高等微積分大要

李丞恩

***Abstract*—**本文是高等微積分（又名分析導論）的簡介。本文中我將用淺顯易懂的文字說明高等微積分涵蓋的範圍。其目的在於提供同學關於此科目的全局觀，進而使正式學習時能掌握較清楚的脈絡與概念。本文是依據清大高淑蓉教授的開放式課程《高等微積分一》與《高等微積分二》爲大綱，加上自己之前修課的經驗和參考幾本教科書後撰寫而成。

***Index Terms*—**高等微積分、點集拓撲、連續映射、函數空間、可微映射、積分

I. 前言

高等微積分是數學系學生的重要課程之一，其目的是在更嚴謹的數學框架內深入探討微積分的理論和應用。這門課程通常涵蓋五大主題：點集拓撲、連續映射、函數空間、可微映射及$\mathbb{R}^n$上的積分。

- 點集拓撲：在集合中定義出「距離」以研究其中元素之間的關係，這是理解後續主題的基礎。
- 連續映射：藉由在度規空間上定義出極限，將微積分中連續函數的概念擴張到任意度規空間。
- 函數空間：利用點集拓撲以及連續映射的知識，研究函數所組成的空間中，尤其側重函數所形成的列(sequence)。在純數理論和應用領域中，函數列和函數級數的行爲都有重要意義。
- 可微映射：高等微積分只研究歐式空間中映射的微分，通常以導出反函數定理與隱函數定理爲目標。
- $\mathbb{R}^n$上的積分：定義歐式空間中的黎曼積分與瑕積分。初等微積分雖然介紹過$\mathbb{R}^2$與$\mathbb{R}^3$上的積分，但嚴格的論證必須到高微中使用勒貝格理論中的零測度集的概念才能完成。部份教科書會繼續深入探討勒貝格積分。

值得一提的是，高微裡有兩次線性代數將會與我們並肩作戰，一次是在研究內積空間以發展傅立葉級數的理論時，另一次是研究多變數函數的微分時。因此除了初等微積分，在修讀高等微積分之前也需要良好的線性代數基礎。

II. 點集拓撲

A. 點與集合的相對關係

高等微積分以兩元素的遠近關係研究集合，並以研究$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^m$的函數爲目標。然而在這過程中，我們希望盡可能將一些歐式空間中的觀念延伸到其他空間上，以利未來之學習。故首要之務就是定義集合中元素之間的距離。

Definition 1. *令M爲一集合，定義度規(metric)爲一函數$d : M \times M \to \mathbb{R}$滿足 (1) $d(x,y) \geqslant 0$*

(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(3) $d(x,y) = d(y,x)$

(4) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y), \forall x,y,z \in M$

一個配上度規的集合稱爲度規空間。以(M,d)表示之，通常簡記爲M。

由此觀之，度規爲對歐式空間中距離的模仿。因此可以說度規賦予了集合內的元素空間感。任何一個集合都可以造出度規，且度規並不唯一（想一想爲什麼？）

有了度規這個模仿距離的觀念後，就可以定義度規空間中一元素的「附近」是什麼。高微中第一個拓撲觀念「開集」(open sets)於焉登場。

Definition 2. *考慮一度規空間M。M上以x爲圓心，半徑爲r的圓盤的定義是$D(x,r) = \{y \in A | d(x,y) < r\}$。令$A$爲$M$的一個子集合，若$A$中每一個元素都存在一個圓盤$D(x,r)$使得$D(x,r) \subset A$，則稱$A$爲開集。*

而開集的補集被定義爲「閉集」(closed sets)。在歐式空間中，開集跟閉集最大的差異在於閉集包含自身的邊界(boundary, bd(A))。其實，對一元素取圓盤、取開集、取鄰域是等價的三件事情。

有了開集的觀念，就可以定義元素x的「附近」爲 x的臨域(neighborhood)，即包含x的一開集。如此一來，就可以探討元素在M中某子集A中的分布情形。

- 落在子集A的內部(interior, int(A))。
- 落在子集A的邊界bd(A)上。
- 落在A外，此時就沒有什麼好討論的了。

有了度規這個觀念，讓我們能認知某一元素x附近是否可以找到一子集A中的元素。這些「可以找到A中元素的地方」稱爲子集A的聚集點。(accumulation point)，這些聚集點所成的集合記爲A'。顯然只要x在A裡，那麼x的附近一定可以找到A中的元素，但也不能排除掉在A外的某些元素的附近也存在著A的元素。我們稱A與其聚點所成集合之聯集爲A的閉包(closure)，其意義爲M中包含A的最小閉集。

度規還使定義M中序列的收斂成爲可能。那麼一個序列什麼時候會收斂呢？在微積分中是指一個序列不斷接近某一個定點。在歐式空間裡，收斂的過程中前後兩項的距離會越來越近。那麼反過來說，前後兩項的距離越來越近的序列（此種序列稱爲柯西序列）必定會收斂嗎？在一般的度規空間中答案是否定的。我們稱能使柯西序列收斂的度規空間爲完備的(complete)空間。自此，空間的完備性與柯西序列的收斂性成爲高微中的兩把利劍，可以對我們新遇到的某些空間的性質進行初步探討。

B. 子集中元素的分布情形

如果Section II-A中的討論是描述子集A自身或A中元素的性質，那麼子集A與M除了包含的關係以外，是否能有更清晰的描述呢？或著說，子集A在M中是怎麼分布的？

或許我們可以先調查子集A的幅員大小。如果可以找到一個圓盤完全蓋住A，那麼A就不是無邊無際的，我們就說A有界(bounded)。再不濟，我們以有限多個圓盤蓋住A，那麼A的幅員也「不大」，此時稱A爲完全有界的(totally bounded)。這些集合在我們的認知中幅員會比較小。而更進一步，數學家以一個子集的緊緻性(compactness)是用來描述集合的幅員大小。緊緻性的定義比較不那麼直觀，高微中有兩種刻劃緊緻性的方式。

Definition 3. *(1) 以無限多個開集合覆蓋A，即A包含在這些的開集合的聯集之中。若我們發現能從這無限多個開集合抽出有限多個開集合同樣達成覆蓋A這件事情，我們就說A是緊緻的。*

(2) 若A中每一個序列(不在意收斂與否)都包含一個收斂的子序列，且此子序列收斂到A中的元素，則稱A爲一列緊緻集。

(1)的想法是說A的幅員比較小，那麼它應該可以少量的開集合覆蓋住。至於(2)可以從反面想像：若A的幅員較大，那麼可能選到的序列數量就增加了，是否就比較不容易找到A收斂的子序列了呢？對於緊緻性，有幾個重要的結果：

Theorem 4. *(Bolzano Weistrass Theorem)* 一個度規空間M中的子集A是緊緻的等價於它是列緊緻的。

Theorem 5. *(Heine-Borel Theorem)* $\mathbb{R}^n$中的子集A是緊緻的等價於它是一個有界的閉集。

Theorem 6. 一個度規空間M是緊緻的等價於它是完備且完全有界的。

Bolzano Weistrass Theorem闡明兩種定義緊致性的方式不僅等價，所刻劃的幅員大小也是相當的。Heine-Borel Theorem則是說明了歐式空間中緊緻集的充分必要條件。除此之外還有諸多定理，如：

- Nested Set Property: 在$\mathbb{R}^n$中必有一點包含於一系列互相包含之cell$I_1 \supseteq I_2 \supseteq ...$。
- Cantor intersection theorem: 在$\mathbb{R}^n$中必有一點包含於一系列互相包含之閉集$A_1 \supseteq A_2 \supseteq ...$。
- Lebesque covering theorem: 緊緻集中相異兩點x, y必可找到一開覆蓋中的開集包含x, y兩點。
- Nearest point theorem: 非空閉集A上必有一點y使得對A外一點x而言，

$$||z - x|| \geqslant ||y - x||, \forall z \in A$$

- Circumscribing contour theorem: $\mathbb{R}^2$上的有界閉集必可用有限個圓弧所包圍。

不過就我的經驗來說，在後面的課程比較有用的還是Bolzano Weistrass Theorem跟Theorem 6。

除了幅員的大小以外，我們也很在意A在M中是連成一片還是分成數片。如果A中任兩個元素都可以用一條路徑(嚴謹的定義是一個從$[a, b]$映射到M中的函數ϕ)連起來的話，我們就說它是路徑連通(path connected)的。反過來說，如果有兩個不相交的開集，其聯集竟然包含了A，那麼A鐵定不是連成一片的。我們就稱A是非連通集(disconnected set)，一個不是非連通集的集合就是連通集(connected set)。至於兩者之間有什麼關係呢？在一般的度規空間中，路徑連通集必定是連通集，但反之不必然，必須加上開集這個條件才成立。

最後，注意以下這個性質並不trivial！

Theorem 7. 區間$[a, b]$是$\mathbb{R}$上的連通集。

C. 補充

不同的課本可能會出現不同的集合。例如完美集、單連通空間等等。

我們也會在意子集的這些性質是否對集合間的運算(如交集、聯集、差集等，可能有限次也可能無限次)具有封閉性？對一子集取其一部分的操作(如子集、取內點、取閉包、取邊界點等)是否具有分配律？相關的證明都仰賴對於這些性質的基本定義的熟練操作。另一點要注意的是，這些關於子集A的性質都是相對於其所在空間M而言的。同樣的子集A在不同度規或不同的空間下其性質可能會改變！例如：

Example 8. 區間(a, b)在$\mathbb{R}$上是開集，但是在$\mathbb{R}^2$中是閉集。

III. 連續映射

度規空間的觀念使任何集合都能模仿歐式空間。因此，我們可以將連續函數的概念從歐式空間推廣到度規空間中。在本文中，函數與映射視爲同義詞。

A. 極限與連續

Definition 9. 令(M, d),(N, ρ)爲兩個度規空間，$f : A \subset M \to N$爲一函數，則：

(1) 令$x_0 \in A'$(如此一來才能讓A中的點靠近到x_0附近)，如果對每一個$\epsilon > 0$，都存在一個$\delta = \delta(x, \epsilon) > 0$使得對所有$A$中滿足$0 < d(x, x_0) < \delta$的元素$x$而言，都有$\rho(f(x), b) < \epsilon$，我們就稱$b$是$f$在$x_0$的極限。與微積分一樣，記爲

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b.$$

(2) 如果x_0在A中，且

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

則稱f在x_0連續。

(3) 對A中的非聚點(可能是孤立點)來說，爲了方便起見，我們定義f在這些點上連續，但一般也不會再對這些點進行與連續函數有關的探討。

現在我們有點集拓撲的概念，一些在微積分中對於$\mathbb{R}$上成立的性質就可以自然地推廣到度規空間中。比如我很喜歡的一個性質：

Theorem 10. 承*Definition 9*。如果M中一子集A裡的序列$\{x_k\}$收斂到一點x_0，則對A上的連續函數f來說，序列$\{f(x_k)\}$收斂到$\{f(x_0)\}$。反過來說，如果對任意收斂到x_0的序列$\{x_k\} \subset A$，函數f滿足$\{f(x_k)\}$收斂到$\{f(x_0)\}$，則f在A上連續

這個性質幫助我解出不少習題，因爲一些與連續函數有關的性質使用$\epsilon - \delta$不是那麼好證。反倒是想辨法造一些序列出來，利用序列的收斂性去引導函數的連續性。這是因爲在度規空間中，函數與序列會彼此導引對方的行爲。

Theorem 10也明示了連續的另一種定義方式。

Theorem 11. 對M上的連續函數f來說，以下三點等價：
(1) f在M上連續
(2) 對M中的開集U，$f^{-1}(U)$是開集
(3) 對M中的閉集V，$f^{-1}(V)$是閉集

又比如，我們可能曾經觀察到不同類型的區間在不同函數所成的像(image)，利用高微的語言可以自然地證明推廣後的結果：

Theorem 12. 承*Definition 9*。對M上的連續函數f來說，連續函數會把緊緻集K映射到N中的緊緻集$f(K)$；連通集也會被映射到連通集；路徑連通集也會被映射到路徑連通集。此外，若f是一對一*(1-1, injective)*函數，則f^{-1}也會是以$f(K)$爲定義域之連續函數，其值域爲K。

如果運用序列，可以用Bolzano Weistrass Theorem去證明第一個敘述。運用定義可以證明剩餘兩個敘述。如果我們修改敘述，將f改成在子集A上連續，其他諸集合視爲A的子集合，那麼這些敘述也會成立，只是要改用relative open/closed等觀念，在此不多加贅述。不過，Theorem 11(2)(3)與Theorem 12的逆敘述是不成立的，連續函數未必會把開集送到開集，N上的緊緻集拉回M也未必會是緊緻的。但無論如何，這些性質將成爲我們證明初等微積分中證不了的兩大定理——中間值定理與極值定理的基石。

B. 中間值定理與極值定理

微積分課程中爲什麼證明不了這兩個定理呢？這是因爲沒有實數完備性的觀念（但不排除課堂上或其他課程有教的可能），但更大的原因是因爲沒有點集拓撲的觀念。那麼這兩個定理爲什麼重要呢？因爲他們可以去導出均值定理和微積分基本定理，

Theorem 13. *(中間值定理)* 令(M,d)爲一度規空間，$f : A \subset (M,d) \to \mathbb{R}$爲一連續函數，若$x,y \in K$且$K \subset A$是一連通集，且實數$c$滿足$f(x) < c < f(y)$，則存在$z \in K$使得$f(z) = c$。

Theorem 14. *(極值定理)* 令(M,d)爲一度規空間，$f : A \subset (M,d) \to \mathbb{R}$爲一連續函數，若$K \subset A$是一緊緻集，則$f$在$K$上有界，且存在$x_1, x_2$使得$f(x_1) = \inf\{f(x)|x \in K\}$以及$f(x_2) = \sup\{f(x)|x \in K\}$

結合Heine-Borel Theorem，對$\mathbb{R}^n$上連通且有界的閉集合，中間值定理與極值定理都會成立。這意味著$\mathbb{R}^n$是一個很好的空間，而且要在$\mathbb{R}^n$造出這樣的集合也完全不難。因此我們常常會覺得高微裡很多度規空間的性質看起來理所當然，但其實這是因爲我們習慣用$\mathbb{R}^n$去思考的緣故。

C. 如何描述一個函數有多「連續」

在Definition 9中，我刻意將δ寫成$\delta(x,\epsilon)$。這是因爲隨著x與x_0的不同，$f(x)$逼近$f(x_0)$所需的δ也有可能不同。我們可以將δ認知成$f(x)$逼近$f(x_0)$的「速度」。在Definition 9中，同樣的距離ϵ下，隨著x,x_0的不同，x可能需要一個極大的δ去讓$f(x)$靠近$f(x_0)$（需要跑很快），同樣地，一個很小的δ（緩慢的移動）就可以完成一樣的事情。如果對A中所有的x,y來說，x靠近y的速度不受到x,y本身是誰所影響，那麼如果任何人x想靠近A中任何一個其他的元素y，只要移動到距離它δ之內，$f(x)$就會距離$f(y)$以內，不會有的x靠近了，有些x卻還沒靠近，這就是均勻連續(uniformly continuous)的概念。在高等微積分中，「均勻」就是指「集合裡的大家會一樣」的意思。

Definition 15. （均勻連續） 令(M,d),(N,ρ)爲度規空間，$B \subset A \subset M$。$f : A \to N$爲一連續函數。若對每一個$\epsilon > 0$，都存在一個統一的$\delta > 0$使得$\forall x \in A, \forall y \in B$中滿足$d(x,y) < \delta$的$x,y$都有$\rho(f(x),f(y)) < \epsilon$，則稱$f$在$B$上均勻連續。

還有一些更強大的連續。如利普西茲連續(Lipschitz continuous)

Definition 16. （利普西茲連續） 令(M,d),(N,ρ)爲度規空間，$f : A \to N$爲一連續函數。若存在$K > 0$使得$\forall x,y \in A$都有$\rho(f(x),f(y)) \leqslant Kd(x,y)$，則稱$K$爲$f$的利普西茲常數，以及$f$在$A$上利普西茲連續。若$K < 1$，則稱$f$爲壓縮函數*(contraction)*。

若f爲利普西茲連續，則其必均勻連續，但反之不必然。

D. 單變數函數的微積分

單變數函數的微分跟初微中幾乎一模一樣。高微與初微在此的差異主要體現在積分上。高微不大會像初微一樣用無窮級數去定義積分(這種定義方式稱爲達布積分(Darboux integral)，不過其實它跟黎曼積分是等價的)，不過不同的作者會使用不同的方式去定義一個有界函數在一閉區間上的黎曼積分(Riemann integral)，至於無界函數會留待瑕積分討論。但這些定義大多離不開閉區間的分割(partition)。跟初微類似的是高微也是使用兩個值去逼近積分。中把這兩個值稱爲上和(upper sum)跟下和(lower sum)。如果能找到兩種分割能分別使上和產生最小值(稱此最小值爲上積分，upper integral)，以及使下和產生最大值(稱此最大值爲下積分，lower integral)，且上積分與下積分相等，那麼就說這個函數黎曼可積。接著我們才進一步用上和、下和、分割去證明初微中積分的性質。其中比較有趣的是萊布尼茲公式(Lebiniz's formula)：

Theorem 17. *(Lebiniz's formula)* 假設$f(x,t)$以及$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)$在$[a,b] \times [c,d]$上連續，且$f$的值域爲$\mathbb{R}$。定義

$$\phi(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dt$$

則ϕ在$[c,d]$上可微，且

$$\phi'(t) = f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)dx \quad (1)$$

最後補充一下：最好去了解一下數列與函數的上極限($\limsup$)和下極限($\liminf$)是什麼。因爲有些教材不會提到，但它們是很重要的觀念。

IV. 函數空間

在高等微積分中，爲何要辛苦去鑽研度規空間的諸性質，並研究其上的連續函數？如果我們只把所有事情推廣到$\mathbb{R}^n$上，那其實很多Section II與Section III的篇幅都能夠省去。然而，正式因爲我們有必要把函數空間與高微度的歐式空間的性質刻劃清楚，所以才要花這麼多時間去探討點擊拓撲和連續映射這些較爲廣泛的概念。函數空間之所以重要，是因爲其中的級數（如泰勒級數）在純數理論或是工程實務上都有重要的應用。若更進一步與線性代數結合，那麼函數空間的理論就成了傅立葉分析的基石。工學院和電資學院的工程數學中所提到的傅立葉級數即爲一大應用。對$\epsilon - \delta$的語言熟練程度將會決定這一章的精通程度，因爲這一章幾乎所有證明都是用$\epsilon - \delta$完成的。

A. 函數所形成的列與級數

令(M,d)、(N,ρ)爲度規空間，$A \subset M$。$f_k : A \to N$爲一函數所成之序列(sequence of functions)，$k \in \mathbb{N}$。則我們很自然地會提出下面的疑問：

- 這個序列能不能定義它的收斂性呢？如果隨著N的增加，f_k會不會越來越逼近某一個定函數f呢？
- 對所有$x \in A$而言，$f_k(x) \to f(x)$的「速度」是一樣的嗎？會不會在k很大時有些x已經很靠近$f(x)$了，但有些x還在慢慢來？
- 如果f_k都連續，f必定會連續嗎？

Definition 18. *(1)* 若對所有A中的元素x與任意正數$\epsilon > 0$都存在一個自然數$K = K(x,\epsilon)$使得若$k > K$，則$\rho(f_k(x),f(x)) < \epsilon$，則稱$f_k(x)$逐點收斂到$f(x)$*(pointwise convergence)*。

(2) 承*(1)*，如果可以找到與x和ϵ無關的K，則稱$f_k(x)$均勻收斂到$f(x)$*(uniform convergence)*。

(3) 此時之f稱爲f_k之極限函數*(limit function)*。

這是對前兩個問題的數學建模。我們可以把A想成一群士兵，$f_k(x)$想成士兵x當前的位置，k當成時間。那麼逐點收斂的函數序列就像一群新兵，若要他們整隊到$f(x)$，那麼當有些人已經即將就定位時，有些人卻還在慢慢走；均勻收斂的函數序列就好像一群受過訓練的老兵，會以一致的步伐迅速整隊到$f(x)$。如果令

$$g_k = \sum_{\hat{k}=1}^{n} f_{\hat{k}}(x),$$

那麼也可以用類似的方式定義函數級數的收斂。均勻收斂還有一個很好的性質：它會保有函數的連續性。

Proposition 19. 若f_k都是連續函數，且f_k均勻收斂到f，則極限函數f亦會連續。

有這麼好的事情，我們當然會希望收斂是均勻收斂。在初微我們學的是級數的審斂法，高微則是要學函數級數的審斂法，以判斷函數級數是否均勻收斂。對函數序列，可以證明只要N是完備空間（使得其上任何柯西序列都收斂），則$f_k \to f$必定爲均勻收斂。對函數級數，則可以使用Weistrass M-test來判明。

Theorem 20. *(Weistrass M-test)* 令$(V,||\cdot||)$爲一賦範空間，$g_k : A \subset (M,d) \to \mathbb{R}$爲一函數列，$k \in \mathbb{N}$。若對每一個$k$而言都存

在一數$M_k \geqslant 0$使得$g_k(x) \leqslant M_k, \forall x \in A$，且$\sum_k M_k$收斂，則級數$\sum_k g_k$均勻收斂。

不過，Weistrass M-test也有不管用的時候。高微可能會教另外兩個判斷函數級數是否均勻收斂的定理：Abel test跟Dirichlet test。這三個定理合稱高微三大審斂法。不過，使用上的順序盡量依Weistrass M-test→Abel test→Dirichlet test爲主。

此外，既然連續性會被均勻連續遞移到極限函數上，我們自然會想得寸進尺的問：如果$M = N = \mathbb{R}$，且f_k均勻收斂到f。假設f_k可微/可積，那f也會可微/可積嗎？最好的話我們會希望可以且值是一樣的。好消息是積分的話可以，但微分的條件會嚴格一點。

Theorem 21. *(1) 若f_k在區間$[a,b]$上可積且f_k均勻收斂到一函數f，則*

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(2) 若f_k在區間$[a,b]$上連續，在(a,b)上可微，且均勻收斂到一函數f。如果能找到(a,b)中至少一點x_0使得數列$f_k(x_0)$收斂，且f_k'亦均勻收斂到一函數g，則$f' = g$，或

$$\lim_{k\to\infty}\frac{df_k(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\lim_{k\to\infty} f_k(x)$$

這個定理的意義是極限與微分、積分是否可以交換。更進一層的意義是函數級數是否可以逐項微分或逐項積分。

Corollary 22. *(1) 若g_k在區間$[a,b]$上可積且$\sum_k g_k$均勻收斂，則$\sum_k g_k$可逐項積分，即*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b g_k(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)dx$$

(2) 若g_k在區間$[a,b]$上連續，在(a,b)上可微，且$\sum_k g_k$均勻收斂。如果能找到(a,b)中至少一點x_0使得級數$\sum_k g_k(x_0)$收斂，且$\sum_k g_k'(x_0)$亦均勻收斂，則

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{dg_k(x)}{dx}$$

B. 連續函數空間

將一個集合上所有的連續函數蒐集起來，如果我們能找到一個或數個metric，使得這個空間成爲一個度規空間，那麼我們就能發展其上的拓撲學。甚至還能夠探討「以函數爲自變數的映射」連續與否。如此一來，關於函數列、函數級數，甚至微分方程式都可以用度規空間的語言統一。

Definition 23. 定義函數的範數爲

$$||f(x)|| = \sup_{x\in A} ||f(x)||$$

令$f: A \subset (M,d) \to (N, ||\cdot||)$爲一函數。定義$C$爲$A$上所有映射至$N$之連續函數所成之集合，並定義$C_b$爲$C$中有界函數所成之集合。

考慮

$$d(f,g) = \sup_{x\in A}\rho(f(x), g(x)),$$

不難驗證d滿足Definition 1中所有要求。故(C,d)與(C_b,d)都是度規空間。我們可以研究空間本身的性質、點與集合的相對關係、以及元素在集合中的分佈情形。

- 空間本身的性質：(C_b,d)在什麼情況下會是完備空間？(可證充分條件爲(N,ρ)完備)。
- 點與集合的相對關係：(C_b,d)中的開集與閉集是什麼樣子？(這應該是函數空間中最簡單的問題。)
- 元素在集合中的分佈情形：Arzela-Ascoli Theorem描述了(C_b,d)中緊緻集的樣貌。Stone-Weierstrass Theorem則描繪了(C_b,d)中稠密集（指的是那些閉包爲整個空間的集合）的樣貌。

C. 不動點定理

不動點定理(fixed point theorems)是我覺得高微中最有趣的部份。給定一個度規空間與其上的函數$f: A \subset M \to M$，有沒有可能找到一點使得$f(x) = x$？如果有的話，這個不動點唯一嗎？A中其他的點與不動點有何關係？

Theorem 24. *(Banach fixed-point theorem)* 令(M,d)爲一完備的度規空間且$\Phi: M \to M$爲一映射。若對所有$x,y \in M$都存在$k \in (0,1)$使得

$$d(\Phi(x),\Phi(y)) \leqslant k\cdot d(x,y), \tag{2}$$

則：

(1) Φ存在唯一一個不動點x^*，即$\Phi(x^*) = x^*$。

(2) 對任意$x_0 \in M$，定義序列$\Phi(x_n) = \Phi(x_{n-1})$，則

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

(3) 此時稱Φ爲一壓縮映射*(contraction mapping)*，滿足*(2)*之最小k值稱爲Φ的*Lipschitz*常數。

這個定理的應用極廣，例如一階常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{3}$$

可轉化爲

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \tag{4}$$

此時找一數a使得$|\phi(t_0) - x_0| \leqslant a$並令

$$M = \{\phi: [t_0-\delta, t_0+\delta] \to \mathbb{R} | \phi \in C^1, \phi(t_0) = x_0, |\phi(t_0) - x_0| \leqslant a\},$$

$\Phi(\cdot): M \to M$爲

$$\Phi(\cdot) = \int_{t_0}^{t} f(s,\cdot)ds$$

可以證明Φ是一個壓縮映射，並經由不斷迭代M中的函數所成的數列得到(3)的解。

D. 內積空間

我們知道$\mathbb{R}^3$是一個以$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$爲單範正交(orthonormal)基底的向量空間。若向量A可表爲$A = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$，則由線性代數的知識可知$A_i = A\cdot\mathbf{e}_i$，$i = 1,2,3$。因此

$$A = \sum_{i=1}^{3}(A\cdot\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$$

如果令V爲某些函數所形成的向量空間，那我們有辦法找出一組（最好是可數的）單範正交基底$\{\phi_k\}$，使得V中每個元素都能表示成

$$f = \sum_k \langle f, \phi_k\rangle \phi_k \tag{5}$$

呢？其中$<,>$爲V上的內積。因此我們的問題包含以下幾點：

- V必須有怎樣的限制？
- 如何定義V上的內積？
- 這樣定出來的內積是否仍保有線性代數中關於內積空間的性質？
- 是否有$\{\phi_k\}$的找法呢？
- 級數(5)是否眞的收斂到f呢？f的條件可以做怎樣的放寬？

我們先定義一般向量空間上的內積：

Definition 25. （內積空間） 令V爲$\mathbb{C}$上的向量空間。定義V上的內積爲滿足以下條件的映射$<,>: V \times V \to \mathbb{C}$：

(1) 對第一個分量是線性的：

$$<\alpha f+\beta g, h> = \alpha < f, h > + \beta < g, h >,$$

$\forall f, g, h \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$。

(2) 共軛性質：

$$\langle f, g\rangle = < g, f >^*$$

(3) 正定性：$< f, f > \geqslant 0,\ \forall f \in V$且若$< f, f > = 0$，則$f = 0$。

向量空間V配上內積$<,>$則稱爲內積空間*(inner product space)*，記爲$(V, <,>)$。且V上的範數可定義爲$||f|| = \sqrt{< f, f >}$。

在高微中，我們定義函數空間的內積爲：

Definition 26. 令$L^2([a,b])$爲在$[a,b]$上滿足以下條件的函數所形成的向量空間：

(1) 除了在一測度*0*的集合以外，在$[a,b]$上其他點都連續。

(2) 平方可積，即：

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

定義$L^2([a,b])$上的內積爲

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x) g^*(x) dx \tag{6}$$

易證這樣的內積空間爲$\mathbb{C}$上的向量空間且此內積定義滿足柯西不等式(Cauchy-Schwarz inequality)

$$\left|\int_a^b f(x) g^*(x) dx\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right) \tag{7}$$

以及閔可夫斯基不等式(Minkowski inequality)

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

在高等微積分中，會嚴格的檢驗這樣定出來的內積與內積空間滿足一系列的性質，爲之後傅立葉級數的諸性質打下基礎。

E. 傅立葉級數

考慮$L^2([0,2\pi])$（或$L^2([-\pi,\pi])$），可證

$$\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right\} \tag{9}$$

以及

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(nx)}{\sqrt{2\pi}}, n = 1, 2, 3, ...\right\} \tag{10}$$

爲$L^2([0,2\pi])$（或$L^2([-\pi,\pi])$）上的單範正交基底。取ϕ_k爲(9)或(10)，則可以定義$L^2([0,2\pi])$上的傅立葉級數：

Definition 27. （傅立葉級數） 令$f \in L^2([a,b])$。定義f的指數型傅立葉級數爲

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{11}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \tag{12}$$

並定義f的（三角）傅立葉級數爲

$$\frac{a_0}{2} + \sum_0^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \tag{13}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx) dx, n = 0, 1, 2, ... \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx) dx, n =, 1, 2, ... \tag{15}$$

那這兩兩種傅立葉級數眞的會收斂到f嗎？答案是會的，只是這個收歛性的證明太過高深，高微的課程都不一定會教！在描述此定理前，我們先用初微的符號定義以下極限：

$$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

若x_0爲不連續點且$f(x_0^+)$且$f(x_0^-)$皆存在，則稱x_0爲跳躍形不連續點(jump discontinuity)。

Theorem 28. 除了在$[a,b]$上某些測度爲*0*的集合外，*(11)*與*(13)*都逐點收斂到f。且對跳躍形不連續點x_0而言，如果極限

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0^+)}{h}$$

與

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0^-)}{h}$$

存在，則*(11)*與*(13)*在x_0會收斂到$(f(x_0^+) + f(x_0^-))/2$。

在高微中，會先就一般的$\{\phi_h\}$去證明一些定理，再以(9)以及(10)爲基底去做傅立葉級數的計算與討論。其中有兩個定理特別值得説明：

Theorem 29. *(Bessel's inequality)* 令ϕ_k爲內積空間$(V, <,>)$上的單範正交基底，且$f \in V$，則級數

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k\rangle|^2$$

收斂，且

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k\rangle|^2 \leqslant ||f||^2 \Theta \tag{16}$$

Theorem 30. *(Parseval's theorem)* 令ϕ_k爲內積空間$(V, <,>)$上的單範正交基底，且$f \in V$，則

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k\rangle \phi_k \tag{17}$$

若且唯若

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, \phi_k\rangle|^2 = ||f||^2 \tag{18}$$

稱*(17)*爲f的正交展開式。

由這兩個定理可知一般而言f是否收斂到(17)取決於$||f^2||$與級數(17)中諸係數$\langle f, \phi_k\rangle$平方和之關係。當(18)成立時，(18)亦稱爲帕賽瓦爾恆等式(Parseval's equality)。

Example 31. 在$[0,2\pi]$上，函數$f(x) = x$的傅立葉級數爲

$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \tag{19}$$

故由(18)可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6} \tag{20}$$

F. 其他的級數

除了傅立葉級數外，其實還有一些其他的方法可以用級數逼近一個連續函數f，只是他們可能收斂太慢而缺乏實用性。因此泰勒級數與傅立葉級數仍然是最常用的兩種級數。

假設將$[a,b]$切割爲n個區間：$a=c_0<c_1<...<c_n=b$，且定義$h(x)$在每個區間$[c_k,c_k-1]$上有不同的取值，就稱$h(x)$爲步階函數(step function)。如果是在每一段區間上都定義一個線性函數$g_i(x)=a_ix+b_i$。藉由調整a_i,b_i的係數，我們可以把g_i給「接起來」，使連接後的函數$g(x)$爲一連續函數，稱爲片段線性函數(piecewise linear function)。則我們有以下定理：

Theorem 32. 藉由不斷細分$[a,b]$並選取適當的係數或取值，$[a,b]$上的連續函數f可被步階函數或片段線性函數逼近，即存在步階函數序列$h_k(x)\to f$，以及存在片段線性函數序列$g_k(x)\to f$。

Theorem 33. *(Bernstein approximation theorem)* 令f在$I=[0,1]$上的伯恩斯坦多項式爲

$$B_n(x,f)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_k^nx^k(1-k)^{n-k} \tag{21}$$

則B_n均勻收斂到f。

V. 可微映射

接著我們將注意力放回歐式空間$(\mathbb{R}^n,||\cdot||)$上。在初等微積分中，我們學過單變數函數微分的定義，也學過向量值函數(vector-valued functions)以及多變數函數(多是$\mathbb{R}^2$或$\mathbb{R}^3$打到$\mathbb{R}$的函數在直角座標上的微分。對於$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$的函數，我們只研究過很特別的一種類型－向量場($\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$的函數)。而且我們也只有研究過向量場上兩種特別的微分－散度跟旋度。因此我們若要將微分的定義推廣到形如

$$(x,y,z)\mapsto(x^2z+\sin y,x\cos y+z^3)$$

等$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$的函數上，而且還要保證這個定義再沒有座標系時也會work，我們就應該保證定義出來的東西可以包含單變數函數、向量值函數以及多變數函數的微分定義。

A. $\mathbb{R}^n$上的微分

回顧一下在初等微積分裡對於微分的理解。以下令A都是開集且f可微分：

- 當函數是$f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$的時候，函數在一點$x$上的微分是
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{22}$$
也可以說，此時微分是一個與x有關的定數$f'(x)$，使得f在x附近的函數值可以被一次函數近似，也就是對很小的h來說，$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h)$。其中$o(h)$是一個與h有關的誤差項，具體是誰我們不在乎，只要在h夠小時此誤差項夠小就可以了。
- 當函數是$f:A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$的時候，函數在一點$x$上的微分是向量
$$f'(x)=(f_1'(x),...,f_m'(x)),$$
也就是各分量各自的微分，使得f在x附近的函數值可以被
$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h)$$
近似。此時h是純量，$f'(x)h$可以當成向量的係數積。
- 當函數是$f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$的時候，函數在一點$x$上的微分是它的梯度$\nabla f(x)$，使得$f$在$x$附近的函數值可以被
$$f(x+h)-f(x)=\nabla f(x)\cdot h+o(h)$$
近似。此時我們把x與h當成行向量，$\nabla f(x)$當成一個列向量。

因此，當函數是$f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$時，我們對函數在一點$x$上的微分的期待是：

- 可以用類似(22)的形式以線性近似x附近的函數值。
- 誤差項$o(h)$仍然只與h有關，且h越小時，他也要越小。
- 此時x和h都是$\mathbb{R}^n$中的向量，因此f的微分要能作用在h上。

什麼東西可以滿足這些要求呢？那就是線性變換。我們只要能找到一個線性變換T滿足

$$f(x+h)-f(x)=T(x)\cdot h+o(h)$$

就行了。

Theorem 34. 令$A\subset\mathbb{R}^n$爲開集，$f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$爲一函數。若對某一元素$x\in A$而言存在一個與$x$有關的線性變換$Df(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$使得

$$f(x+h)-f(x)=Df(x)(h)+o(h)$$

則稱f在x可微，$Df(x)$是f在x的導數。

這個定義好處是他包含了$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$、$\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$、$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$的微分定義。且他並不仰賴座標系的存在。到目前爲止我都還沒有打算把x寫成$(x_1,...,x_n)$的形式。

Remark 35. 注意不要搞混這些符號：

(1) $Df(x)(h)$是$Df(x)$這個線性變換作用在h上的意思。爲了方便起見也可以直接寫成$Df(x)h$。因此$Df(x)(h)$是一個$\mathbb{R}^m$中的向量

(2) $Df(x)$是f在x的微分，是一個$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$的線性變換。這個線性變換會隨著$x$的不同而改變。

(3) Df是一個以「A中所有使f可微的點所成之集合」爲定義域，並以「所有從$\mathbb{R}^n$對應到$\mathbb{R}^m$的線性變換所成之集合」爲對應域的映射。

那麼，如果考慮$\mathbb{R}^n$上的標準基底$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n$，並令$f=(f_1,f_2,...,f_m)$，$x=(x_1,x_2,...,x_n)$，如何用矩陣表達$Df(x)$呢？可以證明

$$Df(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nabla f_1(x)\\ \nabla f_2(x)\\ \vdots\\ \nabla f_m(x)\end{pmatrix} \tag{23}$$

而$Df(x)$的行列式$\det(D(f(x))$稱爲雅可比行列式(Jacobian determinant)。

B. 微分相關定理在$\mathbb{R}^n$上的推廣

對$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^m$的函數成功定義了其微分之後，我們想追問以下性質：

- 唯一性：$Df(x)$對x來說是唯一的嗎？（是）
- 四則運算：如果f和g都是$\mathbb{R}^n$映射到$\mathbb{R}^m$的函數且定義域相同，且α爲一常數。則$f+g$、αf、$f\cdot g$可微與否？
- f可微分的充分必要條件是什麼？（(23)中每一個偏微分都存在且連續。）
- 如何把鏈鎖律(chain rule)推廣到高維度空間？它可以用導數的矩陣表示法描述嗎？

- 均值定理仍會成立嗎？（通常初等微積分課程講到多變數函數的時候就會說明均值定理不會成立了。）
- 如果有辦法定義的話，如何認知f的二階微分、三階微分、乃至於高階微分？是否能利用高階微分對f做泰勒展開？如果可以的話會是什麼樣子？

初等微積分所學的二次導數檢驗法和拉格朗日乘數法也會在此推廣到高維度。

C. 反函數定理與隱函數定理

反函數定理和隱函數定理是高等微積分的聖杯。可以說這兩個定理是高微裡最重要、也最漂亮的定理。從小我們就常聽說「解n個未知數要n條方程式」。這是因爲在線性代數中，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \tag{24}$$

在給定$y_1, ..., y_n$時的充分必要條件是$det(A) \neq 0$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

那麼更一般的情形下，若有n個變數和n個關係式。要怎麼解呢？即：給定$f = (f_1, ..., f_n)$和$y = (y_1, ..., y_n)$，如何解

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = y_n \end{cases} \tag{26}$$

呢？但以$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$爲例就會發現我們都不一定有辦法解了，更何況多維度的聯立方程組。因此我們退而求其次，只問說：在某點x_0附近解$y = f(x)$，(26)怎樣會有解？此解會不會唯一？

從解(24)的經驗，我們可以猜$det(Df(x_0)) \neq 0$的時候在x_0附近可以嘗試去解$y = f(x)$(只要此時y在所對應的值域中)。也就是反函數會存在的意思。這就是反函數定理的內容：

Theorem 36. *(反函數定理)* 令$A \subset \mathbb{R}^n$爲開集，$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$爲一可微函數。若對某一元素$x_0 \in A$而言$det(Df(x_0)) \neq 0$，則：

(1) x_0存在一個鄰域U使得f在U上有一個可微的反函數f^{-1}。

(2) 令$f(U) = W$，對W中滿足$x = f^{-1}(y)$的y而言，$Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$。

證明會用到Banach不動點定理(Theorem 24)和均值定理。反函數定理之所以重要在於如果此定理的條件能被滿足，則即使不能解出$f^{-1}(y)$，我們還是有辦法對$f^{-1}(y)$微分！

但如果今天我們有m個方程式，卻有$n+m$個未知數，我們應該會在乎的是能否把其中n個變數表爲另外m個變數的函數？也就是說，如果

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_{n+m}) = y_1 \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_{n+m}) = y_2 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n, ..., x_{n+m}) = y_n \end{cases} \tag{27}$$

那有沒有辦法找出一個函數f使得$F(x, f(x) = 0$呢？這就是隱函數定理的內容。

Theorem 37. *(隱函數定理)* 令$A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$爲開集，$F = (F_1, ..., F_m) : A \to \mathbb{R}^m$爲一可微函數且存在$(x_0, y_0) \in A$使得$F(x_0, y_0) = 0$。若行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_n} \end{vmatrix} (x_0, y_0) \neq 0 \tag{28}$$

則在$\mathbb{R}^n$中存在一個x_0的鄰域U，且$\mathbb{R}^m$中存在一個y_0的鄰域V以及一個唯一的函數$f : U \to V$使得對所有U中的x來說$F(x, f(x)) = 0$，且f也是可微函數。

甚至$Df(x)$還可以寫成矩陣相乘的形式。不過具體的式子就等到讀者實際修讀的時候再去探討。

至此，高微最重要的兩個定理就探討完畢了。下一節中的定理都是反函數定理的應用。事實上連隱函數定理的證明中都用到了反函數定理。

D. 可微函數七大定理

對可微函數f而言，有數個定理是由反函數定理和隱函數定理所延伸出來的，其中某些定理是爲往後幾何的課程鋪路。他們分別是：

(1) Domain-Straightening Theorem: 設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$爲一函數且$c$在$f$的值域Im$(f)$裡。則$\{(x, c) | f(x) = c\}$爲$f$的一個level surface。那麼$f^{-1}(c)$的維度會是多少呢？如果是$n-1$維的話，能不能找到一個變換，把這個level surface壓成一個平面？

(2) Range-Straightening Theorem: 設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$且$n \leqslant m$。那麼$f$的值域應該不會超過$p$維。若給定$A$中一點$x$，則以$x$維頂點的$n$維立方體經$f$映射後，如何得知這個立方體的維度？

(3) Rank Theoren: 設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}$。若$A$中任何一點$x$的微分$Df(x)$的秩(rank)都是$m \leqslant N$，則Im$(f)$的維度是否也是一個$m$維的集合？有沒有可能找到一個座標變換使$f$原本要由$n$個變數來表示，變成只需要用$m$個變數來表就夠了呢？

(4) Injective mapping theorem: 設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$爲一可微函數，且$Df(c)$爲嵌射函數，$c \in \mathbb{R}^n$。則$f$在以$c$爲中心的某圓盤$D(c, r)$內亦爲嵌射函數，且此時$f^{-1}$會是連續函數。

(5) Surjective mapping theorem: 設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$爲一可微函數，且$Df(c)$爲蓋射(surjective)函數，則存在$m, \alpha > 0$使得

$$||y - f(c)|| \leqslant \frac{\alpha}{2m}$$

(6) Open mapping theorem: 設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$爲一可微函數，且$Df(x)$爲蓋射函數，$\forall x \in A$，則對開集合$B \subset A$而言，$f(B)$也是開集合。

(7) Parametrization theorem: 設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$爲一可微函數，且rank$(Df(x)) = r$，$\forall x \in A$。令$a \in A$且$f(a) = b$，則存在

- a的一個鄰域V與一個V上的可微函數$\alpha : V \to \mathbb{R}^k$
- $\mathbb{R}^k$中的開集W與W上的可微函數$\beta : W \to \mathbb{R}^n$、$\phi : W \to \mathbb{R}^m$

使得

- $f(x) = (\phi \circ \alpha)(x), \forall x \in V$
- $\phi(t) = (f \circ \beta)(t), \forall t \in W$

VI. $\mathbb{R}^n$上的積分

A. 積分的推廣

假設$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$爲一函數，且$f = (f_1, ..., f_m)$，則我們定義$f$的積分爲

$$\int_A f = \left(\int_A f_1, ..., \int_A f_m \right)$$

故其實我們只要研究$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的積分就可以了。跟初微處理多變數積分的時候一樣，我們定義積分的方式是直接找一個大長方體$B = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$，並令$f(x)$在$B - A$上的值爲0。接著，高微定義$f$在$A$(或$B$)上的黎曼積分的方法與Section III-D一模一樣，藉由定義B上的分割來制定上黎曼和與下黎曼和，然後以此推出積分的諸性質。

有了強化版後的黎曼積分後，就能夠證明一些初微證不出的定理，例如Fubini's Theorem與多維的變數變換定理。

要注意的是，有些課程可能會教的是Riemann-Stieltjes積分，比較進階的課程甚至會直接教勒貝格積分(Lebesque integral)。

B. 零測度的概念

但高微的理論發展下去遇到了一點困難。黎曼積分幾乎沒辦法應付很「奇怪」的函數。比如：在所有有理數上不連續而在所有無理數上連續的函數，這樣的函數有辦法積分嗎？另外隨著物理學的發展，一些物理學家用來描述物理理論的函數（如δ函數）實在讓數學家難以現有的理論框架分析。因此勒貝格理論提供了一種新的看待積分的方式，告訴我們如何處理一些用黎曼積分的觀點看待難以積分的函數。而在高微中，第一個遇到(也有可能不會遇到或是唯一一個遇到，看課程大綱決定)的勒貝格理論中的觀念就是零測度(measure zero)的集合。

「測度」的概念由「體積」而來。在高維度空間中，定義函數

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x \in A \\ 0, \text{ if } x \notin A \end{cases} \tag{29}$$

我們把一個集合的體積定爲

$$V(A) = \int_A 1_A \tag{30}$$

Definition 38. 令$A \subset \mathbb{R}^n$。若對任意的正數ϵ都能給A找到一個長方形的覆蓋$\{R_1, ..., R_m, ...\}$使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} V(R_i) < \epsilon$$

則稱A爲零測度集。

這個定義可能難以理解，但先注意到測度0未必是體積爲0的集合，反之，體積爲0的集合必定爲測度0的集合。同時，體積非0的集合必非測度0的集合。而測度0的集合與黎曼積分的關係是：

Theorem 39. *(Lebesque's Theorem)* 令$A \subset \mathbb{R}^n$爲一有界的集合且$f : A \to \mathbb{R}$爲一有界的函數。現定義f在A以外的取值爲*0*並以此擴展f的定義遇到整個$\mathbb{R}^n$上。則f在A上黎曼可積若且唯若經過定義域擴張的f的不連續點所形成的集合唯爲測度*0*。

比如這個例子：

Example 40. 令$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$在$(0, 1)$上的無理數取值爲0，在$\mathbb{R}$上其他點取值爲1。則$f$在$(0, 1)$上處處不連續。

因爲$(0, 1)$的體積爲

$$\int_{(0,1)} 1_{(0,1)} = \int_0^1 1 = 1 \neq 0$$

故$(0, 1)$體積非0，亦非測度0集。故由Lebesque's Theorem得知f非黎曼可積。

C. 瑕積分

我們可以把積分分爲四類：

1) f和A皆有界
2) f有界但A無界
3) f無界但A有界
4) f無界且A亦無界

則我們希望找一種更廣義的黎曼積分的定義，使2到4能包含其中，且1可視爲此定義的特例。在高微中，我們討論瑕積分的方式是將函數f拆成兩部分f^+與f^-，使得在A上有$f^+ + f^- = f$與$f^+ \cdot f^- = 0$。

我們先看假設f在A上bounded，就可以用類似初等微積分來定義狀況2下f在A上的瑕積分：

Definition 41. 令$A \subset \mathbb{R}^n$（無論其是否有界）。以定義$f|_{\mathbb{R}-A} = 0$的方式將f延伸到A外。若f在$[-a, a]^n$上可積，且極限

$$\lim_{a \to \infty} \int_{[-a,a]^n} f$$

存在，我們就稱f可積，且定義f在A上的積分爲

$$\int_A f = \lim_{a \to \infty} \int_{[-a,a]^n} f$$

但是這樣延伸f的方式若是不同，會不會得到不同的結果呢？答案是仍會得到相同的結果，在高微裡會證明這個定理。接著我們可以進一步將此定義拓展到無界的f。方法是用一把叫做$y = M$的刀子去砍f，並檢驗此時頂端被「削平」的f在A上是否可積。如果可以的話，我們就不斷加大M的值，看此時f的積分是否收斂。

Definition 42. 令$A \subset \mathbb{R}^n$。定義函數

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), \ if \ f(x) \leqslant M \\ M, \ if \ f(x) > M \end{cases} \tag{31}$$

假設$\forall M > 0$，f_M皆可積，且此積分值隨著M值增加而增加。若此時極限 存在，我們就稱f可積，且定義f在A上的積分爲

$$\lim_{M \to \infty} \int_A f_M$$

存在，我們就說f在A上可積，且定義此時的積分值爲

$$\int_A f = \lim_{M \to \infty} \int_A f_M$$

在Definition 42下，Definition 41亦爲一個特例。如此一來，我們就成功把積分的性質定義推廣到3跟4。接著高微會再去證明一些性質，像是初微中的comprison test在高維度的推廣，在情況1下積分各種性質在瑕積分的推廣等等。至於初微中計算瑕積分的方式是以比較直觀的定義去算，如

$$\int_0^{\infty} f(x) = \lim_{a \to \infty} \int_0^a f(x)dx$$

但在高微中會證明這其實是Definition 42與其衍生出來的諸性質的結果。此外，還有幾個有用的審斂法：

Theorem 43. *(比較審斂法)* 設f, g在$[a, c]$上可積，$c \geqslant a$。若$|f(x)| < g(x), \forall x \geqslant a$，且$\int_a^{\infty} g$存在，則$\int_a^{\infty} f$亦存在，且

$$\left| \int_a^{\infty} f \right| \leqslant \int_a^{\infty} g$$

Theorem 44. *(極限比較審斂法)* 設在$[a, c]$上$f, g \geqslant 0$，且

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$$

則
$$\int_a^\infty f, \leqslant \int_a^\infty g$$
同時存在或同時不存在。

Theorem 45. *(Dirichlet Test) (1)* 假設f在$x \geqslant a$上連續，且積分
$$I_c = \int_a^c f$$
有界。令ϕ爲一單調遞減函數且$\phi(x) \to 0$，則瑕積分
$$\int_a^\infty f\phi$$
存在。

(2) 設$J \subseteq \mathbb{R}$，假設f在$[a,\infty) \times J$上連續，且存在一數A使得積分
$$\int_a^c f(x,t)dx \leqslant A$$
有界。若$\forall t \in J$，ϕ爲一單調遞減函數且當$x \to 0$時，$\phi(x,t)$均勻收斂到*0*，則瑕積分
$$F(x,t) = \int_a^\infty f(x,t)\phi(x,t)dx$$
在J上存在。

Theorem 46. *(Weiestrass M-Test) (1)* 設$J \subseteq \mathbb{R}$，且$\forall t \in J$，$f(x,t)$在$x \in [a,c]$上可積。若在$x \geqslant a$上存在函數$M(x) > 0$使得$|f(x,t)| \leqslant M(x), \forall t \in J$且積分
$$\int_a^\infty M(x)$$
存在，則$\forall t \in J$，瑕積分
$$\int_a^\infty f(x,t)dx$$
存在。

搭配以下定理可以算一些初等方法算不出的積分

Theorem 47. 設$J \subseteq \mathbb{R}$，假設$f(x,t)$與$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)$在$[a,\infty) \times [\alpha,\beta]$上連續，且積分
$$F(t) = \int_a^\infty f(x,t)dx$$
$$G(t) = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$$
收斂，則$F(t)$可微且$F'(t) = G$，即
$$\frac{d}{dx}\int_a^\infty f(x,t)dx = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial t}f(x,t)dx$$

Example 48. 若要求積分
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$$
可先考慮積分
$$F(u) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(ux)}{x}dx \tag{32}$$
則對$t > 0$、$u \geqslant 0$而言，由Weiestrass M-Test (Theorem 46)可知此積分均勻收斂。故由Theorem 47，
$$F'(u) = \int_0^\infty e^{-tx}\cos(ux)dx$$
對x分部積分可得
$$F'(u) = \frac{t}{t^2+u^2}$$
故對u積分可得
$$F(u) = \tan^{-1}\frac{u}{t}$$
取極限$t \to 0^+$，則
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \quad &= \lim_{t\to 0^+}\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin(ux)}{x}dx\bigg|_{u=1} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\tan^{-1}F(1) \\ &= \lim_{t\to 0^+}\tan^{-1}\frac{1}{t} \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned} \tag{33}$$

不過，從(32)也能知道輔助用的積分並不是那麼好找！

最後，我認爲理工科系的大學生必須精通以下四種實函數的積分方法：

- 代換積分法：如基本的代換法或三角代換法
- 分部積分法
- 造微分方程式：如Feynman's trick或本節的方法
- 利用複變積分

D. 函數列積分的收斂性

在Section IV-A中，我們討論了函數列以及其微分的的收斂性。我們現在將這一結果推廣到積分上。設f_n爲$A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的函數列且$f_n \to f$。什麼時候
$$\int_A f_n \to \int_A f$$
呢？這要用到Lebesque's Monotone convergence theorem。來說明

Theorem 49. *(Lebesque's Monotone convergence theorem)* 令$f_n : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$爲一非負可積函數列。其中$V(A) > 0$。假設$0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$且在$A$上$f_n \to 0$，則$\int_A f_n \to 0$。

這個定理證明起來比較麻煩，不過他有一個很有用的結果：

Corollary 50. 令$f_n, f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$爲一非負可積函數列。其中$V(A) > 0$。假設$0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n \leqslant \ldots \leqslant f,\ \forall n \in \mathbb{N}$且在$A$上$f_n \to 0$，則$\int_A f_n \to \int_A f$。

故若函數列f_n遞減並收斂到0函數，則此函數列之積分收斂到0。反之，若遞增收斂到某定可積函數，則其極限函數亦可積。除了Theorem 49以外，對一維的情形還有一個常見的定理：

Theorem 51. *(Dominated convergence theorem)* 令$f_n : [a,\infty) \to \mathbb{R}$爲函數列且$f_n \to f$。假設$f_n$、$f$在$[a,c]$上可積，$\forall c > a$，且存在函數$M(x)$滿足

(1) 積分
$$\int_0^\infty M(x)dx$$
存在

(2) $|f_n(x)| < M(x),\ \forall x \geqslant a,\ \forall n \in \mathbb{N}$

則f在$[a,\infty)$上可積，且
$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx$$

VII. 結論

高等微積分不僅是對初等微積分的推廣，更是透過點集拓撲和嚴格的論證手段去理解和掌握各類型映射和各種空間的行爲。

有一些本文沒有包含的題材可能會包含在其他高微課本裡，如：

- 實數的完備性
- 點擊拓撲：康托集(Cantor set)、完美集等其他拓撲觀念
- 數列與級數：數列的上級限($\limsup$)、下極限($\liminf$)、雙重數列與雙重級數，級數的重排、兩級數四則運算後的收斂性等
- 使用無窮級數構造超越函數：如指數函數、對數函數、三角函數與雙曲函數
- 特殊函數：如gamma function、beta function等
- 進階題材：向量分析、differential form、勒貝格積分等