雖然兩區間同樣移動一個單位, 但3號區間所包含的範圍有一半的部分不同於4號區間, 而1號區間所包含的範圍則只有1/7部分不同於2號區間。但若用Chang (2008)中第一種區間距離衡量 $D_1(I_3, I_4) = D_1(I_1, I_2)$, 則無法反映此現象。

在Chang (2008)提及第二種區間距離函數中，不僅用第一種區間距離衡量兩區間相似程度，還加入關於配適錯誤比例的懲罰項。令 \hat{I} 為配適區間且 I_{obs} 為觀測區間，則配適區間包含觀測區間的正確比例為：

$$\frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|\hat{I}|}$$

且錯誤的比例為：

$$1 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|\hat{I}|}$$

利用區間比例的概念來定義區間距離，在某些情況下，會比僅用區間端點的距離更適合。

在Chang (2008)中定義的第二種區間距離函數為：

$$D_2(\hat{I}, I_{obs}) = D_1(\hat{I}, I_{obs}) + \left(1 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|\hat{I}|}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs})$$

對懲罰項係數部份通分得到：

$$\frac{|\hat{I}| - |I_{obs} \cap \hat{I}|}{|\hat{I}|}$$

若配適區間能夠落在觀測區間裡面則 $I_{obs} \cap \hat{I} = \hat{I}$ ，懲罰項為0。為了使懲罰項縮小，配適區間會較傾向落入觀測區間裡面，故配適區間會較小，我們稱其有較保守的性質。

相反地，若我們希望配適區間能盡量包住觀測區間時，我們可定義配適區間覆蓋觀測區間的正確比例為：

$$\frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|I_{obs}|}$$

錯誤的比例為：

$$1 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|I_{obs}|}$$

則第二種區間距離函數改寫為:

$$D_2(\hat{I}, I_{obs}) = D_1(\hat{I}, I_{obs}) + \left(1 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|I_{obs}|}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs})$$

同樣對懲罰項係數部份通分得到:

$$\frac{|I_{obs}| - |I_{obs} \cap \hat{I}|}{|I_{obs}|}$$

若配適區間能夠覆蓋整個觀測區間則 $I_{obs} \cap \hat{I} = I_{obs}$, 懲罰項為0。為了使懲罰項縮小, 配適區間傾向覆蓋較多的觀測區間, 故配適區間會較大, 我們稱其有較開放的性質。

在保守型區間距離中, 若配適區間縮在觀測區間內, 雖然可減小懲罰項, 但若配適區間越小, 則容易增加 $D_1(\hat{I}, I_{obs})$ 的損失, 故風險函數不一定會變小。故使用保守型距離函數得到的配適區間具有保守性質, 但並不會過份保守。相同的, 開放型區間距離會使配適區間具有開放性質, 但並不會過份開放。

兩區間 $I_1 = (l_1, u_1)$ 與 $I_2 = (l_2, u_2)$ 的重疊的情況, 可分成 I_1 與 I_2 無交集、交錯、重疊等六種狀況, 以數學式子表示為:

$$1 \quad u_2 \leq l_1$$

$$2 \quad l_2 \leq l_1 \leq u_2 \leq u_1$$

$$3 \quad l_2 \leq l_1 \leq u_1 \leq u_2$$

$$4 \quad l_1 \leq l_2 \leq u_2 \leq u_1$$

$$5 \quad l_1 \leq l_2 \leq u_1 \leq u_2$$

$$6 \quad u_1 \leq l_1$$

以例子圖示此六種狀況於圖 3.2 中, 可清楚地看出此六條式子分別對應的狀況。

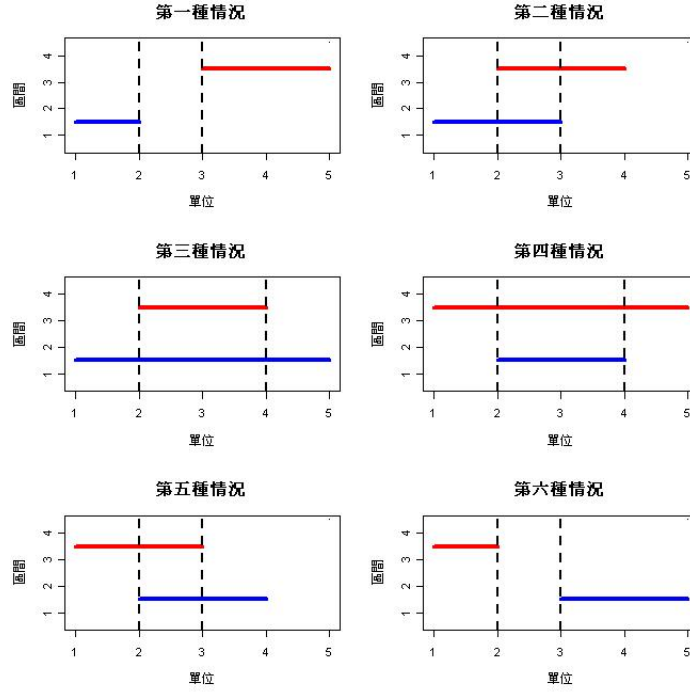


圖 3.2: 兩區間交集重疊情況

3.3.1 第二種區間距離函數與第一種區間模型之配適流程

此節主要論述第二種區間距離函數與第一種區間模型之配適。由上述兩區間重疊的情況，保守型區間距離函數可表示為：

$$D_2(\hat{I}, I_{obs}) = \left(2 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|\hat{I}|}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs})$$

$$= \begin{cases} 2D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } u \leq \hat{l} \\ \left(2 - \frac{u-\hat{l}}{\hat{u}-\hat{l}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } l \leq \hat{l} \leq u \leq \hat{u} \\ \left(2 - \frac{\hat{u}-\hat{l}}{\hat{u}-\hat{l}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } l \leq \hat{l} \leq \hat{u} \leq u \\ \left(2 - \frac{u-l}{\hat{u}-\hat{l}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } \hat{l} \leq l \leq u \leq \hat{u} \\ \left(2 - \frac{\hat{u}-l}{\hat{u}-\hat{l}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } \hat{l} \leq l \leq \hat{u} \leq u \\ 2D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } u \leq \hat{l} \end{cases}$$

其中 $D_1(\hat{I}, I_{obs}) = (\hat{l} - l)^2 + (\hat{u} - u)^2$, u 為 U 之分量且 l 為 L 之分量。

回顧3.1.1節風險函數計算方法，得到保守型區間距離底下，第一種區間模型配適之流程為：

1 生成仿隨機數：

$$U_{rep|obs,1}^*, U_{rep|obs,2}^*, \dots, U_{rep|obs,m}^* \\ \sim N(X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T U_{obs}, \sigma_1^2(I + X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T))$$

$$L_{rep|obs,1}^*, L_{rep|obs,2}^*, \dots, L_{rep|obs,m}^* \\ \sim N(X_2(X_2^T X_1)^{-1} X_2^T L_{obs}, \sigma_2^2(I + X_2(X_2^T X_1)^{-1} X_2^T))$$

並且需要滿足 $l_{rep|obs,j,i}^* < u_{rep|obs,j,i}^*$ 其中 $j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$

得到了第 j 組仿隨機區間：

$$I_{rep|obs,j}^* = (L_{rep|obs,j}^*, U_{rep|obs,j}^*) = \begin{pmatrix} (l_{rep|obs,j,1}^*, u_{rep|obs,j,1}^*) \\ (l_{rep|obs,j,2}^*, u_{rep|obs,j,2}^*) \\ \vdots \\ (l_{rep|obs,j,n}^*, u_{rep|obs,j,n}^*) \end{pmatrix}, j = 1, 2, \dots, m$$

2 令為第一型態配適：

$$\hat{U}_j^* = X_1 \hat{\beta}_{U,j}^* = X_1 (C_1 U_{rep|obs,j}^* + d_1), \hat{L}_j^* = X_2 \hat{\beta}_{L,j}^* = X_2 (C_2 L_{rep|obs,j}^* + d_2), j = 1, 2, \dots, m$$

則第 j 組模擬配適區間為：

$$(\hat{L}_j^*, \hat{U}_j^*) = \left((\hat{l}_{j,1}^*, \hat{u}_{j,1}^*), (\hat{l}_{j,2}^*, \hat{u}_{j,2}^*), \dots, (\hat{l}_{j,n}^*, \hat{u}_{j,n}^*) \right)'$$

3 上述兩步驟兩種區間代入於保守型區間距離函數，並且令風險函數為 (C_1, d_1, C_2, d_2) 函數：

$$g(C_1, d_1, C_2, d_2) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m D_2(\hat{I}_{j,i}, I_{rep|obs,j,i}^*)$$

4 由Gay (1990)方法，找尋使 $g(C_1, d_1, C_2, d_2)$ 最小值的 (C_1, d_1, C_2, d_2)

$$(\hat{C}_1, \hat{d}_1, \hat{C}_2, \hat{d}_2) = \arg \min_{(C_1, d_1, C_2, d_2)} g(C_1, d_1, C_2, d_2)$$

$$\hat{\beta}_U = \hat{C}_1 U_{obs} + \hat{d}_1, \hat{\beta}_L = \hat{C}_2 L_{obs} + \hat{d}_2$$

上述流程為第一種配適型態的 \hat{U}^* 與 \hat{L}^* ，如果是第二種型態配適值，只需更改第二步驟為：

$$\hat{\beta}_{U,j}^* = \hat{C}_1 U_{obs} + \hat{d}_1, \hat{\beta}_{L,j}^* = \hat{C}_2 L_{obs} + \hat{d}_2, j = 1, 2, \dots, m$$

若改成開放型區間距離函數，只需改寫流程的第三步驟距離函數為：

$$D_2(\hat{I}, I_{obs}) = \left(2 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|I_{obs}|}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs})$$

3.3.2 第二種區間距離函數與第二種區間模型之配適流程

回顧第2.2節 (2.13) 式之第二種區間模型： $Cen = X_1\beta_1 + \varepsilon_1, Z = X_2\beta_2 + \varepsilon_2$ ，利用 $(l, u) = (c - e^z, c + e^z)$ 關係，改寫保守型區間距離函數為：

$$D_2(\hat{I}, I_{obs}) = \left(2 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|\hat{I}|}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs})$$

$$= \begin{cases} 2D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } c + e^z \leq \hat{c} - e^{\hat{z}} \\ \left(2 - \frac{(c+e^z) - (\hat{c} - e^{\hat{z}})}{2e^{\hat{z}}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } c - e^z \leq \hat{c} - e^{\hat{z}} \leq c + e^z \leq \hat{c} + e^{\hat{z}} \\ \left(2 - \frac{(\hat{c} + e^{\hat{z}}) - (\hat{c} - e^{\hat{z}})}{2e^{\hat{z}}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } c - e^z \leq \hat{c} - e^{\hat{z}} \leq \hat{c} + e^{\hat{z}} \leq c + e^z \\ \left(2 - \frac{(c+e^z) - (c - e^z)}{2e^{\hat{z}}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } \hat{c} - e^{\hat{z}} \leq c - e^z \leq c + e^z \leq \hat{c} + e^{\hat{z}} \\ \left(2 - \frac{(\hat{c} + e^{\hat{z}}) - (c - e^z)}{2e^{\hat{z}}}\right) D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } \hat{c} - e^{\hat{z}} \leq c - e^z \leq \hat{c} + e^{\hat{z}} \leq c + e^z \\ 2D_1(\hat{I}, I_{obs}) & \text{if } \hat{c} + e^{\hat{z}} \leq c - e^z \end{cases}$$

其中 $D_1(\hat{I}, I_{obs}) = 2(\hat{c} - c)^2 + 2(e^{\hat{z}} - e^z)^2$

保守型區間距離函數與第二種區間模型之配適流程，與 3.3.1 節極為類似，而不同之處為：

1 生成仿隨機數：

$$\begin{aligned} & Cen_{rep|obs,1}^*, Cen_{rep|obs,2}^*, \dots, Cen_{rep|obs,m}^* \\ & \sim N(X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T Cen_{obs}, \sigma_1^2(I + X_1(X_1^T X_1)^{-1} X_1^T)) \\ & Z_{rep|obs,1}^*, Z_{rep|obs,2}^*, \dots, Z_{rep|obs,m}^* \\ & \sim N(X_2(X_2^T X_2)^{-1} X_2^T Z_{obs}, \sigma_2^2(I + X_2(X_2^T X_2)^{-1} X_2^T)) \end{aligned}$$

得到第 j 組仿隨機區間為：

$$I_{rep|obs,j}^* = \left(Cen_{rep|obs,j}^* - e^{Zen_{rep|obs,j}^*}, Cen_{rep|obs,j}^* + e^{Zen_{rep|obs,j}^*} \right), j = 1, 2, \dots, m$$

2 令為第一配適型態：

$$\hat{\beta}_{1,j}^* = C_1 Cen_{rep|obs,j}^* + d_1, \hat{\beta}_{2,j}^* = C_2 Z_{rep|obs,j}^* + d_2, j = 1, 2, \dots, m$$

得到第 j 組模擬配適區間為：

$$\hat{I}_{rep|obs,j}^* = \left(X_1 \hat{\beta}_{1,j}^* - e^{X_2 Z_{1,j}^*}, X_1 \hat{\beta}_{1,j}^* + e^{X_2 Z_{1,j}^*} \right)$$

後續 3 ~ 4 步驟與 3.3.1 節配適流程相同。

5

$$\hat{\beta}_1 = \hat{C}_1 Cen_{obs} + \hat{d}_1, \hat{\beta}_2 = \hat{C}_2 Z_{obs} + \hat{d}_2$$

若更改為開放型區間距離，或更改成第二種配適型態，則如同 3.3.1 節配適流程之更改方式。

3.3.3 第二種權重區間距離函數

在保守型區間距離函數中, 可以給予懲罰項一個權重 λ , 來調節 $D_1(\hat{I}, I_{obs})$ 與懲罰項的貢獻, 因此保守型權重區間距離函數定義為:

$$D_{2,\lambda}(\hat{I}, I_{obs}) = D_1(\hat{I}, I_{obs}) + \lambda \left(1 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|\hat{I}|} \right) D_1(\hat{I}, I_{obs})$$

當 λ 很大時, 會導致後面的懲罰項對風險函數的貢獻極大, 故會產生配適區間會傾向落在觀測區間裡面, 以避免懲罰項過大的情況。相同的, 開放型權重區間距離函數為:

$$D_{2,\lambda}(\hat{I}, I_{obs}) = D_1(\hat{I}, I_{obs}) + \lambda \left(1 - \frac{|I_{obs} \cap \hat{I}|}{|I_{obs}|} \right) D_1(\hat{I}, I_{obs})$$

同上述想法, λ 越大, 則配適區間越容易包含住觀測區間。

3.4 參數估計量的標準差和標準誤之數值計算

若真實模型已知, 則我們可使用真實模型來生成 M 組仿隨機區間:

$$I_1^*, I_2^*, \dots, I_M^*$$

若用上述 M 組仿隨機區間來配適區間模型, 得到 M 組參數估計量為:

$$\hat{\beta}_1^*, \hat{\beta}_2^*, \dots, \hat{\beta}_M^*$$

當 M 夠大時, 由大數法則得到:

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\hat{\beta}_i^* - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_i^* \right) \left(\hat{\beta}_i^* - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_i^* \right)' \text{趨近 } Cov(\hat{\beta})$$

且

$$\sqrt{\left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\hat{\beta}_i^* - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_i^* \right) \left(\hat{\beta}_i^* - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_i^* \right)' \right]_{k+1, k+1}} \text{趨近 } sd(\hat{\beta}_k)$$

其中 $k = 0, 1, \dots, p$ 。此時我們得到的 $sd(\hat{\beta}_k)$ 可視為估計式的真實標準差 (standard deviation)，但這只能在如數值模擬時，真實模型已知的情況下，方能獲得。

若真實模型未知，而只有數據資訊可使用時，我們依然可以計算標準誤 (standard error)，以提供標準差的訊息。在Wu (1986)提及單一反應變數的線性模型中，可以用重抽殘差(resample residual) 的數值方法計算參數估計量標準誤。在此以第二種區間模型 $Cen = X_1\beta_1 + \varepsilon_1, Z = X_2\beta_2 + \varepsilon_2$ 為例，說明如何將此方法推廣至區間反應變數模型。假設搭配第一種區間距離函數或第二種區間距離函數，便可利用3.2節或3.3.2節的配適流程，計算出參數估計量為 $\hat{\beta}_1$ 與 $\hat{\beta}_2$ ，則得到模型配適之殘差為：

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}_1 = Cen - X_1\hat{\beta}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 = Z - X_2\hat{\beta}_2 \end{cases}$$

由上述得到的殘差集合令為 $\{\hat{\varepsilon}_{1,1}, \hat{\varepsilon}_{1,2}, \dots, \hat{\varepsilon}_{1,n}\}$ 與 $\{\hat{\varepsilon}_{2,1}, \hat{\varepsilon}_{2,2}, \dots, \hat{\varepsilon}_{2,n}\}$ ，各別對兩殘差集合重抽的手法 (即取出後會放回) 獨立重抽殘差，進而得到了拔靴 (bootstrap) 樣本為：

$$\begin{cases} cen_i^* = x_{1,i}^T \hat{\beta}_1 + \hat{\varepsilon}_{1,i}^* \\ z_i^* = x_{2,i}^T \hat{\beta}_2 + \hat{\varepsilon}_{2,i}^* \end{cases}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$ 。

接著重覆此過程生成 M 組拔靴樣本，各別用來配適區間模型，若得到拔靴參數估計量為：

$$\hat{\beta}_{1,1}^{**}, \hat{\beta}_{1,2}^{**}, \dots, \hat{\beta}_{1,M}^{**}, \hat{\beta}_{2,1}^{**}, \hat{\beta}_{2,2}^{**}, \dots, \hat{\beta}_{2,M}^{**}$$

當 M 夠大時，由大數法則得到：

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\hat{\beta}_{j,i}^{**} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_{j,i}^{**} \right) \left(\hat{\beta}_{j,i}^{**} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_{j,i}^{**} \right)' \text{ 趨近 } \widehat{Cov}(\hat{\beta}_j), j = 1, 2$$

且

$$\sqrt{\left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \left(\hat{\beta}_{j,i}^{**} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_{j,i}^{**} \right) \left(\hat{\beta}_{j,i}^{**} - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\beta}_{j,i}^{**} \right)' \right]_{k+1,k+1}} \text{ 趨近 } se(\hat{\beta}_{j,k})$$

其中 $j = 1, 2$ 且 $k = 0, 1, \dots, p$.

對不同的區間反應變數模型及區間距離函數下的參數估計量，其標準誤的數值計算亦用上述的重抽殘差手法。



第 4 章

數值模擬

本章將把第三章所提出的數值方法，應用在利用電腦模擬生成的數據上。回顧 3.3 節論述保守型與開放型區間距離函數，其模型配適所得到的配適區間有保守與開放性質，並與最小平方法於 4.1 節與 4.2 節比較。有兩種不同型態配適值於風險函數中，其配適區間性質不同，我們在 4.3 節比較分析。各種區間反應變數與區間模型配適，其參數估計量標準誤與標準差於 4.4 節計算，並與最小平方法做比較。

4.1 第二種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間性質比較

數據一，令真實的區間反應變數模型為：

$$\begin{cases} u = 1 + 5x + \varepsilon_1 \\ l = 1 + 0.2x + \varepsilon_2 \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_1 \sim N(0, 1)$, $\varepsilon_2 \sim N(0, 1)$

在 $x = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 15$ 底下，生成的一組數據如下表：

x	1	2	4	5	6	7	10	15
U	6.7309	12.986	23.310	26.071	32.535	35.444	52.443	74.383
L	2.2951	1.3877	1.1174	3.9136	1.1856	3.3632	3.7320	4.1745

表 4.1：模擬數據一

數據二, 令真實的區間反應變數模型為:

$$\begin{cases} u = 3 + 8x + \varepsilon_1 \\ l = 2x + \varepsilon_2 \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_1 \sim N(0, 2^2)$, $\varepsilon_2 \sim N(0, 3^2)$

在 $x = 1, 2, 4, 5, 6, 7, 10, 15$ 底下, 生成的一組數據如下表:

x	1	2	4	5	6	7	10	15
U	10.298	17.117	34.747	45.374	48.171	57.168	82.995	125.60
L	-3.524	5.8721	12.045	9.3975	8.4870	14.025	20.569	36.182

表 4.2: 模擬數據二

在第一種區間距離函數與第一種區間模型下在 2.1 節推導中, 我們得到參數估計式為最小平方估計式。在本章數值模擬過程, 我們用 OLS.U 與 OLS.L 來表示由此最小平方估計式獲得的配適區間之上界與下界, 而令 U 與 L 為觀測區間上界與下界。應用第三章的數值法計算風險函數時, 我們皆生成 $m=2000$ 筆仿隨機區間且用第一種配適型態。令 CD2.U 與 CD2.L 為保守型區間距離函數與第一種區間模型下, 其配適區間之上界與下界。OD2.U 與 OD2.L 為開放型區間距離函數與第一種區間模型下, 其配適區間之上界與下界。將上述三種方法應用於數據一上, 則可得到配適區間為:

x	U	OLS.U	CD2.U	OD2.U	L	OLS.L	CD2.L	OD2.L
1	6.7309	7.7294	7.6161	7.7563	2.2951	1.6439	1.7188	1.6010
2	12.986	12.541	12.422	12.567	1.3878	1.8348	1.9055	1.7946
4	23.310	22.163	22.034	22.188	1.1174	2.2166	2.2789	2.1819
5	26.071	26.974	26.840	26.999	3.9136	2.4075	2.4656	2.3755
6	32.535	31.785	31.646	31.810	1.1856	2.5984	2.6522	2.5691
7	35.444	36.596	36.451	36.621	3.3632	2.7893	2.8389	2.7627
10	52.443	51.030	50.869	51.053	3.7320	3.3620	3.3990	3.3435
15	74.383	75.085	74.899	75.106	4.1745	4.3165	4.3325	4.3116

表 4.3: 數據一, 三種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

我們可發現 CD2.U 大多較 OLS.U 小且 CD2.L 大多較 OLS.L 大, 故在保守型區間距離函數下, 其配適區間較最小平方方法更容易縮入觀測區間裡面。相對的, OD2.U 大多較於 OLS.U 大且 OD2.L 大多較 OLS.L 小, 故在開放型區間距離函數下, 其配適區間較最小平方方法更能蓋住較多的觀測區間。這個例子印證了此兩種區間距離函數, 其配適區間有開放與保守的性質。將上述三種方法亦應用於數據二上, 則可得到三種配適區間為:

x	U	OLS.U	CD2.U	OD2.U	L	OLS.L	CD2.L	OD2.L
1	10.298	9.5357	9.3932	9.8514	-3.524	-0.173	0.0831	-0.4039
2	17.117	17.754	17.634	18.045	5.8721	2.3138	2.5565	2.09040
4	34.748	34.192	34.116	34.432	12.045	7.2869	7.5033	7.07891
5	45.374	42.411	42.357	42.626	9.3976	9.7735	9.9767	9.57317
6	48.171	50.630	50.599	50.819	8.4870	12.260	12.450	12.0674
7	57.168	58.848	58.840	59.013	14.025	14.747	14.924	14.5617
10	82.995	83.505	83.563	83.590	20.569	22.206	22.344	22.0444
15	125.60	124.60	124.77	124.56	36.182	34.639	34.711	34.5157

表 4.4: 數據二, 三種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

其三種配適區間的性質與上例相似, 故亦印證了第二種區間距離下, 其配適區間有開放與保守的性質。

在上面的例子中, 我們亦發現, 若原始的觀測區間較短, 則其配適區間的保守與開放性質, 皆比長度較長的觀測區間更為突顯。舉例來說, $x = 1, 2, 3$ 的觀測區間長度較短, 而 $x = 10, 15$ 的觀測區間長度較長。而 $OD2.U(x = 1) - OLS.U(x = 1) = 0.3157$ 且 $OD2.L(x = 1) - OLS.L(x = 1) = -0.2309$, 但 $OD2.U(x = 15) - OLS.U(x = 15) = -0.04$ 且 $OD2.L(x = 15) - OLS.L(x = 15) = -0.1233$, 故在 $x = 1$ 較 $x = 15$ 時, 配適區間的開放性值更明顯。這印證了 3.3 節中, 短觀測區間較長觀測區間, 其配適區間保守與開放性質較為突顯的討論。

上例三種方法中後兩者所使用的區間距離中, 權重 λ 皆設定為 1。現今我們使用不同的 $\lambda = 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 20, 50, 100$, 在第一種區間距離模型與保守型區間距離函數下來配適數據一, 其得到的配適區間列於表 4.5。觀察表 4.5 得知, 隨著 λ 越大, 其配適區間越趨於保守。這印證了配適區間保守程度與 λ 成正比。

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	U	OLS.U
1	7.688	7.680	7.634	7.417	7.340	7.126	6.814	6.599	6.731	7.729
2	12.496	12.496	12.455	12.257	12.198	11.979	11.689	11.455	12.986	12.541
4	22.111	22.128	22.096	21.937	21.913	21.687	21.441	21.165	23.310	22.163
5	26.919	26.944	26.917	26.777	26.771	26.541	26.317	26.020	26.071	26.974
6	31.726	31.760	31.738	31.617	31.628	31.394	31.193	30.876	32.535	31.785
7	36.534	36.576	36.558	36.457	36.486	36.248	36.068	35.731	35.444	36.596
10	50.957	51.024	51.020	50.977	51.058	50.809	50.696	50.297	52.443	51.030
15	74.996	75.105	75.124	75.177	75.346	75.078	75.074	74.573	74.383	75.085
x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	L	OLS.L
1	1.674	1.685	1.724	1.896	1.911	2.140	2.456	2.575	2.295	1.644
2	1.863	1.872	1.908	2.066	2.079	2.295	2.597	2.713	1.388	1.835
4	2.240	2.246	2.275	2.406	2.415	2.604	2.878	2.988	1.117	2.217
5	2.428	2.434	2.459	2.577	2.583	2.759	3.019	3.126	3.914	2.408
6	2.616	2.621	2.642	2.747	2.751	2.914	3.159	3.264	1.186	2.598
7	2.805	2.808	2.826	2.917	2.919	3.068	3.300	3.402	3.363	2.789
10	3.370	3.370	3.377	3.428	3.423	3.532	3.722	3.815	3.732	3.362
15	4.312	4.306	4.295	4.279	4.262	4.306	4.426	4.504	4.174	4.317

表 4.5: 數據一, 保守型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

同樣地, 我們亦使用不同的 $\lambda = 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 20, 50, 100$ 在開放型區間距離函數及第一種區間模型下, 來配適數據一, 其得到的配適區間列於表 4.6。觀察表 4.6 得知, 隨著 λ 越大, 其配適區間越趨於開放。這也印證了配適區間的開放程度與 λ 成正比。

接著應用上述相同的方法對數據二作第一種區間模型配適。得到表 4.7 為不同權重下的保守型配適區間, 表 4.8 為不同權重下的開放型配適區間。觀察兩表發現配適區間在保守與開放的性質上的表現, 與上例相同。

本節利用數據一與數據二, 來印證多種區間距離函數與第一種區間模型配適, 其配適區間性質上的不同。接著下一節將使用數值模擬來探討第二種區間模型下的配適, 並且考量包含二次效應的模型。

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	U	OLS.U
1	7.7310	7.7444	7.7591	7.8692	7.9732	8.0848	8.3098	8.6838	6.7309	7.7294
2	12.542	12.555	12.569	12.686	12.779	12.856	13.172	13.484	12.986	12.541
4	22.165	22.177	22.190	22.321	22.391	22.398	22.897	23.085	23.310	22.163
5	26.976	26.987	27.001	27.138	27.197	27.170	27.760	27.886	26.071	26.974
6	31.787	31.798	31.811	31.955	32.003	31.941	32.622	32.686	32.535	31.785
7	36.598	36.609	36.621	36.773	36.809	36.712	37.484	37.487	35.444	36.596
10	51.032	51.041	51.052	51.224	51.227	51.026	52.072	51.888	52.443	51.030
15	75.088	75.095	75.104	75.310	75.257	74.882	76.384	75.891	74.383	75.085
x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	L	OLS.L
1	1.636	1.622	1.601	1.438	1.374	1.087	1.461	0.596	2.295	1.644
2	1.828	1.814	1.794	1.634	1.581	1.310	1.654	0.859	1.388	1.835
4	2.210	2.199	2.182	2.024	1.994	1.755	2.040	1.386	1.117	2.217
5	2.402	2.391	2.375	2.219	2.200	1.978	2.233	1.649	3.914	2.407
6	2.593	2.583	2.569	2.414	2.406	2.201	2.426	1.913	1.186	2.598
7	2.785	2.776	2.762	2.609	2.613	2.423	2.619	2.176	3.363	2.789
10	3.359	3.353	3.343	3.195	3.232	3.091	3.198	2.967	3.732	3.362
15	4.316	4.314	4.311	4.171	4.264	4.205	4.163	4.284	4.175	4.317

表 4.6: 數據一, 開放型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	U	OLS.U
1	9.4964	9.5315	9.3498	9.0326	8.7965	8.3916	7.5639	8.1573	10.298	9.5357
2	17.702	17.771	17.559	17.252	16.978	16.672	15.858	16.257	17.117	17.754
4	34.113	34.25	33.977	33.69	33.342	33.233	32.447	32.456	34.747	34.192
5	42.319	42.489	42.186	41.909	41.524	41.513	40.741	40.555	45.374	42.411
6	50.524	50.729	50.395	50.128	49.706	49.793	49.035	48.655	48.171	50.630
7	58.730	58.968	58.604	58.347	57.888	58.074	57.330	56.755	57.168	58.848
10	83.347	83.687	83.230	83.004	82.433	82.915	82.212	81.053	82.995	83.505
15	124.37	124.88	124.28	124.10	123.34	124.32	123.68	121.55	125.60	124.60

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	L	OLS.L
1	0.0048	0.1707	0.1166	0.6016	1.6638	1.5674	2.5537	3.0415	-3.5241	-0.1728
2	2.4767	2.5814	2.5534	3.0363	4.0541	3.9789	4.9739	5.4834	5.8721	2.3138
4	7.4204	7.4027	7.427	7.9057	8.8348	8.8018	9.8143	10.367	12.045	7.2869
5	9.8923	9.8134	9.8638	10.34	11.225	11.213	12.235	12.809	9.3976	9.7735
6	12.364	12.224	12.301	12.775	13.615	13.625	14.655	15.251	8.487	12.26
7	14.836	14.635	14.737	15.21	16.006	16.036	17.075	17.693	14.025	14.747
10	22.252	21.867	22.048	22.514	23.177	23.271	24.336	25.018	20.569	22.206
15	34.611	33.92	34.232	34.687	35.129	35.328	36.437	37.228	36.182	34.639

表 4.7: 數據二, 保守型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	U	OLS.U
1	9.5638	9.6726	9.9323	10.356	10.573	11.163	13.145	12.357	10.298	9.5357
2	17.787	17.871	18.125	18.514	18.738	19.324	21.091	20.478	17.117	17.754
4	34.234	34.268	34.512	34.83	35.066	35.647	36.983	36.72	34.747	34.192
5	42.457	42.466	42.705	42.987	43.23	43.809	44.93	44.84	45.374	42.411
6	50.681	50.664	50.898	51.145	51.394	51.97	52.876	52.961	48.171	50.63
7	58.904	58.863	59.091	59.303	59.558	60.132	60.822	61.082	57.168	58.848
10	83.574	83.457	83.671	83.776	84.051	84.616	84.661	85.444	82.995	83.505
15	124.69	124.45	124.64	124.56	124.87	125.42	124.39	126.05	125.6	124.6
x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	L	OLS.L
1	-0.0776	-0.4064	-0.384	-0.9601	-1.1861	-1.2088	-3.7601	-2.8473	-3.5241	-0.1728
2	2.4107	2.1167	2.1365	1.5719	1.3525	1.2193	-0.9589	-0.4024	5.8721	2.3138
4	7.3875	7.1628	7.1777	6.6361	6.4297	6.0755	4.6434	4.4874	12.045	7.2869
5	9.8758	9.6859	9.6982	9.1682	8.9682	8.5036	7.4445	6.9323	9.3976	9.7735
6	12.364	12.209	12.219	11.7	11.507	10.932	10.246	9.3772	8.487	12.26
7	14.853	14.732	14.739	14.232	14.045	13.36	13.047	11.822	14.025	14.747
10	22.318	22.301	22.301	21.829	21.661	20.644	21.45	19.157	20.569	22.206
15	34.759	34.917	34.904	34.489	34.354	32.785	35.456	31.381	36.182	34.639

表 4.8: 數據二, 開放型權重區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

4.2 第二種區間距離函數與第二種區間模型之配適區間性質比較

回顧2.2節中之第二種區間模型為： $Cen = X_1\beta_1 + \varepsilon_1$, $Z = X_2\beta_2 + \varepsilon_2$ 其中 Z 為全區間長度取自然對數，故區間上界與下界為：

$$U = Cen + 0.5e^Z, L = Cen - 0.5e^Z$$

得到的配適區間為 Cen 與 Z 的函數，利用下述轉換以便觀察數據變化：

$$\hat{U} = \widehat{Cen} + 0.5e^{\hat{Z}}, \hat{L} = \widehat{Cen} - 0.5e^{\hat{Z}}$$

數據三，令真實的區間反應變數之模型為：

$$\begin{cases} cen = 30 - 10x + 2x^2 + \varepsilon_1 \\ z = 3 + 0.4x + 0.05x^2 + \varepsilon_2 \end{cases}$$

其中： $\varepsilon_1 \sim N(0, 2^2)$, $\varepsilon_2 \sim N(0, 0.1^2)$ 。

在 $x = -2, -1, 1, 2, 4, 5, 6, 7$ 下，生成的一組數據如下表：

x	Cen	Z	U	L
-2	57.28739	2.032349	61.10338	53.4713897
-1	41.35053	2.475706	47.29558	35.4054874
1	23.15365	3.379517	37.83194	8.47534874
2	19.26185	3.755446	40.63849	-2.1147912
4	21.83293	3.851642	45.36807	-1.7022025
5	26.771	3.842007	50.08047	3.46153149
6	43.21216	3.653202	62.51118	23.9131354
7	57.63736	3.169276	69.53248	45.7422359

表 4.9: 模擬數據三

利用圖 4.3 描述數據三之 x 與反應變數關係：

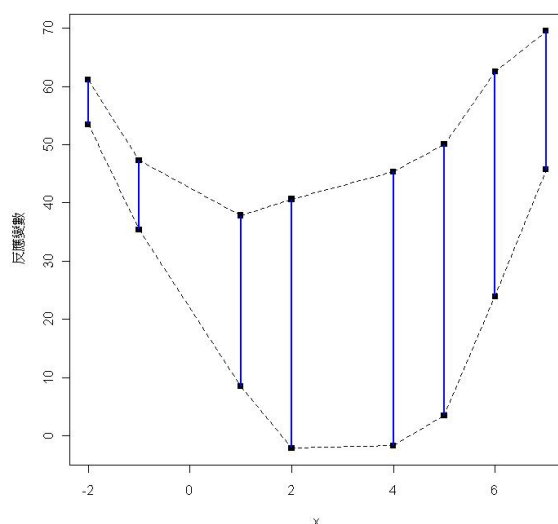


圖 4.1: 模擬數據三

同樣地，我們使用不同的權重 $\lambda = 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 20, 50, 100$ 於保守型與開放型區間距離函數中，並在第二種區間模型下配適數據三，其得到的配適區間列於表 4.10 與表 4.11。

以表 4.10 為例， $\lambda = 1$ 與設定 $x = -2$ 其配適區間長度為 6.227，而 $\lambda = 100$ 與設定 $x = -2$ 其配適區間長度為 0.08，故前者較為保守。若接著算出其他配適區間長度，可發現權重 λ 越大，配適區間趨於保守。相同的，開放型區間距離函數下，其配適區間隨著 λ 越大趨於開放。故對於不同的區間距離函數下，其配適區間仍保持該有的保守或開放性質。

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	U	OLS.U
-2	61.999	56.850	59.750	63.073	54.854	58.051	55.416	57.894	61.103	61.029
-1	49.719	44.525	47.236	49.432	43.941	45.235	37.469	40.893	47.296	48.318
1	39.491	35.760	37.388	36.377	40.162	35.382	14.843	23.320	37.832	37.821
2	40.105	37.770	38.523	35.905	43.794	36.980	10.227	24.880	40.638	38.573
4	47.301	47.026	46.312	43.146	46.139	45.713	15.193	40.121	45.368	46.238
5	52.764	52.627	51.614	49.882	46.469	51.146	24.615	46.104	50.080	51.940
6	60.034	59.763	58.625	58.879	51.100	58.208	38.640	52.263	62.511	59.503
7	70.252	70.088	68.769	70.840	61.928	68.577	57.269	63.361	69.532	70.151

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	L	OLS.L
-2	54.502	51.350	53.523	55.100	52.287	53.809	55.240	57.814	53.471	54.008
-1	36.159	33.291	35.155	36.000	36.134	36.101	36.793	40.363	35.405	35.316
1	7.922	4.701	6.384	7.697	7.064	8.146	14.249	14.961	8.475	6.513
2	-0.536	-4.281	-2.487	-0.447	-2.352	-0.736	10.091	4.879	-2.115	-2.137
4	-0.640	-4.069	-2.602	-0.791	5.018	-0.795	15.193	-1.475	-1.702	-2.092
5	8.833	6.770	7.506	7.984	20.186	9.731	24.615	9.951	3.462	7.814
6	24.092	23.878	23.620	22.541	38.147	26.374	38.640	29.844	23.913	23.694
7	43.995	45.601	44.318	42.176	57.005	47.457	57.269	53.442	45.742	44.323

表 4.10: 數據三, 保守型權重區間距離函數與第二種區間模型之配適區間

x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	U	OLS.U
-2	60.005	60.531	60.602	57.859	63.077	62.184	60.494	62.779	61.103	61.029
-1	47.600	46.906	48.015	49.172	51.531	48.742	48.111	52.344	47.296	48.318
1	38.023	35.468	38.622	48.228	42.484	39.688	42.093	45.565	37.832	37.821
2	39.401	36.249	40.271	53.789	42.939	41.395	45.923	47.219	40.638	38.573
4	47.917	45.009	48.521	62.032	48.153	48.889	54.680	54.034	45.368	46.238
5	53.541	51.706	53.418	62.107	52.466	54.023	57.680	58.163	50.080	51.940
6	60.708	60.496	59.745	62.315	59.011	61.798	62.030	63.666	62.511	59.503
7	70.803	72.580	69.206	66.034	69.104	74.132	70.548	71.965	69.532	70.151
x	$\lambda=0.1$	$\lambda=0.5$	$\lambda=1$	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=20$	$\lambda=50$	$\lambda=100$	L	OLS.L
-2	53.773	53.672	55.311	53.862	51.690	51.736	54.429	51.632	53.471	54.008
-1	35.529	34.168	37.068	38.960	32.120	29.311	34.536	32.898	35.405	35.316
1	6.893	4.563	7.780	10.378	2.191	-5.686	0.364	3.048	8.475	6.513
2	-2.050	-4.132	-1.721	-1.119	-6.123	-15.578	-11.378	-6.065	-2.115	-2.137
4	-2.608	-3.504	-2.698	-3.586	-3.799	-11.756	-11.597	-6.087	-1.702	-2.092
5	7.289	7.101	7.531	8.054	7.285	2.611	1.853	4.035	3.462	7.814
6	23.339	24.018	23.989	25.443	23.889	23.563	22.075	20.020	23.913	23.694
7	44.156	46.046	44.972	45.206	44.698	49.186	46.250	40.446	45.742	44.323

表 4.11: 數據三, 開放型權重區間距離函數與第二種區間模型之配適區間

4.3 第一型態配適值與第二型態配適值性質比較

回顧3.1節 (3.3) 式廣義風險函數為:

$$R(\beta, \hat{\beta}) = E_{I_{rep}|I_{obs}} \left(D(I_{rep}|I_{obs}, \hat{I}) \right)$$

其中 \hat{I} 分成兩種配適型態。在第一種區間模型下, \hat{I} 為:

- 第一種配適型態 $\hat{I} = (X_2(C_2 L_{rep|obs} + d_2), X_1(C_1 U_{rep|obs} + d_1))$
- 第二種配適型態 $\hat{I} = (X_2(C_2 L_{obs} + d_2), X_1(C_1 U_{obs} + d_1))$

在第二種區間模型下, \hat{I} 為:

- 第一種配適型態

$$\hat{I} = (X_1(C_1 Cen_{rep|obs} + d_1) - e^{X_2(C_2 Z_{rep|obs} + d_2)}, X_1(C_1 Cen_{rep|obs} + d_1) + e^{X_2(C_2 Z_{rep|obs} + d_2)})$$

- 第二種配適型態

$$\hat{I} = (X_1(C_1 Cen_{obs} + d_1) - e^{X_2(C_2 Z_{obs} + d_2)}, X_1(C_1 Cen_{obs} + d_1) + e^{X_2(C_2 Z_{obs} + d_2)})$$

我們曾於3.1節中提及這兩種配適型態的差別。本節主要利用模擬數據三來印證這兩種配適型態所造成的影響。

我們先使用保守型區間距離函數在權重 $\lambda = 50$ 下與第二種區間模型一起來配適數據三, 得到第一種配適型態的配適區間如圖4.2所示, 而第二種配適型態的配適區間則如圖4.3所示, 其中兩虛線中間為觀測區間帶, 而實線為配適區間。比較圖4.2及圖4.3可發現, 第一種配適型態, 其配適區間較第二種配適型態更為保守。

同樣地, 開放型區間距離函數在權重 $\lambda = 50$ 下與第二種區間模型一起來配適數據三, 得到第一種配適型態的配適區間如圖4.4所示, 而第二種配適型態的配適區間如圖4.5所示。比較圖4.4及圖4.5可發現, 第一種配適型態, 其配適區間較第二種配適型態更為開放。綜合以上兩種情況, 印證了第二種配適型態, 會較為貼近觀測區間。

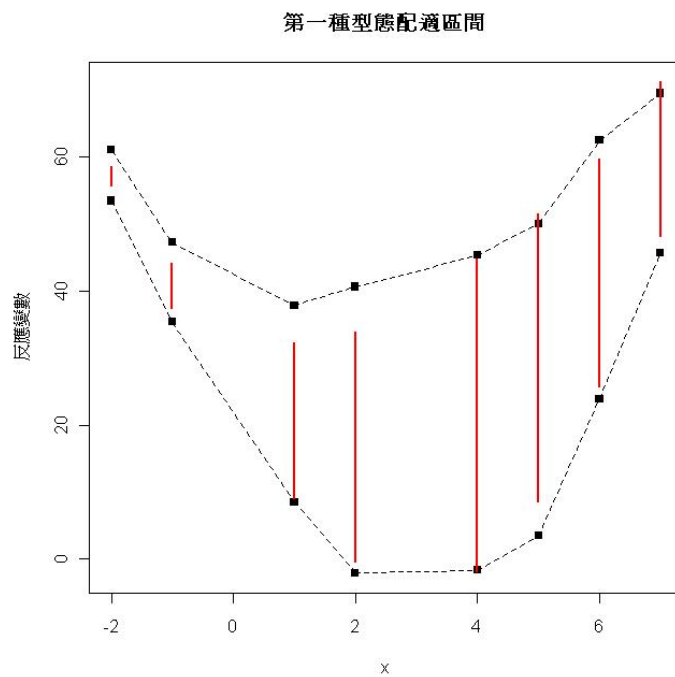


圖 4.2: 數據三, 第一種型態配適, 保守型配適區間

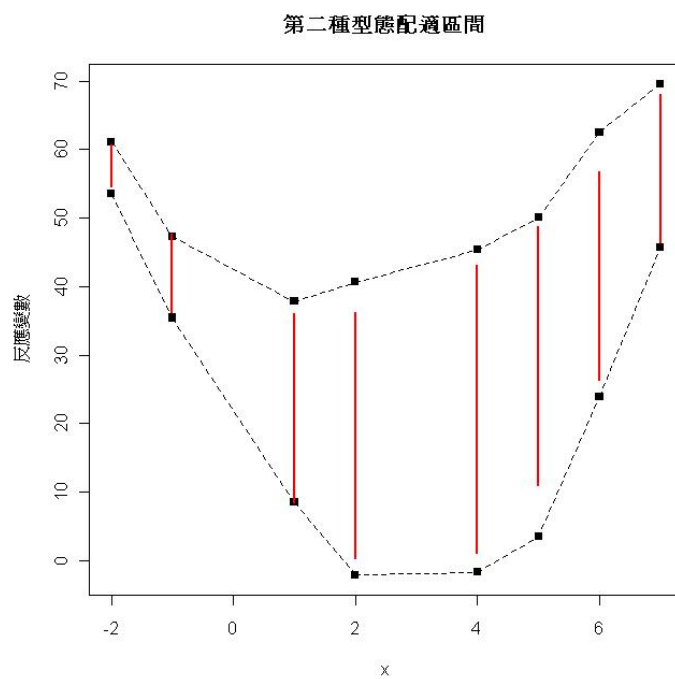


圖 4.3: 數據三, 第二種配適型態, 保守型配適區間

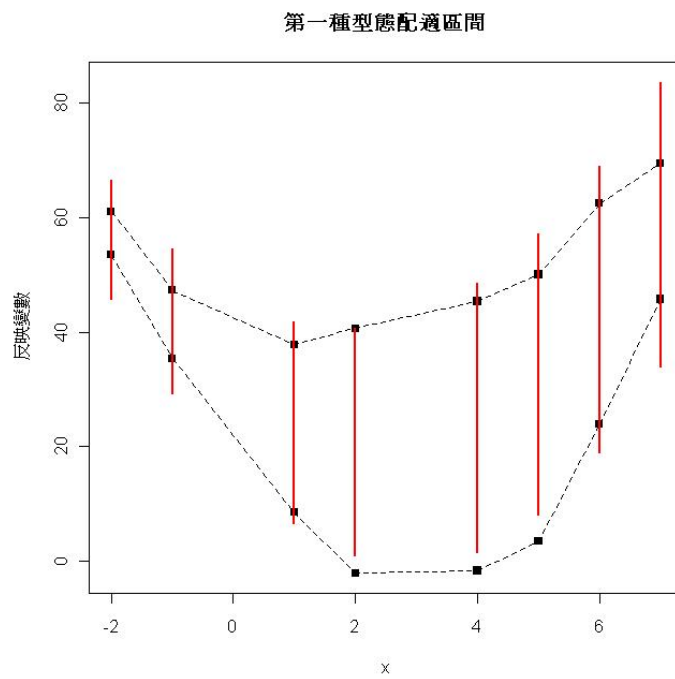


圖 4.4: 數據三, 第一種配適型態, 開放型配適區間

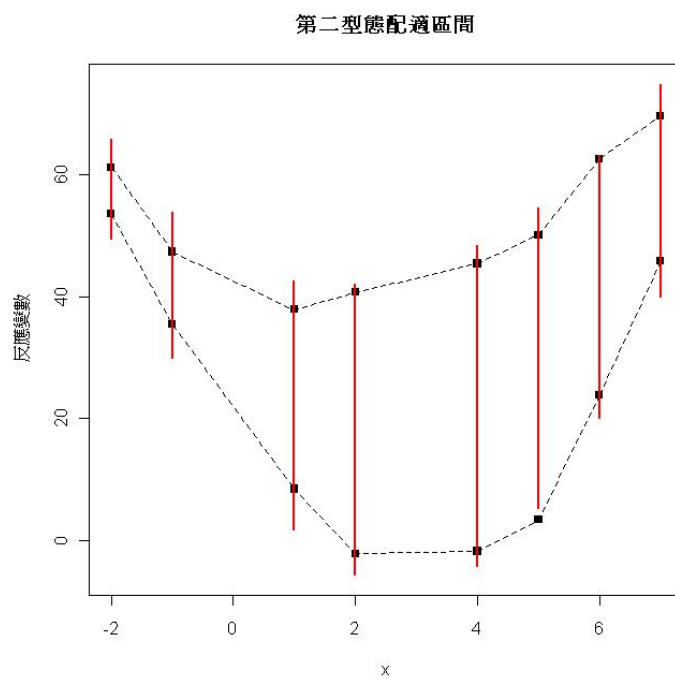


圖 4.5: 數據三, 第二種配適型態, 開放型配適區間

4.4 參數估計量之標準差與標準誤計算

本節主要應用 3.5 節的方法，以數值方法計算參數估計量的標準差與標準誤，並且與最小平方方法之標準差及標準誤比較。

在此我們以數據一當做分析數據。因計算標準差需要參數已知的真實模型，故直接由真實模型生成 M 組數據，並且計算參數估計量之標準差。計算標準誤需配適區間模型之後，再利用電腦重抽殘差得到 M 筆拔靴數據，並且計算參數估計量之標準誤。在此我們使用 $M = 380$ 。

在保守型區間距離函數與第一種區間模型下的配適模型，其參數估計量的標準差與標準誤分別以 CD2E.sd 與 CD2E.se 標示。利用最小平方估計量之公式計算之標準差與標準誤，則分別以 OLSE.sd 與 OLSE.se 標示。此兩種區間模型配適方法套用於數據一上，所得到的參數估計量標準差與標準誤列於表 4.12。

估計參數	OLSE.sd	OLSE.se	CD2E.sd	CD2E.se
β_{U0}	0.630248	0.71443	0.623533	0.619832
β_{U1}	0.083478	0.09463	0.081582	0.083494
β_{L0}	0.630248	0.66016	0.584047	0.570772
β_{L1}	0.083478	0.08744	0.080073	0.072394

表 4.12: 數據一, 參數估計量之標準差與標準誤

由上表發現 OLSE.sd 與 CD2E.sd 的差異並不大，故兩種參數估計量有差不多的穩定程度。標準誤主要為估計標準差，發現 CD2E.se 較 OLSE.se 精準。

接著我們再找一個例子。比較下述第二種區間模型配適方法之標準差大小。令區間模型為：

$$\begin{cases} cen = 30 - 10x + \varepsilon_1 \\ z = 3 - 0.2x + \varepsilon_2 \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_1 \sim N(0, 2^2)$, $\varepsilon_2 \sim N(0, 0.1^2)$, 且 $x = -2, -1, 1, 2, 4, 5, 6, 7$ 。

利用上述模型生成仿隨機區間 $M=500$ 組。在保守型區間距離函數與第二種區間模型下的配適模型, 其參數估計量標準差, 以 CD2E2.sd 標示。由 500 組仿隨機區間, 可得 500 筆最小平方估計量, 進而計算其標準差, 以 SOLS.sd 標示。由真實的 σ_1^2 與 σ_2^2 , 代入最小平方估計量之標準差公式, 所得以 OLS.sd 標示。計算上述三種標準差後, 得到的數據如下表:

參數	OLS.sd	SOLS.sd	CD2E2.sd
β_{Cen_0}	0.9490323	0.9737455	0.9754093
β_{Cen_1}	0.2301741	0.2229176	0.2242048
β_{Len_0}	0.0474516	0.0488505	0.0499331
β_{Len_1}	0.0115087	0.0120467	0.0170915

表 4.13: 模型四, 參數估計量之標準差

由上表可發現 OLS.sd 與 SOLS.sd 及 CD2E2.sd 有些微偏差, 因數據生成 500 筆的資料量略為不足, 使利用大數法則趨近真實參數會有所偏誤, 但差異並不大。而我們比較 SOLS.sd 與 CD2E2.sd 的大小, 發現他們之間差異亦不大, 故此兩種參數估計量, 有差不多的穩定程度。

第 5 章

實例分析

本章將前面所發展的區間反應變數分析方法應用到Li et al. (2001)論文中的焊接實驗。此焊接實驗的過程中，可觀測到不同設定底下，能產生良好焊接之電流上限與電流下限。為了找尋良好焊接之實驗區間，便需把電流上下設限為區間反應變數，而其他變數視為一般解釋變數，以得到良好焊接之區間對解釋變數的配適模型。

此焊接實驗中的實驗因子為： Ft 、 Ax 、 An 、 Ed 、 F 、 T 、 I ，前三者為2水準因子，故各有一個線性效應 (linear effect)，以因子名稱 Ft 、 Ax 、 An 標示，而後三者為3水準因子，故各有一個線性效應以 Ed_l 、 F_l 、 T_l 表示，而二次效應 (quadratic effect) 以 Ed_q 、 F_q 、 T_q 標示。數據看成以良好電流區間(I_{\min} , I_{\max})為反應變數之部份因子設計數據。區間中心為 I_{center} 且半區間長度取自然對數 (natural log) 為 I_z ，如此Li et al. (2001)焊接實驗之數據如表5.1。

當考慮所有的主效應及二階交互作用項時，因效應個數比資料個數多，導致模型矩陣 (model matrix) 會有行多於列的情況，最小平方方法會因自由度不夠而無法執行。除此之外，還有模型過度配適問題，故模型配適之前需先篩選效應。

不論第一種區間模型或第二種區間模型，皆把區間特徵分成兩個單一反應變數模型，故我們先各別對其中一個單一反應變數模型作效應篩選後，再由不同的區間距離函數作模型配適。

Run	Ft	Ax	An	Ed	F	T	I_{\min}	I_{\max}	I_{center}	I_z
1	0	0	0	6.35	3.3	12	10.56	12.44	11.5	-0.06188
2	5	0	10	6.35	4.2	8	11.25	13.25	12.25	0
3	0	0	10	6.35	4.2	16	10.4	12.5	11.45	0.04879
4	0	0	10	7.87	2.4	8	18.26	22.41	20.335	0.729961
5	5	0	10	7.87	2.4	12	16	17.1	16.55	-0.59784
6	0	0	0	7.87	4.2	16	16.4	19	17.7	0.262364
7	0	0	0	4.5	2.4	8	8.51	10.16	9.335	-0.19237
8	0	0	10	4.5	3.3	12	8.47	9.83	9.15	-0.38566
9	5	0	10	4.5	3.3	16	7.85	9.75	8.8	-0.05129
10	5	1.5	0	6.35	4.2	12	11.42	13.48	12.45	0.029559
11	5	1.5	10	6.35	3.3	8	11.4	12.6	12	-0.51083
12	0	1.5	0	6.35	2.4	8	11.5	13.5	12.5	0
13	5	1.5	10	4.5	2.4	16	7.1	8.5	7.8	-0.35667
14	0	1.5	0	4.5	4.2	16	8.85	11.25	10.05	0.182322
15	5	1.5	0	4.5	3.3	8	9.5	11.1	10.3	-0.22314
16	0	1.5	0	7.87	3.3	12	15.67	17.87	16.77	0.09531
17	5	1.5	10	7.87	4.2	12	16.16	17.61	16.885	-0.32158
18	5	1.5	0	7.87	2.4	16	14.25	15.75	15	-0.28768

表 5.1: 焊接實驗數據

我們根據Wu and Hamada (2009)第9.4節中的方法來, 篩選重要的效應。對第二種區間模型所挑選的重要效應如下:

反應變數	挑選效應
Cen	$Ed_l, Ed_q, Ed_l \times Ft, Ed_l \times An, Ed_l \times Tq$
Z	$Ax, An, Ed_l, T_l, T_q, Ed_l \times T_l$

表 5.2: 第二種區間模型之選取變數

若將最小平方法用於區間中心模型與 Z 模型上, 其參數估計量分別以 OLS.Cen 與 OLS.Z 標示。在使用保守型區間距離函數與第二種區間模型來配適時, 其參數估計量以 CD2.Cen 與 CD2.Z 標示。在使用開放型區間距離函數與第二種區間模型來配適時, 其參數估計量以 OD2.Cen 與 OD2.Z 標示。對這筆焊接實驗數

據, 我們得到上述三種方法之參數估計量如下表:

β_{Cen}	OLS.Cen	CD2.Cen	OD2.Cen
β_0	13.0032	12.9890	12.9892
β_{Edl}	3.9838	3.9813	3.9869
β_{Edq}	0.4891	0.4813	0.4844
$\beta_{Edl \times Ft}$	-0.8023	-0.7816	-0.7785
$\beta_{Edl \times An}$	1.2231	1.2071	1.2096
$\beta_{Edl \times Tq}$	0.53897	0.5386	0.5422
β_Z	OLS.Z	CD2.Z	OD2.Z
β_0	-0.0966	-0.1133	-0.0139
β_{Ax}	-0.1455	-0.1654	-0.1427
β_{An}	-0.2294	-0.2435	-0.2186
β_{Edl}	0.1829	0.2493	0.2240
β_{Tl}	-0.0589	-0.0683	-0.0639
β_{Tq}	0.0977	0.1254	0.1138
$\beta_{Edl \times Tl}$	-0.3506	-0.4085	-0.3747

表 5.3: 第二種區間距離函數與第二種區間模型之參數估計量

我們可發現在區間中心模型中, 三種方法之參數估計值極為相似, 由於區間中心代表了區間的定位點, 故通常較為穩定。而有關於區間長度模型, 三種方法之參數估計值差異較為明顯, 因保守型配適區間長度較短, 而開放型配適區間長度較長, 故參數估計量會有所不同。

接著計算其配適區間上界與下界於表 5.4。相對於最小平方法之配適區間, 開放性質有突顯出來, 但保守性質較不明顯。故本文之方法確實可執行於實際資料上並且可得到滿足保守或開放性質之區間模型配適。

設定	OLS.U	CD2.U	OD2.U	OLS.L	CD2.L	OD2.L
1	13.111	13.072	13.148	10.939	10.981	10.893
2	13.001	13.029	13.112	11.049	11.024	10.928
3	12.893	12.901	12.981	11.157	11.152	11.059
4	21.705	21.914	21.978	18.375	18.044	18.004
5	17.644	17.625	17.718	15.995	15.975	15.896
6	18.755	18.778	18.851	16.433	16.351	16.292
7	10.297	10.221	10.305	8.484	8.531	8.446
8	9.133	9.078	9.165	7.989	8.077	8.001
9	9.575	9.550	9.631	7.522	7.500	7.396
10	12.920	12.878	12.970	11.130	11.175	11.071
11	12.755	12.746	12.841	11.295	11.306	11.200
12	13.180	13.198	13.291	10.870	10.855	10.749
13	9.316	9.261	9.353	7.782	7.788	7.674
14	10.604	10.574	10.676	8.177	8.178	8.075
15	11.672	11.546	11.631	10.318	10.332	10.234
16	16.953	16.913	17.005	15.002	14.985	14.885
17	17.436	17.392	17.492	16.203	16.208	16.123
18	16.858	16.873	16.977	15.122	15.130	15.053

表 5.4: 第二種區間距離函數與第二種區間模型之配適區間

因真實模型未知，而只有觀測數據可使用，故我們只能計算上述三種方法其標準誤，並且由標準誤提供參數估計量穩定程度的訊息。回顧第3.4節計算標準誤方法，我們重抽殘差產生拔靴樣本數為 $M=100$ 組。最小平方估計量之標準誤公式計算以 OLS.se 標示。在使用保守型區間距離函數與第二種區間模型來配適時，其參數估計量之標準誤以 CD2.se 標示。在使用開放型區間距離函數與第二種區間模型來配適時，其參數估計量之標準誤以 OD2.se 標示。與保守型區間距離函數用相同拔靴樣本計算最小平方估計量，進而得到標準誤，以 CSOLS.se 標示。與開放型區間距離函數用相同拔靴樣本計算最小平方估計量，進而得到標準誤，以 OS-OLS.se 標示。此五種參數估計量之標準誤列於表5.5。比較 OLS.se 與 CSOLS.se 或 OSOLS.se 發現有些許的差異。我們比較 CSOLS.se 與 CD2.se，並且比較 OS-OLS.se 與 OD2.se，發現標準誤皆差異很小，故可推測三種方法參數估計量有差不多的穩定程度。

β_{Cen}	OLS.se	CSOLS.se	CD2.se	OSOLS.se	OD2.se
β_0	0.15628	0.12265	0.12433	0.12675	0.12615
β_{Edl}	0.18139	0.14528	0.14453	0.15766	0.15258
β_{Edq}	0.10765	0.09229	0.09269	0.07598	0.07664
$\beta_{Edl \times Ft}$	0.19443	0.15122	0.15383	0.15217	0.15318
$\beta_{Edl \times An}$	0.21001	0.18763	0.19141	0.18823	0.19166
$\beta_{Edl \times Tq}$	0.14967	0.13215	0.13347	0.10358	0.10294

β_Z	OLS.se	CSOLS.se	CD2.se	OSOLS.se	OD2.se
β_0	0.05208	0.04122	0.04020	0.03849	0.03660
β_{Ax}	0.05659	0.04313	0.04624	0.04272	0.04177
β_{An}	0.06641	0.05015	0.05462	0.05235	0.04790
β_{Edl}	0.06898	0.05505	0.06537	0.05006	0.05619
β_{Tl}	0.06586	0.05008	0.05475	0.04548	0.04690
β_{Tq}	0.03858	0.02921	0.03488	0.03445	0.03663
$\beta_{Edl \times Tl}$	0.09830	0.07760	0.09100	0.08166	0.07922

表 5.5: 第二種區間距離函數與第二種區間模型之參數估計量標準誤

接著我們用權重 $\lambda = 50$ 於保守型區間距離函數，並配合第二種區間模型來配適，其參數估計量以 CWD2.Cen 與 CWD2.Z 表示。相同的，我們用權重 $\lambda = 50$ 於開放型區間距離函數，並配合第二種區間模型來配適，其參數估計量以 OWD2.Cen 與 OWD2.Z 表示。計算結果如表 5.6。三種方法的區間中心模型，其參數估計量相近，但關於區間長度模型，其參數估計量有更明顯的差異，因 λ 較高使得保守型配適區間區間長度更短，且開放型配適區間長度更長，故三者參數估計量有所差異。

β_{Cen}	OLS.Cen	CWD2.Cen	OWD2.Cen
β_0	13.003	12.962	12.971
β_{Edl}	3.9838	3.9632	3.9228
β_{Edq}	0.4891	0.4759	0.4853
$\beta_{Edl \times Ft}$	-0.802	-0.754	-0.780
$\beta_{Edl \times An}$	1.2231	1.1801	1.2565
$\beta_{Edl \times Tq}$	0.5389	0.5252	0.5385

β_Z	OLS.Z	CWD2.Z	OWD2.Z
β_0	-0.097	-0.278	0.7170
β_{Ax}	-0.146	-0.064	-0.037
β_{An}	-0.229	-0.073	-0.078
β_{Edl}	0.1829	0.1145	0.0865
β_{Tl}	-0.059	-0.063	-0.046
β_{Tq}	0.0977	0.0680	0.0446
$\beta_{Edl \times Tl}$	-0.351	-0.165	-0.141

表 5.6: 第二種權重區間距離函數與第二種區間模型之參數估計量

接著計算此三種方法之配適區間, 以圖 5.1 與圖 5.2 表示, 其中虛線代表觀測區間, 而實線代表配適區間。觀察圖 5.1 及圖 5.2 可發現, 實例數據依然表現出配適區間應有之開放與保守性質。因為此焊接實驗之配適區間不希望包含良好焊接實驗區間以外的情況, 故保守型區間距離函數較符合此焊接實驗之需求。

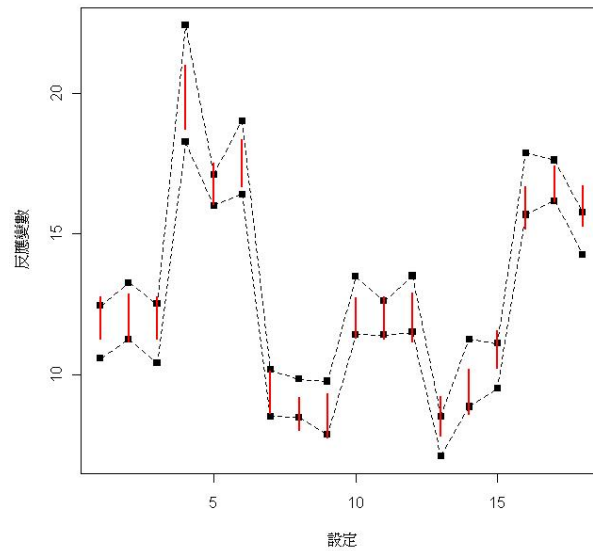


圖 5.1: 保守型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第二種區間模型之配適區間

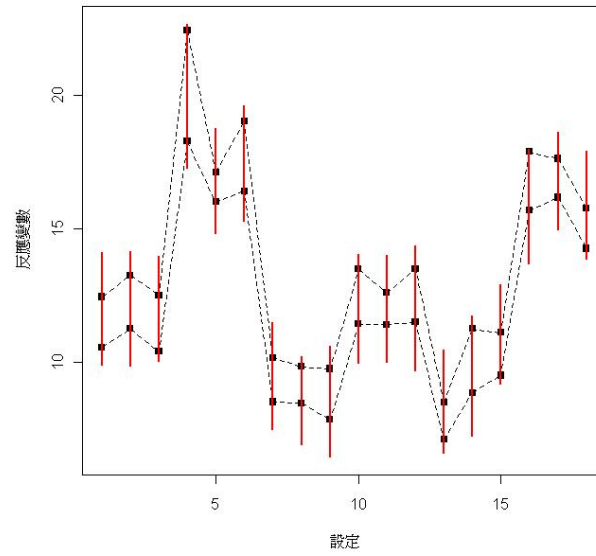


圖 5.2: 開放型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第二種區間模型之配適區間

我們亦將上述相同的資料分析流程應用於第一種區間模型上。第一種區間模型所挑選的重要效應如下：

反應變數	挑選效應
U	$Ed_l, Ed_q, Ed_l \times Ft, Ed_l \times An, Ed_l \times Tq$
L	$Ed_l, Ed_q, T_l, F_l, F_l \times An$

表 5.7: 第一種區間模型之選取變數

在第二種區間距離函數配合第一種區間模型來配適，其參數估計值如下表5.8。由該表我們發現三種方法所得之參數估計量皆有差異，且比表5.3區間中心模型嚴重，主要是區間長度變異影響了區間上界與區間下界。

β_U	OLS.U	CD2.U	OD2.U	β_L	OLS.L	CD2.L	OD2.L
β_0	14.018	13.940	14.143	β_0	11.864	11.900	11.751
β_{Edl}	4.0958	4.0915	4.0836	β_{Edl}	3.8717	3.8561	3.8551
β_{Edq}	0.5280	0.5333	0.5029	β_{Edq}	0.5375	0.5337	0.5439
$\beta_{Edl \times Ft}$	-1.061	-1.053	-1.040	β_{Tl}	0.4118	0.4101	0.4034
$\beta_{Edl \times An}$	1.4491	1.4275	1.3872	β_{Fl}	-0.952	-0.931	-0.929
$\beta_{Edl \times Tq}$	0.7028	0.6871	0.6685	$\beta_{Fl \times An}$	-0.466	-0.456	-0.446

表 5.8: 第二種區間距離函數與第一種區間模型之參數估計量

由表 5.8 中的配適模型得到的配適區間如下表 5.9, 在該表中我們可注意到由區間距離函數所造成的保守與開放性質仍然在配適區間中保留著。

設定	OLS.U	CD2.U	OD2.U	OLS.L	CD2.L	OD2.L
1	12.962	12.873	13.137	10.789	10.832	10.664
2	12.962	12.873	13.137	11.687	11.717	11.550
3	12.962	12.873	13.137	9.7820	9.8560	9.6920
4	21.854	21.732	21.825	17.280	17.266	17.122
5	17.624	17.565	17.739	16.327	16.335	16.193
6	18.956	18.877	19.050	16.199	16.225	16.071
7	10.135	10.069	10.241	8.6040	8.6420	8.5200
8	9.3460	9.2760	9.4720	8.5300	8.5770	8.4400
9	9.3580	9.3200	9.5460	7.5770	7.6470	7.5110
10	12.962	12.873	13.137	11.667	11.698	11.513
11	12.962	12.873	13.137	11.741	11.763	11.593
12	12.962	12.873	13.137	10.863	10.897	10.743
13	9.3580	9.3200	9.5460	7.6320	7.6930	7.5540
14	10.135	10.069	10.241	8.4550	8.5130	8.3600
15	12.257	12.175	12.320	9.4820	9.5080	9.3690
16	16.847	16.816	17.045	16.273	16.289	16.150
17	17.624	17.565	17.739	16.219	16.243	16.108
18	16.835	16.771	16.970	14.443	14.493	14.372

表 5.9: 第二種區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

同樣地, 抽取 $M=100$ 筆拔靴樣本, 我們計算上述三種方法其參數估計量之標準誤列於表 5.10。不同於表 5.5 的情況, 這三種方法各自在不同的效應上表現良好。故在參數估計量穩定程度的表現上, 沒有哪個方法有特別突出的表現。

後續也用權重 $\lambda = 50$ 的保守型與開放型區間距離函數與第一種區間模型來配適數據, 所得到的三種參數估計量列於表 5.11。因配適區間長度差異影響了區間上界與區間下界, 故參數估計量有所差異。接著計算配適區間, 並以圖 5.3 與圖 5.4 表示, 發現保守與開放性質同樣在第一種區間模型中表現出來。

β_U	OLS.se	CSOLS.se	CD2.se	OSOLS.se	OD2.se
β_0	0.20016	0.13979	0.15396	0.14943	0.14670
β_{Edl}	0.23231	0.18662	0.17890	0.18176	0.17723
β_{Edq}	0.13788	0.11175	0.11245	0.11445	0.11322
$\beta_{Edl \times Ft}$	0.24901	0.23004	0.22644	0.19573	0.19519
$\beta_{Edl \times An}$	0.26896	0.22846	0.20790	0.24197	0.23476
$\beta_{Edl \times Tq}$	0.19169	0.14517	0.12994	0.15244	0.15145

β_L	OLS.se	CSOLS.se	CD2.se	OSOLS.se	OD2.se
β_0	0.12259	0.10448	0.09835	0.08897	0.09329
β_{Edl}	0.15014	0.14143	0.14225	0.11223	0.11156
β_{Edq}	0.10090	0.07918	0.07676	0.07563	0.07425
β_{Tl}	0.16841	0.12413	0.12171	0.12137	0.12239
β_{Fl}	0.17055	0.14968	0.14604	0.12252	0.12317
$\beta_{Fl \times An}$	0.15954	0.13287	0.13122	0.11483	0.11519

表 5.10: 第二種區間距離函數與第一種區間模型之參數估計量標準誤

β_U	OLS.U	CWD2.U	CWD2.U
β_0	14.018	13.534	14.841
β_{Edl}	4.0958	4.0631	4.1291
β_{Edq}	0.5280	0.5216	0.4670
$\beta_{Edl \times Ft}$	-1.061	-0.930	-1.016
$\beta_{Edl \times An}$	1.4491	1.2729	1.3406
$\beta_{Edl \times Tq}$	0.7028	0.6208	0.5867
β_L	OLS.L	CWD2.L	CWD2.L
β_0	11.864	12.217	11.160
β_{Edl}	3.8717	3.8887	3.8031
β_{Edq}	0.5375	0.5208	0.5235
β_{Tl}	0.4118	0.4115	0.4080
β_{Fl}	-0.952	-0.957	-0.861
$\beta_{Fl \times An}$	-0.466	-0.493	-0.433

表 5.11: 第二種權重區間距離函數與第一種區間模型之參數估計量

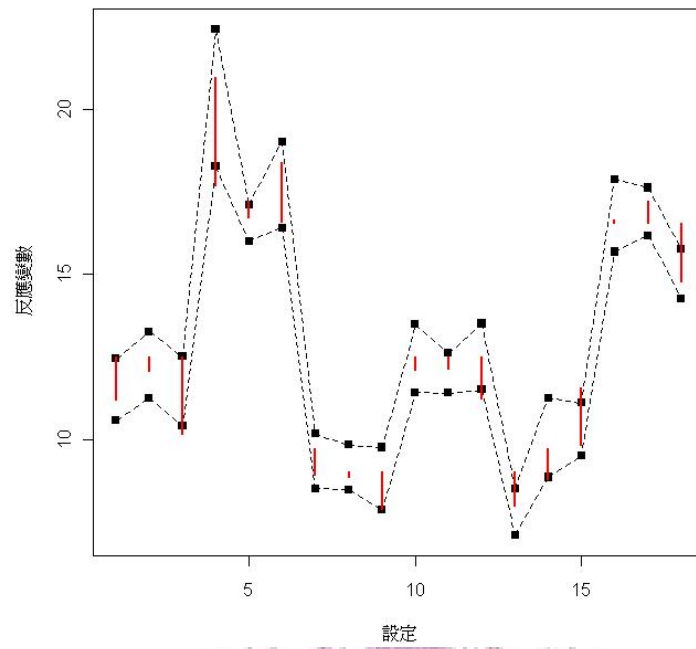


圖 5.3: 保守型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

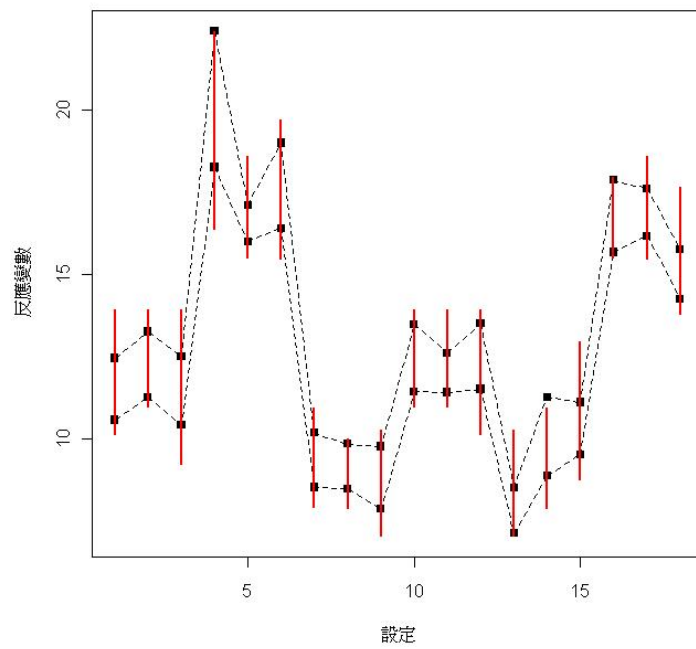


圖 5.4: 開放型權重 $\lambda = 50$ 區間距離函數與第一種區間模型之配適區間

第 6 章

結論

決策理論可提供一個在不同的距離定義下，估計和預測的理論架構，這使得區間反應變數模型之參數能夠在不同區間距離函數下估計出來，並且得到不同性質的配適區間。第一種區間距離函數配合第一種區間模型時，我們導出最小平方估計量為最佳的估計式。而改用第二種區間距離函數時，風險函數較為複雜，便須利用數值方法求得參數估計式。我們並發展出開放型與保守型配適區間來提供使用者對選擇。

在本文中，利用數值計算得到參數估計量的標準差與標準誤部份，可觀察這些參數估計量的穩定性。我們發現本文中的多種參數估計量在標準差與標準誤上的表現與最小平方方法差不多，但前者較後者多了配適區間可為保守或開放的優勢。本文中的數值方法之計算所需時間較長，若能減少效應個數便可大幅降低計算時間。

參考文獻

- Chang, M.C. (2008), “Prediction and model selection for interval response”, Master’s thesis, Institute of Statistics, National Tsing Hua University.
- Gay, D. M. (1990), “Usage summary for selected optimization routines”, *Computing Science Technical Report*, (153).
- Gelfand, A.E. and Ghosh, S.K. (1998), “Model choice:a minimum poerior predictive loss approach”, *Biometrika*, 85, 1–11.
- Li, W., Cheng, S.W., Hu, S.J., and Shriver, J. (2001), “Statistical investigation on resistance spot welding quality using a two-stage,sliding-level experiment”, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 123, 513–520.
- Rao, C.R. and Toutenburg, H. (1995), *Linear Models: Least Squares and Alternatives*, Springer Series.
- Wu, C.F.J. (1986), “Jackknife,bootstrap and other resampling methods in regression analysis”, *The Annals of Statistics*, 14(4), 1261–1295.
- Wu, C.F.J. and Hamada, M. (2009), *Experiments:Planning,Analysis,and Parameter Design Optimization*, second edition, Wiley Series.