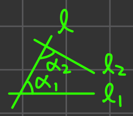
歐式平面幾何公理

1. 兩点連一線
2. 線段可任意延長
3. 給点 O 及線段長 r，可做一圓
4. 凡直角皆相等
5. 平行公理 

if $\alpha_1+\alpha_2<180^\circ$, then ℓ_1 and ℓ_2 在 ℓ 同側相交

   等價於 過線外一点，可做唯一直線，與已知直線平行 

- 点、線、面 為無定義名詞

- 微積分基本定理 I.II $\Leftarrow$ 均值定理 A.B $\Leftarrow$ 連續函數中間值定理、min max 值定理 $\Leftarrow$ 区间套定理、B-W定理 $\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ 完備性

  $\mathbb{R}$ 完備性：實數集 $S\subset\mathbb{R}$，α 為 S 上界 if $x\le\alpha$ $\forall x\in S$

  ，α 為 S 最小上界（上確界）if (i) α 為 S 上界 (ii) if β 為 S 上界 then $\alpha\le\beta$

$\mathbb{R}$ 完備性 (Completeness of real numbers)

I. $S\subset\mathbb{R}$，S 有上界，then S 有最小上界（未必在 S 內）

ex: $S=(0,1)$，最小上界 $1\notin S$

$S=(0,1]$，最小上界 $1\in S$

II. $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ (i) $\{a_n\}$ 為 遞增，即 $a_n\le a_{n+1}$ (ii) $\{a_n\}$ 有上界，即 $\exists k\in\mathbb{R}$ s.t. $a_n\le k$ $\forall n$

，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在 in $\mathbb{R}$，即：$\exists \ell\in\mathbb{R}$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$

- I $\equiv$ II

- 區間套定理：$\underbrace{I_n=[a_n,b_n]}_{\text{閉區間}}\subset\mathbb{R}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$ $\quad |I_n|$：I_n 的長度

  if $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$, then $\exists!\ x_0\in\mathbb{R}$ s.t. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n=\{x_0\}$

Def f is conti. at x_0 if $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

Def f is conti. on $[a,b]$ if f is conti. at x $\forall x\in[a,b]$

- Bolzano-Weierstrass 定理（由區間套定理）：任意有界seq. 可找收斂子seq.

連續函數中間值定理、min max 值定理 $\Leftarrow$ $\mathbb{R}$ 完備性

$\mathbb{R}$ 完備性

I. 任意有上界的 set 必有最小上界 $S \subset \mathbb{R}$ $\exists k$ s.t. $x \le k$ $\forall x \in S$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ (i) $x \le \alpha$ $\forall x \in S$ (ii) $x \le \beta$ $\forall x \in S \Rightarrow \alpha \le \beta$

II. 遞增 sequence，有上界，則 lim 存在

$\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ (i) $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n = 1, 2, \cdots$ (ii) $\exists k \in \mathbb{R}$, s.t. $a_n \le k$ $\forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 in $\mathbb{R}$

○ 區間套定理：$I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$，$|I_n| = b_n - a_n$，if $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$

，$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$，then $\exists!$ $x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$

pf: $I_n \supset I_{n+1}$，$a_n \le a_{n+1}$，$b_n \ge b_{n+1}$ 又 $a_n \le b_1$，依 $\mathbb{R}$ 完備性，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$

同理，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta \in \mathbb{R}$、$\beta - \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

$\therefore \alpha = \beta$ Let $x_0 = \alpha = \beta$ then $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$

○ 連續函數中間值定理：f 在 $[a,b]$ 上 conti.，$f(a) \cdot f(b) < 0$

，then $\exists$ $c \in (a,b)$ s.t. $f(c) = 0$

pf: 不妨設 $f(a) < 0$、$f(b) > 0$. Let $a_1 = a$、$b_1 = b$，$I_1 = [a_1, b_1]$

取 $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ (i) $f(m_1) = 0$，$c = m_1$ ※ (ii) $f(m_1) < 0$ 取 $a_2 = m_1$，$b_2 = b_1$

，$I_2 = [a_2, b_2]$ (iii) $f(m_1) > 0$ 取 $a_2 = a_1$，$b_2 = m_1$，$I_2 = [a_2, b_2]$

$|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$

重複於 I_2，得區間套 $I_3 = [a_3, b_3]$，$f(a_3) < 0$、$f(b_3) > 0$，$|I_3| = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{b-a}{2^2}$

類推無限次後 (i) $\exists m_k$ s.t. $f(m_k) = 0$，then 取 $c = m_k$ ※ (ii) $f(m_k) \ne 0$ $\forall k$

得區間套 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$，$I_n = [a_n, b_n]$、$|I_n| = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0$ as $n \to \infty$

、$f(a_n) < 0$、$f(b_n) > 0$ 依區間套定理 $\exists!$ $x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$

$x_0 \in I_n \subset [a,b]$，$f$ conti. on $[a,b]$ $\therefore$ f conti. at x_0

又 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$

$\therefore f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \underset{\overset{\wedge}{0}}{f(a_n)} \le 0$；$f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \underset{\overset{\vee}{0}}{f(b_n)} \ge 0$ $\therefore f(x_0) = 0$ 得證

lemma (引理) f is conti. on $[a,b]$, then f 在 $[a,b]$ 有界

即 $\exists k \in \mathbb{R}$ s.t. $|f(x)| \le k \quad \forall x \in [a,b]$

pf: 只需証 f 有上界即可，即 $\exists M$ s.t. $f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

若不然，$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [a,b]$ s.t. $f(x_n) > n$

有界 seq. $\{x_n\} \subset [a,b]$，依 Bolzano - Weierstrass 定理

$\{x_n\}$ 有收斂子 seq. $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in \mathbb{R}$

$[a,b]$ 为閉區間 $\therefore x_0 \in [a,b]$，f is conti. at x_0

$\therefore f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ge \lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$ 爆掉！ $f(x_0)$ 为有窮值！

- Bolzano - Weierstrass 定理：$\{a_n\}$ 为有界 seq. $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ 有收斂子 seq.

即 $\exists a_{n_k}$ s.t. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = x_0$

pf: Let set $S = \{a_n \mid n = 1, 2, \cdots\}$

(i) S 为有窮集 ex: $\{a_n\} = \{0,1,0,1,0,\cdots\}$，$S = \{0,1\}$ (S 中至少有一元素在 seq. 中重複出現無窮多次) 叫出此 seq. 即得收斂子 seq.

(ii) S 为無窮集 Let $a_1 = a$, $b_1 = b$, $I_1 = [a_1, b_1]$，任取 $a_{n_1} \in S \cap I_1$，把 I_1 二等分

，其中必有一等分含 S 中無窮多元素，令其为 $I_2 = [a_2, b_2]$，$|I_2| = \frac{b-a}{2}$

，任取 $a_{n_2} \in S \cap I_2$，$n_2 > n_1$

重複於 I_2，得區間套 $I_3 = [a_3, b_3]$，$|I_3| = \frac{b-a}{2^2}$，I_3 含 S 中無窮多元素

，任取 $a_{n_3} \in S \cap I_3$，$n_3 > n_2$

類推無限次後，得 seq. $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$

依區間套定理 $\exists!\ x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$

$a_{n_k} \in S \cap I_k$，$x_0 \in I_k$ $\therefore |a_{n_k} - x_0| \le |b_k - a_k| = \frac{b-a}{2^{k-1}} \to 0$ as $k \to \infty$

故 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = x_0$ 得証

○ 連續函數最大、最小值定理：

f 在 $[a,b]$ 上 conti.，then f 在 $[a,b]$ 上有最大、最小值

即 $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ s.t. $m = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = M \quad \forall x \in [a,b]$

pf：據上述 lemma、 Set $A = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ 上方有界，依 $\mathbb{R}$ 完備性，A 有最小上界

，令其為 M、欲証：$\exists x_2 \in [a,b]$ s.t. $f(x_2) = M$

M 為最小上界，$M - \frac{1}{n}$ 非 A 的上界 $\forall n = 1,2,3,\cdots$ $\therefore \exists x_n \in [a,b]$ s.t. $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$

$\{x_n\} \subset [a,b]$ bounded，依 B-W 定理 $\{x_n\}$ 有收斂子 seq. $\{x_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_2 \in \mathbb{R}$

$x_{n_k} \in [a,b]$，$[a,b]$ 為閉區間 $\therefore x_2 \in [a,b]$（開區間無此性質） $\therefore f(x_2) \le M$

又 f conti. at x_2 $\therefore f(x_2) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \ge \lim\limits_{k\to\infty}(M - \frac{1}{n_k}) = M$ $\therefore f(x_2) = M$

min of f = max of $-f$ $\Rightarrow$ f 有 min

Remark 開區間無此性質

ex: $f(x) = \frac{1}{x}$，$0 < x < 1$ (i) f unbounded (ii) f 無最大、最小值

$\mathbb{R}$ 建構

長方形 area

- 定义：$1\,\square_{1\text{ unit}} = 1$ 平方 unit

  定理：$b\,\square_{a\text{ unit}} = a\cdot b$ 平方 unit

  Dedekind cut ：所有 cut 为 $\mathbb{R}$

  有理增 seq.：$X^{\perp}$ 表 X 的所有上界  $X^{\perp}=\{\alpha \mid \alpha\in\mathbb{Q}, \alpha$ 为 X 的上界$\}$

  若 $X^{\perp}=Y^{\perp}$ 則稱 $X\sim Y$ 同一 class ，所有 class 为 $\mathbb{R}$

  令 F 为一切 $\mathbb{Q}$ 中所有的有界增 seq. ，把 F 分成許多 class S ，S 即为 $\mathbb{R}$

Def 加法：

$\xi、\eta\in\mathbb{R}$ 在 ξ 所相应 class 中任选 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$

在 η 所相应 class 中任选 $Y=\{y_1,y_2,\cdots\}$ ，則 $X+Y=\{x_1+y_1, x_2+y_2,\cdots\}$ ，表一 $\mathbb{Q}$ 增 seq. 且有上界 ，$X+Y$ 屬於 class ζ ，def $\xi+\eta=\zeta$

- Well-define (合理 def) 问题：$X、X'$ 同 class 決定 ξ ，$Y、Y'$ 同 class 決定 η

  問：$X+Y$ 与 $X'+Y'$ 同 class 吗？ 即：$(X+Y)^{\perp}\overset{?}{=}(X'+Y')^{\perp}$

  pf: 令 $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$ $Y=\{y_1,y_2,\cdots\}$ ，$X'=\{x_1',x_2',\cdots\}$ $Y'=\{y_1',y_2',\cdots\}$

  then $X+Y=\{x_1+y_1, x_2+y_2,\cdots\}$ ，$X'+Y'=\{x_1'+y_1', x_2'+y_2',\cdots\}$

  欲证：$(X+Y)^{\perp}=(X'+Y')^{\perp}$. 設 α 为 $X+Y$ 的上界 ，即 $x_n+y_n\le\alpha\ \forall n$

  固定 k (i) $n\le k$ ，$x_k+y_n\le x_k+y_k\le\alpha$ (ii) $n>k$ ，$x_k+y_n\le x_n+y_n\le\alpha$

  $x_k+y_n\le\alpha\ \forall n$ ，$y_n\le\alpha-x_k\ \forall n$ ，$\alpha-x_k$ 为 Y 的上界 ，$Y\sim Y'$ $\therefore\ \alpha-x_k$ 为 Y' 的上界 ，$y_n'\le\alpha-x_k\ \forall n$ ，$x_k+y_n'\le\alpha\ \forall n$ 上式对一切 k 成立 ，

  固定 n ，$x_k\le\alpha-y_n'\ \forall k$ ，$\alpha-y_n'$ 为 X 的上界 ，$X\sim X'$ $\therefore\ x_k'\le\alpha-y_n'\ \forall k$

  取 $k=n$ 得 $x_n'+y_n'\le\alpha$ $\therefore\ \alpha$ 为 $X'+Y'$ 的上界 ，同理若 β 为 $X'+Y'$ 的上界 ，

  則 β 为 $X+Y$ 的上界 $\therefore\ X+Y\sim X'+Y'$

○ $\mathbb{R}$ 加法满足

1. 交换律 $\xi+\eta=\eta+\xi$

2. 结合律 $(\xi+\eta)+\zeta = \xi+(\eta+\zeta)$

3. $\exists$ 0 元素，取 $\mathbb{O} = \{0,0,0,\cdots\}$ 所表 class 则 $\xi+\mathbb{O} = \xi \quad \forall \xi\in\mathbb{R}$

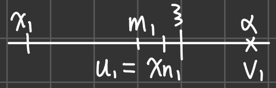
4. $\exists$ 负元素(加法反元素) $\xi\in\mathbb{R}$, then $\exists\, \eta\in\mathbb{R}$ s.t. $\xi+\eta=\mathbb{O}$ (减法)

4pf: $\xi\sim\mathbb{X}=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 

$\alpha\in\mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{X}$ 上界，令 $m_1=\frac{x_1+\alpha}{2}$

(i) m_1 为 $\mathbb{X}$ 上界 

令 $u_1=x_1$, $v_1=m_1$

(ii) m_1 非 $\mathbb{X}$ 上界 

$\exists\, x_{n_1}\in\mathbb{X}$, s.t. $m_1<x_{n_1}$ 令 $u_1=x_{n_1}$, $v_1=\alpha$

重複上述論调於 u_1、v_1 得 $u_2=x_{n_2}$, $n_2\ge n_1$ and v_2 ; u_2 非 $\mathbb{X}$ 上界, v_2 为 $\mathbb{X}$ 上界, $v_2-u_2\le\frac{v_1-u_1}{2}$

做無穷次後 得 $\mathbb{U}=\{u_1,u_2,\cdots\}\subset\mathbb{X}$, $\mathbb{U}\sim\mathbb{X}$, $\{v_1,v_2,\cdots\}$, v_n 为 $\mathbb{X}$ 上界

$v_n-u_n\le\frac{v_1-u_1}{2^{n-1}}\to 0$ as $n\to\infty$; v_n 递减 $\therefore -v_n$ 递增, 令 $\mathbb{V}=\{-v_1,-v_2,\cdots\}$

为有界增 seq., 令 η 为 $\mathbb{V}$ 所在 class 相应的 $\mathbb{R}$, 則 $\mathbb{U}+\mathbb{V}=\{u_1-v_1, u_2-v_2,\cdots\}$,

$v_n-u_n\to 0$ $\therefore \mathbb{U}+\mathbb{V}$ 与 $\mathbb{O}$ 同 class $\therefore \xi+\eta\sim\mathbb{U}+\mathbb{V}\sim\mathbb{O}$ 即 $\xi+\eta=0$

○ 大小関係

ξ、$\eta\in\mathbb{R}$, $\xi\sim\mathbb{X}$, $\eta\sim\mathbb{Y}$ 若 $\mathbb{X}^\perp\supset\mathbb{Y}^\perp$ def $\xi\le\eta$, 若 $\xi\le\eta$, 但 $\xi\ne\eta$ 称

$\xi<\eta$ or $\eta>\xi$

○ 三一律

給定 ξ、$\eta\in\mathbb{R}$ 則 (i) $\xi<\eta$ (ii) $\xi=\eta$ (iii) $\xi>\eta$ 三者中唯一成立

○ 乘法

$\xi . \eta\in\mathbb{R}$ (i) $\xi=0$ or $\eta=0$ def $\xi\cdot\eta=0$

(ii) $\xi>0$ 且 $\eta>0$; $\xi\sim\mathbb{X}=\{x_1,x_2,\cdots\}$, $x_n>0\ \forall n$; $\eta\sim\mathbb{Y}=\{y_1,y_2,\cdots\}$, $y_n>0\ \forall n$

$\xi\cdot\eta \overset{def}{=} \mathbb{X}\cdot\mathbb{Y}=\{x_1y_1,x_2y_2,\cdots\}\in F$ 所屬 class 相应之 $\mathbb{R}$

(iii) $\xi>0$、$\eta<0$; $\xi\cdot\eta\overset{def}{=}-\xi\cdot(-\eta)$; $\xi<0$、$\eta>0$ 則反之

(iv) $\xi<0$、$\eta<0$; $\xi\cdot\eta\overset{def}{=}(-\xi)\cdot(-\eta)$

- Well-defined 問題 仿照加法方法可证得
- $\mathbb{R}$ 乘法滿足 $\xi、\eta、\zeta \in \mathbb{R}$

1. 交換律 $\xi\cdot\eta = \eta\cdot\xi$
2. 結合律 $(\xi\cdot\eta)\cdot\zeta = \xi\cdot(\eta\cdot\zeta)$
3. 分配律 $\xi(\eta+\zeta) = \xi\eta+\xi\zeta$
4. $\exists$ 乘法單位元素：$1=\{1,1,\cdots\}\in F'$，$\xi\cdot1=\xi \quad \forall\xi\in\mathbb{R}$
5. 乘法反元素：$\xi\neq0 \Rightarrow \exists\eta\in\mathbb{R}$ s.t. $\xi\cdot\eta=1$ (除法)

Spf: 不妨 let $\xi>0$，令 $\xi\sim X=\{x_1,x_2,\cdots\}$ $x_n>0\ \forall n$，$x_n\uparrow$ $\therefore -\frac{1}{x_n}\uparrow$ 有界

$\therefore \{-\frac{1}{x_1},-\frac{1}{x_2},\cdots\}\in F'$；令 ζ 为 $\{-\frac{1}{x_1},-\frac{1}{x_2},\cdots\}$ 所相应之 $\mathbb{R}$

令 η 为 ζ 的加法反元素 $\eta+\zeta=0$；由分配律 $0=\xi(\eta+\zeta)=\xi\eta+\xi\zeta$

$(\xi\cdot\zeta\sim\{-1,-1,\cdots\}=-1)=\xi\eta+(-1)$ $\therefore \xi\cdot\eta=1$

$\mathbb{R}$ 完備性

A: $a_n \in \mathbb{R}$ (i) $a_n \le a_{n+1}$ (ii) $\exists k$ s.t. $a_n \le k$ $\forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n$ 存在 in $\mathbb{R}$

B: $S \subset \mathbb{R}$ if S 有上界, then S 有最小上界

定理：遞增實數列集, if 有上界, then 有最小上界 (l.u.b.)

pf: 設 $\xi_1 \le \xi_2 \le \xi_3 \le \cdots$ 为給定實數集 ($\mathbb{R}$ set)

(i) if $\exists N$ s.t. $\xi_{n+1} = \xi_n$ $\forall n \ge N$ then ξ_N 即为 l.u.b.

(ii) 不等号在 seq. 中無窮次出现，移除相等的项，得一新 seq. set 此二 set 上界集一樣，因此不妨一開始設 seq. 为嚴格递增 $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots$；令 $\mathbb{X}_n$ 为 ξ_n 的代表 $\xi_1 : \mathbb{X}_1 = \{x_{11}, x_{12}, \cdots\}$, $\xi_2 : \mathbb{X}_2 = \{x_{21}, x_{22}, \cdots\}$, $\cdots$；取 $y_1 = x_{11}$, $\because \xi_2 > \xi_1$ $\therefore \exists x_{2n_2} > x_{11}$ 令 $y_2 = x_{2n_2}$；$\because \xi_3 > \xi_2$ $\therefore \exists x_{3n_3} > x_{2n_2}$, 令 $y_3 = x_{3n_3}$, 依此類推無窮次，得 $\mathbb{R}$ 增 seq. $y = \{y_1, y_2, \cdots\}$, 令 α 为 y 所相应之 $\mathbb{R}$, α 即 l.u.b.

此定理 $\Rightarrow$ A 版 $\mathbb{R}$ 完備性, α 即为 $\{a_n\}$ 的 limit

A 版 $\Rightarrow$ 区间套定理

Bpf: $S \subset \mathbb{R}$, S 有上界, 令 b 为 S 上界, 在 S 中任取一点 a, 令 $a_1 = a$, $b_1 = b$

取 $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ (i) m_1 为 S 上界, 令 $a_2 = a_1$, $b_2 = m_1$ (ii) m_1 非 S 上界, $\exists x_2 \in S$ s.t. $m_1 < x_2$, 令 $a_2 = x_2$, $b_2 = b_1$, 令 $I_2 = [a_2, b_2]$, 則 $|I_2| = b_2 - a_2 \le \frac{b_1 - a_1}{2}$；重複操作於 I_2, 依此類推無窮次, 得区間套 $I_n = [a_n, b_n]$, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, $|I_n| = |a_n - b_n| \le \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \to 0$ as $n \to \infty$, 依区間套定理 $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ s.t. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x_0\}$, x_0 即为 S 的 l.u.b.

- $\mathbb{R}$ 系的基本性質

定理：Archimedean property：$a > 0$、$b > 0$、$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $na > b$

pf: 若不然, $na < b$ $\forall n = 1, 2, \cdots$, 令 $S = \{na \mid n = 1, 2, \cdots\}$, 則 b 为 S 上界, S 有上界 $\therefore S$ 有 l.u.b., 令其为 α, 於是 $na \le \alpha$ $\forall n = 1, 2, \cdots$

從而 $(n+1)a \le \alpha \quad \forall n=1,2,\cdots$，得 $na \le \alpha - a \quad \forall n=1,2,\cdots$

表示 $\alpha - a$ 为 S 上界，$\alpha - a < \alpha$ (l.u.b.)，矛盾

○ 系1：$x>0 \Rightarrow \exists n$ s.t. $x<n$

系2：$\varepsilon>0 \Rightarrow \exists n$ s.t. $\frac{1}{n}<\varepsilon$

系3：$x>1 \Rightarrow \exists m,n$ s.t. $m<x<n$

定理：$x\ge 1$，$x\in\mathbb{R} \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$ s.t. $n\le x<n+1$

$\mathbb{N}$系的良序定理 Well-order principle：$\mathbb{N}$系中的非空子集合必有最小元素

○ 用有上界的遞增$\mathbb{Q}$ seq. set 所組成的 class def. $\mathbb{R}$ 以下为重講

lemma $\xi,\eta\in\mathbb{R}$，if $\xi<\eta$，$\xi \sim \overset{\text{有理增seq.}}{\mathbb{X}} = \{x_1,x_2,\cdots\}$，$\eta\sim \mathbb{Y}=\{y_1,y_2,\cdots\}$

$\Rightarrow \exists y_j\in\mathbb{Y}$ s.t. $x_n<y_j \ \forall n$

pf: 設 $\mathbb{X}^\perp$ 为 ξ 的上界 set，$\mathbb{Y}^\perp$ 为 η 的上界 set，由於 $\xi<\eta \Rightarrow \mathbb{Y}^\perp\subset\mathbb{X}^\perp$

$\Rightarrow \exists\alpha\in\mathbb{Q}$，$\alpha\in\mathbb{X}^\perp$，$\alpha\notin\mathbb{Y}^\perp \Rightarrow$ (i) α 非 $\mathbb{Y}$ 上界 $\therefore \exists y_j\in\mathbb{Y}$，$y_j>\alpha$

(ii) α 为 $\mathbb{X}$ 上界 $\therefore x_n<\alpha \ \forall x_n\in\mathbb{X}$；(i)(ii) $\Rightarrow y_j>x_n \ \forall x_n\in\mathbb{X}$

定理 4-1：任意$\mathbb{R}$系有界增 seq. 必有 l.u.b.

pf: 設 $S=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots\}$，$\xi_n\in\mathbb{R}$，$\xi_n\le k$，$k\in\mathbb{R}$ (i) if $\exists N$ s.t. $\xi_n=\xi_{n+1}$

$\forall n\ge N$，ξ_N 即 S 中最大元素，此元素即为 S 之 l.u.b.

(ii) if S 含無窮多元素 $\xi_1\le\xi_2\le\cdots$，去掉相等元素僅留其一，得新 seq. $\{\xi_n\}$

$\xi_1<\xi_2<\cdots$ 此新 seq. set 与 S 有 same 上界 set，令 $\xi_1\sim\mathbb{X}_1=\{x_{11},x_{12},\cdots\}$

，$\xi_2\sim\mathbb{X}_2=\{x_{21},x_{22},\cdots\}$，$\cdots$，取 $y_1=x_{11}$，$\xi_1<\xi_2 \ \exists x_{2j}$ s.t. $x_{2j}>x_{1n} \ \forall n$

令 $y_2=x_{2j}$，$\xi_2<\xi_3 \ \exists x_{3j}$ s.t. $x_{3j}>x_{2n} \ \forall n$，令 $y_3=x_{3j}$

依此類推無窮次，得$\mathbb{Q}$增 set $\mathbb{Y}=\{y_1,y_2,\cdots\}$，令 ξ 为 $\mathbb{Y}$ 所屬 class

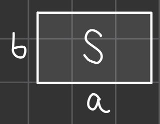
所代表$\mathbb{R}$，則 $\xi_n<\xi \ \forall n$，ξ 即为 S 之 l.u.b.

$\mathbb{R}$ 完備性

A: $a_n\in\mathbb{R}$ (i) $a_n\uparrow$ (ii) $\exists k$ s.t. $a_n\le k \ \forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在 in $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\xi$

B: $S\subset\mathbb{R}$ if S 有上界，then S 有最小上界

○ 長方形 area 公式



則 $|S| = a \cdot b$

1. $a、b \in \mathbb{N}$ ：純數格子

2. $a.b \in \mathbb{Q}$ ： $a = \frac{q}{p}$ 、 $b = \frac{s}{r}$ ，利用 1. 數 qs 格子再除 pr 即可

3. $a.b \in \mathbb{R}$ ： $\exists\ \mathbb{Q}$ seq. $a_n \uparrow a$, $a_n' \downarrow a$, $b_n \uparrow b$, $b_n' \downarrow b$; $S_n \subset S \subset S_n'$

$\therefore a_n b_n = |S_n| < |S| < |S_n'| = a_n' b_n'$, $a_n b_n$ 与 $a_n' b_n'$ 皆 $\to ab$

$\Rightarrow |S| = ab$

○ $\mathbb{R}$ 系的基本性質

定理： Archimedean property ： $0 < a < b$ 、 $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $na > b$

pf: 若不然， $na < b\ \forall n = 1, 2, \cdots$ ，令 $S = \{na \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中增 seq.

依定理 4-1 ， S 有 l.u.b. α ， $na \le \alpha\ \forall n = 1, 2, \cdots$ ，

$(n+1)a \le \alpha\ \forall n = 1, 2, \cdots$ ， $na \le \overset{\text{上界}}{\alpha - a}\ \forall n = 1, 2, \cdots$ ，

α 为 l.u.b. $\Rightarrow \alpha \le \alpha - a$ 不可能 ($\because a > 0$)

○ 系1： $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $x < n$

系2： $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $\frac{1}{n} < \varepsilon$

系3： $\forall x \in \mathbb{R}$ ， $x \ge 1$ ， $\exists m, n \in \mathbb{N}$ s.t. $m \le x < n$

定理： $x \in \mathbb{R}$, $x \ge 1 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n \le x < n+1$

良序原理 Well ordering principle

$\mathbb{N}$ ：自然數集 $S \subset \mathbb{N}$ ， $S \ne \phi \Rightarrow S$ 中有最小元素

$S \ne \phi\ \exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n \in S$ ，從 1 開始往後檢查，第一個符合的元素即最小元素

定理pf: 由系1， $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $x < n$ ，令 $S = \{n \mid n > x, n \in \mathbb{N}\}$ ，依 W.O.P.

S 中有最小元素 p ， $x < p \Rightarrow p - 1 \notin S$ $\therefore p - 1 \le x$ ，

取 $n = p - 1$ ，則 $n \le x < n+1$