- 完備性：对任何合 logic 的数学敘述此系统恆可判断其对错
- Gödel's incompleteness theorems

  包含 $\mathbb{N}$ 算数系統的公理化系統：

1. Incomplete（不完備） 即：必有命題不可证伪
2. 无法证明自身 Consistent（自洽/一致性）（自洽：不矛盾）

- Elementary Geometry system 完備

  Arithmetic system / ZFC system 不完備

- C.H.（連续统假设）与 ZFC 相容（Consistent） 1940. Gödel
- C.H. 与 ZFC 独立 1963. Paul Cohen

  在 ZFC 下不可证伪，如欧氏幾何的平行公理

- 现有数学系统接受 C.H.

$\varepsilon-\delta$ 语言

Def f 为定义在点 a 附近的函数，称 $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$ 若：

$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\delta(\varepsilon,a)$ such that $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ whenever $0<|x-a|<\delta$

Def $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell$ iff $\forall\varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ whenever $x>N$

Def $\lim_{n\to\infty} a_n=\ell$ iff $\forall\varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|a_n-\ell|<\varepsilon$ whenever $n>N$

Limit 的基本性质

定理： 夾挤原理

(a) $g(x)\le f(x)\le h(x)$，在点 a 附近若 $\lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=\ell$，则 $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$

(b) $g(x)\le f(x)\le h(x)$，当 x 夠大若 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} h(x)=\ell$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell$

(c) $a_n\le b_n\le c_n$，当 n 夠大若 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=\ell$，则 $\lim_{n\to\infty} b_n=\ell$

pf(a)： 给 $\varepsilon>0$，由 $\lim_{x\to a} g(x)=\ell$，$\exists\,\delta_1$ s.t. $|g(x)-\ell|<\varepsilon$ whenever $0<|x-a|<\delta_1$

；同理，由 $\lim_{x\to a} h(x)=\ell$，$\exists\,\delta_2$ s.t. $|h(x)-\ell|<\varepsilon$ whenever $0<|x-a|<\delta_2$

；取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-a|<\delta$，有 $\ell-\varepsilon<g(x)\le f(x)\le h(x)<\ell+\varepsilon$

，即 $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ whenever $0<|x-a|<\delta$

ex: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$: (i) $\sqrt[n]{n}\ge\sqrt[n]{1}=1\quad\forall n>1$ (ii) 令 $\sqrt[n]{n}=1+\varepsilon_n$, 欲证 $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$,

$n=(1+\varepsilon_n)^n=1+n\varepsilon_n+\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_n^2+\cdots\Rightarrow n>\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon_n^2\Rightarrow\varepsilon_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\to 0$ as $n\to\infty$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$; (i),(ii) $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

ex: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=1$: (i) $(1+\frac{1}{n^2})^n\ge 1\quad\forall n>1$ (ii) I. $(1+\frac{1}{n})^n\uparrow$ 至 e, $(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}<e$,

$(1+\frac{1}{n^2})^n<e^{\frac{1}{n}}\to 1$ as $n\to\infty$ II. $\forall\varepsilon>0$, $\exists n$ s.t. $\frac{1}{n}<\varepsilon$, $(1+\frac{1}{n^2})^n<(1+\frac{\varepsilon}{n})^n$

$=(1+\frac{1}{\frac{n}{\varepsilon}})^{\frac{n}{\varepsilon}\cdot\varepsilon}\to e^{\varepsilon}$ as $n\to\infty$, ε任意, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}e^{\varepsilon}=1$; (i),(ii) $\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=1$

o $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell_1$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell_2$, then

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)+g(x)=\ell_1+\ell_2$

2. $\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot g(x)=\ell_1\cdot\ell_2$

3. $\lim\limits_{x\to a}f(x)\div g(x)=\ell_1\div\ell_2$, 当 $\ell_2\neq 0$

pf1: 由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell_1$, $\forall\frac{\varepsilon}{2}>0$, $\exists\delta_1$ s.t. $|f(x)-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2}$ 当 $0<|x-a|<\delta_1$ —(1),

由 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell_2$, $\forall\frac{\varepsilon}{2}>0$, $\exists\delta_2$ s.t. $|g(x)-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2}$ 当 $0<|x-a|<\delta_2$ —(2),

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 当 $0<|x-a|<\delta$ $\Rightarrow$ (1),(2) 成立

$\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta$ s.t. $|[f(x)+g(x)]-[\ell_1+\ell_2]|\le|f(x)-\ell_1|+|g(x)-\ell_2|<\varepsilon$ 当 $0<|x-a|<\delta$

Remark $\lim\limits_{x\to a}f_k(x)=\ell_k\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ell_k$, $\not\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ell_k$

Lemma $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell\Rightarrow f$ is bounded in some neighbor of a,

即 for some $M>0$, $\exists\delta>0$, s.t. $|f(x)|\le M\quad\forall\, 0<|x-a|<\delta$

pf: 对 $\varepsilon=1$, $\exists\delta$ s.t. $|f(x)-\ell|<1$ 当 $0<|x-a|<\delta$, 即 $|f(x)|<\overset{M}{\boxed{\ell+1}}$ 当 $0<|x-a|<\delta$

pf2: 给定 $\varepsilon>0$, $|f(x)g(x)-\ell_1\ell_2|\le|f(x)g(x)-\ell_1g(x)|+|\ell_1g(x)-\ell_1\ell_2|$

$=\overbrace{|f(x)-\ell_1||g(x)|}^{(1)}+\overbrace{|\ell_1||g(x)-\ell_2|}^{(2)}$; $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell_2$ $\therefore g$ is bounded in a nhd of a,

say by M in $(a-\delta_0,a+\delta_0)$; $(1)\le|f(x)-\ell_1|M$, 由 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell_1$

对 $\frac{\varepsilon}{2M}$, $\exists\delta_1$ s.t. $|f(x)-\ell_1|<\frac{\varepsilon}{2M}$ 当 $0<|x-a|<\delta_1\Rightarrow(1)<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M=\frac{\varepsilon}{2}$

; 由 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\ell_2$, if $\ell_1\neq 0$, 对 $\frac{\varepsilon}{2|\ell_1|}$, $\exists\delta_2$ s.t. $|g(x)-\ell_2|<\frac{\varepsilon}{2|\ell_1|}$ 当 $0<|x-a|<\delta_2$

$\Rightarrow(2)<|\ell_1|\cdot\frac{\varepsilon}{2|\ell_1|}=\frac{\varepsilon}{2}$; 取 $\delta=\min\{\delta_0,\delta_1,\delta_2\}\Rightarrow(1)<\frac{\varepsilon}{2}$ 且 $(2)<\frac{\varepsilon}{2}$

当 $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)g(x)-\ell_1\ell_2|<\varepsilon$ 当 $0<|x-a|<\delta$

Remark 若 $l_1=0$, $(2)=0$, $(1)<\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=l_1\cdot l_2$ 成立

○ $\lim_{x\to a} f(x)\div g(x)=l_1\div l_2$ 只须证 $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{l_2}$

Lemma $\lim_{x\to a} f(x)=l$, $l\neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{l}$

pf: 给定 $\varepsilon>0$, $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|=\left|\frac{f(x)-l}{f(x)\cdot l}\right|$; 不妨设 $l>0$, 由 $\lim_{x\to a} f(x)=l$,

$\exists\, \delta_1$ s.t. $\frac{l}{2}<f(x)<\frac{3l}{2}$ 当 $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow \frac{1}{f(x)\cdot l}<\frac{1}{\frac{l}{2}\cdot l}=\frac{2}{l^2}$,

故 $\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|<\frac{2}{l^2}\cdot|f(x)-l|$; 再由 $\lim_{x\to a} f(x)=l$, 给定 $\varepsilon>0$,

$\exists\, \delta_2$ s.t. $|f(x)-l|<\frac{l^2}{2}\varepsilon$ 当 $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{l}\right|<\frac{2}{l^2}\cdot\frac{l^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$

当 $0<|x-a|<\delta$ where $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

pf3: $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{l_2}$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}=l_1\cdot\frac{1}{l_2}$

○ Weierstrass approximation thm.:

f conti. on $[a,b]$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ poly. $p(x)$ s.t. $\forall x\in[a,b]$, $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$

連续函数

○ f def. in a nbd of a, if $\lim_{x\to a} f(x)=f(x)$, say f conti. at a

○ f def. on $I\subset\mathbb{R}$, f conti. at every point $x\in I$, say f conti. on I

連续函数基本定理

○ $I=[a,b]$, f conti. on I

1. 中间值定理 $f(a)f(b)<0 \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ s.t. $f(c)=0$

○ 1-dim fixed point thm.: f conti. on $[a,b]$, $f([a,b])\subset[a,b]$,

$f(x)\in[a,b]\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ s.t. $f(c)=c$

pf: (i) 设 $f(a)\neq a$ 且 $f(b)\neq b$, 令 $g(x)=f(x)-x$, $g(a)=f(a)-a>0$, $g(b)=f(b)-b<0$;

g conti. on $[a,b]$, 依中间值定理, $\exists\, c\in(a,b)$ s.t. $g(c)=0$, 即 $f(c)=c$

(ii) if $f(a)=a$ or $f(b)=b$, then a or b 即 fixed point

○ $\mathbb{R}^n$ 中有相应 fixed point thm.

2. minmax 定理 f conti. on $[a,b] \Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 有 min、max

均匀連续 Uniformly Continuous

Def f conti. on I, if $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta=\delta(\varepsilon)$ (与 x 无关) s.t. $\forall x, y \in I$

$|y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$, 称 f 在 I 上均匀連续

- 否定命题：$\exists \varepsilon>0, \forall \delta>0$ s.t. $\exists x, y \in I$, $|y-x|<\delta$ 但 $|f(y)-f(x)| \geq \varepsilon$
- 证 $f(x)=\frac{1}{x}$, $0<x<1$ 非均匀連续：Let $\varepsilon=1$, $\forall \delta>0$, $\exists x=y-x=\frac{\delta}{k}<\frac{1}{2}$ where $k>1$

s.t. $|y-x|=\frac{\delta}{k}<\delta \Rightarrow \left|\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right|=\left|\frac{y-x}{xy}\right|=\frac{\frac{\delta}{k}}{\frac{\delta}{k}\left(\frac{\delta}{k}+\frac{\delta}{k}\right)}=\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{\delta}>\frac{1}{2} \cdot 2=\varepsilon$

☆ Logic 存在先後顺序，不能隨便换位：$\forall \varepsilon, \exists \delta$ (δ 能指定)；$\exists \varepsilon, \forall \delta$ (δ 不能指定)

Thm: $|f'(x)|<M$ on I, I 为任意开、闭区间 $\Rightarrow f$ is uniformly continuous on I

pf: $|f(x)-f(y)|=|f'(z)||x-y|<M|x-y|<\varepsilon$ 只要 $|x-y|<\frac{\varepsilon}{M}=\delta$

- $\mathbb{F}$: family of 开区间, $A \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{F}$ cover A iff $x \in A \Rightarrow \exists I \in \mathbb{F}$ s.t. $x \in I$
- Heine Borel 定理

$\mathbb{F}$: family of 开区间 cover $[a,b] \Rightarrow \exists$ finite subcovering 即：$\exists I_1, I_2, \cdots, I_n \in \mathbb{F}$ s.t.

$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$

pf: Suppose $\mathbb{F}$ 中找无有穷个开区间能 cover $[a,b]$ (i) 把 $[a,b]$ 二等分，$[a,\frac{a+b}{2}]$、$[\frac{a+b}{2},b]$，其中必有一等分无法被 $\mathbb{F}$ 中有穷个开区间 cover，令其为 $I_1=[a_1,b_1]$，$|I_1|=b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$ (ii) 重複上述论述於 I_1，$\exists I_2=[a_2,b_2]$，$|I_2|=b_2-a_2=\frac{b-a}{2^2}$，$I_2$ 无法被 $\mathbb{F}$ 中有穷个开区间 cover (iii) 依此類推無穷次，$\exists I_1 \supset I_2 \supset \cdots$，$|I_n|=\frac{b-a}{2^n} \to 0$ as $n \to \infty$，I_n 无法被 $\mathbb{F}$ 中有穷个开区间 cover；依区间套定理，$\exists x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{x_0\}$，$x_0 \in I_n \subset [a,b]$，又 $\mathbb{F}$ cover $[a,b]$ $\therefore \exists I \in \mathbb{F}$ s.t. $x_0 \in I$，而 $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=x_0$ $\therefore I_n \subset I$ 当 n 夠大，矛盾 ($\because I \in \mathbb{F}$)

Remark (a,b) 不行

ex: 在 $(0,1)$ 上，考慮 $I_n=(\frac{1}{n},\frac{2}{n})$, $n=2,3,\cdots$；$(0,1) \subset \bigcup_{n=2}^{\infty} I_n$，但 $\nexists$ finite subcovering

3. 均匀連续定理 f conti. on $[a,b] \Rightarrow f$ is uniformly continuous on $[a,b]$

pf: $x.y \in [a,b]$, f conti. at x; given $\varepsilon>0$, $\exists \delta=\delta_x$ s.t. $|y-x|<\delta_x \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$;

令 $I_x=(x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2})$, $\mathbb{F}=\{I_x \mid x\in[a,b]\}$ covers $[a,b]$, 依 Heine Borel thm.,

$\exists$ finite 开区间 of $\mathbb{F}$ cover $[a,b]$, 令其为 $I_{x_k}=(x_k-\frac{\delta_{x_k}}{2}, x_k+\frac{\delta_{x_k}}{2})$ where $k=1,\cdots,n$;

取 $\delta=\min\{\frac{\delta_{x_1}}{2},\frac{\delta_{x_2}}{2},\cdots,\frac{\delta_{x_n}}{2}\}$, 此 δ 即为所求, $x\in I_{x_j}$ for some $j=1,\cdots,n$,

$|y-x|<\delta\le\frac{\delta_{x_j}}{2} \Rightarrow x.y\in I_{2x_j}=(x_j-\delta_{x_j}, x_j+\delta_{x_j}) \Rightarrow |f(x)-f(x_j)|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(y)-f(x_j)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |f(y)-f(x)|\le|f(y)-f(x_j)|+|f(x)-f(x_j)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Remark 以 $\{I_x \mid I_x=(x-\frac{\delta_x}{2}, x+\frac{\delta_x}{2}), x\in[a,b]\}$ 为 open covering 证明之

另pf: 反证法: 假设 f 非均匀連续, 即: $\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0$ s.t. $\exists x.y\in I$,

$|y-x|<\delta$ 但 $|f(y)-f(x)|\ge\varepsilon$; 不妨考慮 $\delta_n=\frac{1}{n}$, 对此 δ_n, $\exists x_n, y_n\in[a,b]$,

$|y_n-x_n|<\delta_n$ 但 $|f(y_n)-f(x_n)|\ge\varepsilon$, $\{x_n\},\{y_n\}\subset[a,b]$, 依 B-W thm., (i)

$\{x_n\}$ 为 bounded seq., $\exists$ conv. subseq. say $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$, $x_{n_k}\to x_0\in\mathbb{R}$ as $k\to\infty$,

$\because x_{n_k}\in[a,b]$ $\therefore x_0\in[a,b]$ (ii) 次考慮 $\{y_{n_k}\}\subset\{y_n\}\subset[a,b]$ $\exists$ conv. subseq. say

$\{y_{n_{k_j}}\}\subset\{y_{n_k}\}$, $y_{n_{k_j}}\to y_0\in\mathbb{R}$ as $j\to\infty$, $\because y_{n_{k_j}}\in[a,b]$ $\therefore y_0\in[a,b]$

$\Rightarrow (x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})\to(x_0,y_0)$ as $j\to\infty$, f conti. at $x_0.y_0$, $\lim\limits_{j\to\infty}f(x_{n_{k_j}})=f(x_0)$,

$\lim\limits_{j\to\infty}f(y_{n_{k_j}})=f(y_0)$, 又 $|x_{n_{k_j}}-y_{n_{k_j}}|<\frac{1}{n_{k_j}}\to0$ as $j\to\infty$ $\Rightarrow f(x_0)=f(y_0)$ —(1),

$|f(x_{n_{k_j}})-f(y_{n_{k_j}})|\ge\varepsilon$, 令 $j\to\infty \Rightarrow |f(x_0)-f(y_0)|\ge\varepsilon$ —(2), (1) 与 (2) 矛盾

Remark B-W thm. $\mathbb{R}^n$ 中成立, 但 ℓ^2 或一般 metric space 中不成立

- 证 $f(x)=\sqrt{x}$ 均匀連续: (i) $x\in[1,\infty)$, $|f'(x)|=\left|\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{2}$, bounded $\therefore f$ 均匀連续 on $[1,\infty)$ (ii) $x\in[0,2]$, $\because f$ conti. on $[0,2]$ $\therefore f$ 均匀連续 on $[0,2]$; $\forall\varepsilon>0, \exists\delta$, say $\delta<1$, $|y-x|<\delta$, 則 $x.y$ 一定同時存在於 $[1,\infty)$ ⟨用 (i)⟩ or $[0,2]$ ⟨用 (ii)⟩ (重疊法)

Remark 1.2 $\Rightarrow$ conti. func. 填满 min.max 中间的任何数: $m<y<M \Rightarrow \exists x\in[a,b]$ s.t. $f(x)=y$

Remark 均匀連续定理保证 $\int_a^b f(x)dx$ 存在

- $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$: $\forall \varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|a_n-\ell|<\varepsilon$ as $n>N$ (须知道ℓ)

Cauchy seq.

Def 称$\{a_n\}$为 Cauchy seq. iff $\forall \varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|a_m-a_n|<\varepsilon$ as $m,n>N$ (不须知道ℓ)

定理: $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$为 Cauchy seq.

pf: ($\Rightarrow$) $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, $\forall \varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|a_n-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$ as $n>N$ $\Rightarrow$

$|a_m-a_n| \le |a_m-\ell|+|a_n-\ell| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ as $m,n>N$ $\therefore \{a_n\}$为 Cauchy seq.

($\Leftarrow$) 设$\{a_n\}$为 Cauchy seq. (i) $\{a_n\}$ is bounded $\because$ 对 $\varepsilon=1$, $\exists N$ s.t. $|a_m-a_n|<1$

as $m,n>N$, 特别 $|a_m-a_{N+1}|<1$ as $m>N$ $\Rightarrow |a_m|<|a_{N+1}|+1$ as $m>N$, 取

$k=\max\{|a_1|,\cdots,|a_N|,|a_{N+1}|+1\}$, 则 $|a_n|\le k$ $\forall n$ (ii) $\{a_n\}$ bdd, 依 B-W thm.,

$\exists$ conv. subseq. say $a_{n_k}\to \ell\in\mathbb{R}$ as $k\to\infty$, 给定$\varepsilon>0$, $\exists N_1$ s.t. $|a_{n_k}-\ell|<\frac{\varepsilon}{2}$

as $k>N_1$, 又$\{a_n\}$为 Cauchy seq., 对此ε, $\exists N_2$ s.t. $|a_m-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ as $m,n>N_2$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 取 $n_k, n>N \Rightarrow |a_n-\ell| \le |a_{n_k}-a_n|+|a_{n_k}-\ell|$

$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\ell$

Remark $\{a_n\}$为 Cauchy seq. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 用到 B-W thm.(由$\mathbb{R}$完备性保证), $\mathbb{R}^n$中成立,

一般 metric space 中不成立

- 1-D B-W thm. 分二等分, 2-D B-W thm. 分四等分(每维二等分), 依此类推

Cauchy seq.

- $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$, $\forall\varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|a_m-a_n|<\varepsilon$ as $m,n>N$
- In $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{X}_n=(x_n,y_n)$, 称 $\{\mathbb{X}_n\}$ 为 Cauchy seq. if $\forall\varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|\mathbb{X}_m-\mathbb{X}_n|<\varepsilon$

  as $m,n>N$, $|\mathbb{X}_m-\mathbb{X}_n|=\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2}$
- $\{\mathbb{X}_n\}$ 为 Cauchy seq. $\Leftrightarrow$ $\{x_n\},\{y_n\}$ 为 Cauchy seq. $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{X}_n$ 存在
- 类推至 $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{X}_k=(\overset{\text{第k个}}{x_1^{(k)}},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})$, $\{\mathbb{X}_n\}$ 为 Cauchy seq. iff

  $\forall\varepsilon>0, \exists N$ s.t. $|\mathbb{X}_k-\mathbb{X}_j|<\varepsilon$ as $k,j>N$; $\{\mathbb{X}_k\}$ 为 Cauchy seq. $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{X}_k$ 存在
- $\{\mathbb{X}_k\}\subset\mathbb{R}^n$, $|\mathbb{X}_{k+1}-\mathbb{X}_k|<\alpha_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k<\infty \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\mathbb{X}_k$ 存在

Metric space 赋距空间

- $\mathbb{X}$: set, $d: \mathbb{X}\times\mathbb{X}\longrightarrow\mathbb{R}^+=\{x\mid x\in\mathbb{R}, x\geq 0\}$

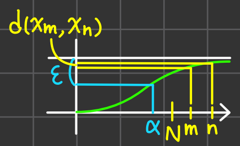
(i) $d(x,y)>0$ if $x\neq y$, $d(x,x)=0$ 即: $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$

(iii) 三角不等式 $d(x,y)\leq d(x,t)+d(t,y)$

ex: $\mathbb{X}=\mathbb{R}$, $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$ 孤独世界

- $(\mathbb{X},d)$ metric space. $\{x_n\}\subset\mathbb{X}$ 为 Cauchy seq. $\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

ex: 

$\mathbb{X}=\mathbb{R}^+$. given $\varepsilon>0$, $x_n=n$, 取 $N>\alpha$, $m,n>N \Rightarrow d(x_m,x_n)=d(m,n)<\varepsilon$

$\therefore$ $\{x_n\}$ 为 $(\mathbb{X},d)$ 中一 Cauchy seq.; 但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}n$ 在 $\mathbb{R}^+$ 中 D.N.E.

Riemann integral

- Riemann integral: f def. on $[a,b]$, P: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 称为 $[a,b]$ 上的一切

  割 partition; $M_i=\overset{\text{l.u.b.}}{\sup\limits_{x_{i-1}\leq x\leq x_i}}f(x)$, $m_i=\overset{\text{g.l.b.}}{\inf\limits_{x_{i-1}\leq x\leq x_i}}f(x)$; def. $U(p.f)=\sum M_i\Delta x_i$,

  $L(p.f)=\sum m_i\Delta x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$; $\overline{\int_a^b}f(x)dx=\inf\limits_{P}U(p.f)$, $\underline{\int_a^b}f(x)dx=\sup\limits_{P}L(p.f)$,

  if $\overline{\int_a^b}f(x)dx=\underline{\int_a^b}f(x)dx$, 则称 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积分, 以 $\int_a^b f(x)dx$ 表之, 称

  f 在 $[a,b]$ 上之 Riemann integral

1. P 为一 partition, $c\in[a,b]$, $P'=P\cup\{c\}$, then $U(p'.f)\leq U(p.f)$, $L(p'.f)\geq L(p.f)$
2. $P_1\subset P_2$, then $U(p_2.f)\leq U(p_1.f)$, $L(p_2.f)\geq L(p_1.f)$

3. $\underline{\int}_a^b f(x)dx \le \overline{\int}_a^b f(x)dx$

lemma　given $\varepsilon > 0$, if $\exists p$ s.t. $U(p.f) - L(p.f) < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ 存在

pf: $L(p.f) \le \underline{\int}_a^b f(x)dx \le \overline{\int}_a^b f(x)dx \le U(p.f)$, $U(p.f) - L(p.f) < \varepsilon \Rightarrow$

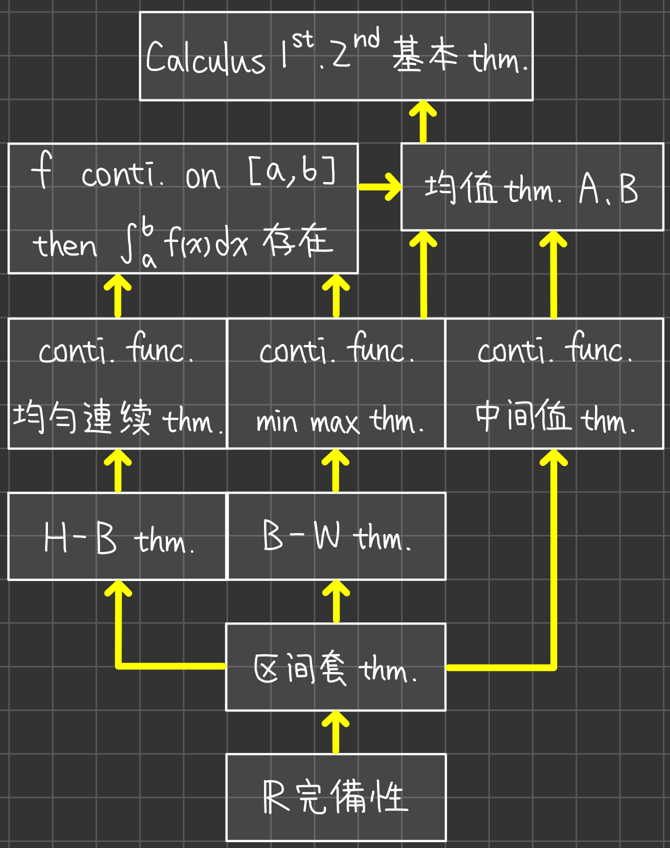
$\overline{\int}_a^b f(x)dx - \underline{\int}_a^b f(x)dx < \varepsilon$, ε 任意 $\Rightarrow \underline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^b f(x)dx$ $\therefore \int_a^b f(x)dx$ 存在

定理: f conti. on $[a,b]$, then $\int_a^b f(x)dx$ 存在

1. f conti. on $[a,b]$, $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(\xi_i)$,
$m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) = f(\eta_i)$

2. f conti. on $[a,b]$, ∴ 均匀連续, given $\varepsilon > 0$, $\exists \delta$ s.t. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$,
把 $[a,b]$ n 等分 s.t. $\frac{b-a}{n} < \delta$, 对此 P, $U(p.f) - L(p.f) = \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) - f(\eta_i)] \Delta x_i$
$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$; 依上述 lemma, $\int_a^b f(x)dx$ 存在

Calculus 基石



- Heine Borel thm. 引出 Compact
- $A \subset \mathbb{R}^n$ 称 A 为 open set if $\forall x \in A$, $\exists B_r(x) \subset A$, $B_r(x) = \{y \mid y \in \mathbb{R}^n, |y - x| < r\}$
- $A \subset \mathbb{R}^n$ 称 A 为 compact if $\forall \mathbb{F}$: family of open sets in $\mathbb{R}^n$ cover $A \Rightarrow$
$\exists$ finite open sets in $\mathbb{F}$ cover A