集合的基數 Cardinality

Def 給定二 set $A.B$，称 $A.B$ 有 same 基數，if $\exists\varphi$，$\varphi: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$

Def 称一 set 为 可數/可列 (Countable) 若其基數与 $\mathbb{N}$ 同，即 $\exists\varphi: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N}$

定理 3-1：$(0,1)$ 中的 $\mathbb{Q}$ 可數

pf: $x\in(0,1)$，$x=\frac{q}{p}$，$p.q$ 互质，$0<q<p$；$p=2$ 有 $\frac{1}{2}^{1}$，$p=3$ 有 $\frac{1}{3}^{2}\cdot\frac{2}{3}^{3}$

$p=4$ 有 $\frac{1}{4}^{4}\cdot\frac{3}{4}^{5}$，$p=5$ 有 $\frac{1}{5}^{6}\cdot\frac{2}{5}^{7}\cdot\frac{3}{5}^{8}\cdot\frac{4}{5}^{9}$，$\cdots$；將出现之 $\mathbb{Q}$ 依序编号，则 $(0,1)$

中的每一個 $\mathbb{Q}$ 都可唯一赋与一号码，即 $\exists\varphi: (0,1)$ 中 $\mathbb{Q} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{N}$ set

$\therefore$ 可數

○ $\mathbb{Q}$ 可數

定理 3-2：$(0,1)$ 中的 $\mathbb{R}$ 不可數

Cantor's Diagonal process

pf: 令 $A=(0,1)$ 中的 $\mathbb{R}$ set，若 A 可數，令其为 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$，以十進位分别

表示 x_n，$x_1=0.\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\cdots$，$x_2=0.\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\cdots$，$\cdots$；

为了清楚论证，不取進位表示。ex: $\frac{1}{4}=0.25\overline{0}$（取）$=0.24\overline{9}$（捨）(進位表示)

取 $\beta_n=\begin{cases}5 & \text{if } \alpha_{nn}\neq 5\\ 6 & \text{if } \alpha_{nn}=5\end{cases}$ (取法不只一種)，则 $\beta_n\neq\alpha_{nn}\ \forall n$，令 $y=0.\beta_1\beta_2\cdots$，

则 $y\neq x_n\,(\because \beta_n\neq\alpha_{nn})\ \forall n$，又 $y\in(0,1)$，矛盾

○ 区间套证 $[0,1]$ 中的 $\mathbb{R}$ 不可數

pf: 令 $A=[0,1]$ 中的 $\mathbb{R}$ set，若 A 可數，令其为 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$，

將 $[0,1]$ 三等分，其中至少一份不含 x_1 (x_1 可能在边界上)，取不含的那份

为 I_1；將 I_1 三等分，其中至少一份不含 x_2，取不含的那份为 I_2；

依此類推無穷次，得区间套 $I_n=[a_n,b_n]$，$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots$，

$|I_n|=|a_n-b_n|=\frac{b_1-a_1}{3^{n-1}}\to 0$ as $n\to\infty$，依区間套定理

$\exists x_0\in\mathbb{R}$ s.t. $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{x_0\}$；$x_0\neq x_n\ \forall n$，又 $x_0\in[0,1]$，矛盾

幾个基本定理

定理 3-3： if A 为可數集，$B \subset A$，then B 为可數集（有穷集亦视为可數集）

pf: (i) if B 为有穷 set，理所當然

(ii) if B 为无穷 set，令 $A=\{x_1, x_2, \cdots\}$，由 $x_1, x_2, \cdots$ 依序检验

第一个也出现在 B 中的元素令其为 x_{n_1}，再從 x_{n_1+1} 继续检验；

第二个也出现在 B 中的元素令其为 x_{n_2}；依此類推無穷次，

得 $B=\{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots\}$，故 B 为可數集

定理 3-4： if $A_1, A_2, \cdots$ 为可數集，then $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也为可數集

pf: 不妨设每个 A_n 都是无穷可數，令 $A_1=\{x_{11}, x_{12}, \cdots\}$，

$A_2=\{x_{21}, x_{22}, \cdots\}$，$\cdots$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, \cdots\} \\
A_2 &= \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, \cdots\} \\
A_3 &= \{x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, \cdots\} \\
A_4 &= \{x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}, \cdots\}
\end{aligned}
$$

如箭头所示，$\bigcup A_n$ 中的元素可依序编号，故为可數

Remark if A_i, A_j 中有 same 元素，则 $\bigcup A_n$ 可對应到 $\mathbb{N}$ 的子 set，故亦为可數

Def $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

系： A, B 可數 则 $A \times B$ 可數

pf: 使用定理 3-4 之箭头证法即可

Def 给定集合 $A_1, A_2, \cdots$

令 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, \cdots, n\}$ (finite product)

$\prod_{n=1}^{\infty} A_n = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid a_n \in A_n, n \in \mathbb{N}\}$ (infinite product)

定理 3-5： $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 无穷可數，则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 无穷可數

pf: $A_1 \times A_2 \times A_3 = \overbrace{(A_1 \times A_2)}^{\text{可数}} \times A_3 =$ 可数；依歸纳法，$\prod_{i=1}^{n} A_i$ 可数

定理[3-6]：$S = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots$ 不可数，基数与 $\mathbb{R}$ 同

观察 2進位：$x\in(0,1)$，$x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$，$\alpha_i = 0$ or 1

$(0,1)$ 相當於 $\prod_{n=1}^{\infty} B_n$，$B_n = \{0,1\}$

显然 S 要比 $(0,1)$ 大，故不可数

pf: $x\in S$，$x=(n_1,n_2,\cdots)$，將此 seq. $\xrightarrow{1\text{ to }1,\text{ onto}}$ 對应到 $(0,1)$ 上

(i) $y\in(0,1)$ 考慮 y 的 2進位表示，$(n_1,n_2,\cdots)\to 0.\underbrace{0\cdots1}_{n_1\text{位}}\underbrace{0\cdots1}_{n_2\text{位}}0\cdots$

需讓 1 出现无穷多次 $\frac{1}{2} = 0.1\overset{\text{捨}}{\overline{0}} = 0.0\overset{\text{取}}{\overline{1}}$，ex: $(1,2,3,\cdots)\to 0.\underbrace{1}_{1}\underbrace{01}_{2}\underbrace{001}_{3}\cdots$，

此对应为 1 to 1，onto，故 S 的基数与 $(0,1)$ 中 $\mathbb{R}$ 同

S 的基数与 $\mathbb{R}$ 亦同，只需將上述对应的第一个数表为 $\mathbb{R}$ 中的整数部分

(利用简單操作可將 $\mathbb{N}\xrightarrow[\text{onto}]{1\text{ to }1}\mathbb{Z}$)(以 10 進位表示)，之後的数照原方法操作得小数部分(以 2 進位表示)，再將其组合即可

系：A_n 无穷可数，$n=1,2,\cdots$，則 $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ 的基数与 $\mathbb{R}$ 同

问：$T = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots$ 多大？

令 $A = \{(x_1,0,0,\cdots)\mid x_1\in\mathbb{R}\}$，$A\subset T$，$A$ 与 $\mathbb{R}$ 无異，显然 T 比 $\mathbb{R}$ 大太多!

but 實際上，T 与 $\mathbb{R}$ 基数同!

定理[3-7]：$T = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots$，基数与 $\mathbb{R}$ 同

pf: $X\in T$，$X=\{x_1,x_2,\cdots\}$，$x_i\in\mathbb{R}$，將此 seq. $\xrightarrow{1\text{ to }1,\text{ onto}}$ 對应到 $(0,1)$ 上

(i) 由定理 3-6，$S = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots$ 与 $\mathbb{R}$ 同基数，即每个 x_n 都相应一个 $\mathbb{N}$ seq.，$x_n\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}(k_{n1},k_{n2},\cdots)$

(ii) 列表成 $[k_{ij}]$ 无穷方陣，令 $A(X_1,X_2,\cdots)$ 表此无穷方陣，M 表一切 $\mathbb{N}$ 所成无穷方陣，$A:(X_1,X_2,\cdots)\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}M$

(iii) 使用箭头法將 $A(X_1,X_2,\cdots)$ 依序排成一整数列 $(k_{11},k_{12},k_{21},\cdots)\in S=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\cdots$，此对应也为 1 to 1，onto

(iv) 由 (ii)、(iii) $T\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}\prod_{n=1}^{\infty}S_n\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}M\xrightarrow[\text{onto}]{1-1}S$ $\therefore$ T 和 S 是对射的

故 T 与 S 基数同，S 与 $\mathbb{R}$ 基数同 $\therefore$ T 与 $\mathbb{R}$ 基数同

问：$A \supset B \supset C$，$A \sim C$（$\sim$ 表 1 to 1, onto），则 $B \sim A \sim C$？

Ans：Schröder–Bernstein 定理

∘ $\tan x : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}$, $(0,1) \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ∴ $(0,1) \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \mathbb{R}$

ex: $\ell^2 = \{(x_1,x_2,\cdots) \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$, $\mathbb{x} = (x_1,x_2,\cdots)$ 表 ℓ^2 中的点

$\|\mathbb{x}-\mathbb{y}\|^2 \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (x_n-y_n)^2 < \infty$

$(\mathbb{x},\mathbb{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ inner product

Def $\mathbb{x} \perp \mathbb{y} \iff (\mathbb{x},\mathbb{y}) = 0$ 垂直概念

为一種 Hilbert space

问: ℓ^2 的基数为何?

观察: $A = \{(x_1,0,0,\cdots) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R} \sim A \subset \ell^2 \subset T$ ($\mathbb{R} \sim A$ 表 $\mathbb{R}$ 与 A 同基数)

, $T \sim \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} \ell^2 \sim \mathbb{R}$ 有穷世界成立。无穷世界成立吗?

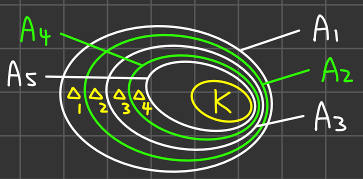
即: $A \supset B \supset C$, $A \sim C \overset{?}{\Rightarrow} A \sim B \sim C$; Cantor 用 Axiom of Choice 证之

∘ C.D.S.B 定理 (不需 Axiom of Choice)

$A \supset B \supset C$, $A \sim C \Rightarrow A \sim B \sim C$

pf: (剥洋葱法) (i) 内映造葱: 设 $f: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} C$, 令 $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C$

$A_4 = f(A_2) \subset A_3$, $A_5 = f(A_3) \subset A_4$, $A_6 = f(A_4) \subset A_5$



$A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim A_7 \sim \cdots$

$A_2 \sim A_4 \sim A_6 \sim A_8 \sim \cdots$

令 $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $\Delta_n = A_n - A_{n+1}$;

(ii) 剥葱: $A_1 \sim A_3$, $A_2 \sim A_4 \Rightarrow \Delta_1 = A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4 = \Delta_3$

, $A_2 \sim A_4$, $A_3 \sim A_5 \Rightarrow \Delta_2 = A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5 = \Delta_4$, 依此類推无穷次, 有

$\Delta_1 \sim \Delta_3 \sim \cdots$ (奇数層同基) , $\Delta_2 \sim \Delta_4 \sim \cdots$ (偶数層同基)

$A = A_1 = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \cdots \cup K$, $B = A_2 = \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4 \cup \cdots \cup K$

令 $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \Delta_1 \cup \Delta_3 \cup \Delta_5 \cup \cdots \\ x & \text{other} \end{cases}$, 则 $g: A \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ ∴ $A \sim B \sim C$

Remark $f: K \to K$, $x \in K = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow x \in A_n \ \forall n \Rightarrow f(x) \in A_{n+2} \ \forall n$

$\Rightarrow f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = K$ ∵ $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$

- Schröder-Bernstein 定理

$A\sim B^*\subset B$，$B\sim A^*\subset A$，则 $A\sim B$

pf: $B^*\subset B$，$B\sim A^*\subset A \Rightarrow B^*\sim A^{**}\subset A^*$，依假设 $A\sim B^*$ $\therefore A\sim A^{**}$

而 $A\supset A^*\supset A^{**}$，依定理 $A\sim A^*\sim A^{**}$ $\therefore A\sim B$

- G. König 的证明(溯源法)

pf: 设 $f: A\to B^*\subset B$，$g: B\to A^*\subset A$

(i) $x\in A$ 称 x 的源头在A中，若 $x\to g^{-1}(x)\to f^{-1}\circ g^{-1}(x)\to g^{-1}\circ f^{-1}\circ g^{-1}(x)$ $\to\cdots$，若在 finite 步内於A中找到源头(在A中停止)，称 x 源头在A中

(ii) $x\in A$，若在 finite 步内於B中找到源头(在B中停止)，称 x 源头在B中

(iii) $x\in A$，若互映 or 无穷上溯，称源头不明

令 $A_A=\{x\in A, x\text{源头在A中}\}$、$A_B=\{x\in A, x\text{源头在B中}\}$、

$A_\infty=\{x\in A, x\text{源头不明}\}$，则 $A=A_A\cup A_B\cup A_\infty$，$A_A$、$A_B$、$A_\infty$ 互不相交

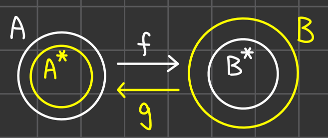
同理於B，$B=B_A\cup B_B\cup B_\infty$，$B_A$、$B_B$、$B_\infty$ 互不相交

令 $h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in A_A \\ g^{-1}(x) & x\in A_B \\ f(x) \text{ or } g^{-1}(x) & x\in A_\infty \end{cases}$，则 $h: A\xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B$ $\therefore$ A、B 同基

Remark $f: A_A\xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B_A$，$g^{-1}: A_B\xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B_B$，$f$ or $g^{-1}: A_\infty\xrightarrow[\text{onto}]{1-1} B_\infty$

- 剥葱、溯源法本质一樣

观察：



令 $A_1=A$，$B_1=B$，$B_2=f(A_1)$，$A_2=g(B_1)$，

$B_3=f(A_2)$，$A_3=g(B_2)$，$\cdots$，

$B_{n+1}=f(A_n)$，$A_{n+1}=g(B_n)$；则 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$，$A_1\sim A_2\sim A_3\sim\cdots$

令 $\Delta_n=A_n-A_{n+1}$ (A葱第n層)，$K_A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ (A葱的核)；同理

$B_1\supset B_2\supset B_3\supset\cdots$，$B_1\sim B_2\sim B_3\sim\cdots$

令 $\Sigma_n=B_n-B_{n+1}$ (B葱第n層)，$K_B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ (B葱的核)

又 $A_1\sim B_2\sim A_3\sim B_4\sim\cdots$，$B_1\sim A_2\sim B_3\sim A_4\sim\cdots$

$\therefore A_1-A_2\sim B_2-B_3\sim A_3-A_4\sim\cdots$，$B_1-B_2\sim A_2-A_3\sim B_3-B_4\sim\cdots$

即：$\Delta_1 \sim \Sigma_2 \sim \Delta_3 \sim \Sigma_4 \sim \cdots$，$\Sigma_1 \sim \Delta_2 \sim \Sigma_3 \sim \Delta_4 \sim \cdots$

溯源法中 A_A 为 $\Delta_1 \cup \Delta_3 \cup \Delta_5 \cup \cdots$，$A_B$ 为 $\Delta_2 \cup \Delta_4 \cup \Delta_6 \cup \cdots$，$A_\infty$ 为 K_A，

同理，B_A 为 $\Sigma_2 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_6 \cup \cdots$，$B_B$ 为 $\Sigma_1 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_5 \cup \cdots$，$B_\infty$ 为 K_B，

h 即 $\Delta_1 \xrightarrow{f} \Sigma_2$，$\Delta_3 \xrightarrow{f} \Sigma_4$，$\Delta_5 \xrightarrow{f} \Sigma_6$，$\cdots$，$\Delta_2 \xrightarrow{g^{-1}} \Sigma_1$，$\Delta_4 \xrightarrow{g^{-1}} \Sigma_3$，$\Delta_6 \xrightarrow{g^{-1}} \Sigma_5$，$\cdots$

，$K_A \xrightarrow{f} K_B$

- $[0,1] \times [0,1] \sim [0,1]$

- $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots$，$\xi_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \{\xi_n \mid n=1,2,\cdots\}$ 有 l.u.b.

每个 ξ_n 代表 1 个 class，於该 class 取 $\mathbb{X}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots)$ 为代表

$\xi_1 : \mathbb{X}_1 = (x_{11}, x_{12}, \cdots)$，$\xi_2 : \mathbb{X}_2 = (x_{21}, x_{22}, \cdots)$，$\cdots$；取 $y_1 = x_{11}$，

$\xi_1 < \xi_2$，$\exists x_{2n_2}$，$n_2 > 1$ s.t. $x_{2n_2} > x_{1n}$ $\forall n$，令 $y_2 = x_{2n_2}$；同理：

$\xi_2 < \xi_3$，$\exists x_{3n_3}$，$n_3 > n_2$ s.t. $x_{3n_3} > x_{2n}$ $\forall n$，令 $y_3 = x_{3n_3}$；依此類推無窮次，

得 Q 增 seq. $y = (y_1, y_2, \cdots)$，令 α 为 y 所屬 class 所相应 $\mathbb{R}$，

则 α 为 $S = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\}$ 的 l.u.b.

说明：(i) α 为 S 的上界 $\xi_n \le \alpha$ $\forall n$；$\xi_n : \mathbb{X}_n = (x_{n1}, x_{n2}, \cdots)$，

$\exists y_{n+1} = x_{(n+1)n_{n+1}} > x_{nj}$ $\forall j$，$\alpha \ge y_{n+1} > x_{nj}$ $\forall j \Rightarrow \alpha \ge \xi_n$；对所有 n 皆如此

(ii) $\beta < \alpha \Rightarrow \exists y_k > \beta$，$y_k = x_{kn_k} > \beta \Rightarrow \xi_k > \beta$ $\therefore \beta$ 非上界

因此 α 確实为 S 的 l.u.b.

- S 表一切 def. 於 $[0,1]$ 上的实函数，则 $\#S > \#\mathbb{R}$ ($\#A$ 表 A 的基数)

pf: (Diagonal process) If $\#S = \#\mathbb{R}$，即 $\exists \varphi : \mathbb{R} \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} S$，$x \longrightarrow f_x$

令 $g(x) = f_x(x) + 1$，则 g 为 def. 於 $[0,1]$ 上的实函数，φ 为对射

$\therefore \exists t \in \mathbb{R}$ s.t. $\varphi : t \longrightarrow g$，但 $\varphi(t) = f_t$，看 t 這一点，

$f_t(t) = g(t) = f_t(t) + 1$ 矛盾，$\mathbb{R}$ 无法与 S 对射

- 对令 A 表一切 def. 於 $[0,1]$ 上的常函数，则 $\#A = \#\mathbb{R}$，显然 S 比 $\mathbb{R}$ 更大

定理 3-10：设 S 为给定 set，$\mathbb{P}(S) = \{A \mid A \subset S\}$ —— power set of S，则 $\#\mathbb{P}(S) > \#S$

pf: If $S \sim \mathbb{P}(S)$，令 $\varphi : x \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} \varphi(x) \in \mathbb{P}(S)$ —— (*)；令 $A = \{x \mid x \notin \varphi(x)\}$

依 (*)，$\exists a \in S$ s.t. $\varphi(a) = A$，有兩種情況 (i) $a \in A = \varphi(a) \Rightarrow a \notin A$

by def. of A (ii) $a \notin A = \varphi(a) \Rightarrow a \in A$ by def. of A；矛盾！

- $\aleph$: aleph

$\aleph_0 = \#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$

$C = \#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$ (二進位 $\mathbb{R}$) $= \aleph_0^{\aleph_0}$ ($\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots$) $= C^{\aleph_0}$ ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$)

$C_1 = \#\mathbb{P}(\mathbb{R}) = 2^C > C$；同理，$C_2 = \#\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{R})) = 2^{C_1} > C_1$；可無窮類推

Cantor 问：$\aleph_0$ 和 C 之间是否有另一種无穷大？

即：是否 $\exists A \subset \mathbb{R}$，A 不能与 $\mathbb{N}$ 对射，也不能与 $\mathbb{R}$ 对射

- Cantor set

(i) 三等分 $[0,1]$，挖去中间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 闹区间 I_1

(ii) 剩餘二闭区间又各自三等分，各自挖去中间闹区间 $I_2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9})\cup(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$；

依此類推無穷次，令 I_n 为第 n 次挖去的闹区间 set

$|I_1|=\frac{1}{3}$，$|I_2|=2\cdot\frac{1}{3^2}$，…，$|I_n|=2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}$，挖去的長度 $=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$

此 set E 称为 Cantor set

以三進位表示 $x\in E$，$x=0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots$ $\alpha_n=$ 

，$\alpha_n=0$ or 2

$\therefore$ E 的基数与 $(0,1)$ 中的二進位 $\mathbb{R}$ 同 $\therefore \#E=\#\mathbb{R}$

- Cantor 提出 Continuum hypothesis

$C=\#\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ Continuum，$\aleph_0=\#\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ Discrete

- Gödel 证明它与 ZF 系统相容

- Paul Cohen 证明它独立於 ZF 系统

如平行公理，若接受为欧氏幾何，若不接受为非欧幾何；

目前数学系统接受 Continuum hypothesis

代数数超越数

- $\alpha\in\mathbb{R}$ 为代数数若 α 满足某整係数多项式方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$

Theorem Cantor：代数数是可数的

pf：令 $\mathbb{F}_n=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \mid a_j$ 为整数 $j=0,1,\cdots,n$；$a_n\neq 0\}$

$a_j\in\mathbb{Z}$，$\#\mathbb{Z}=\aleph_0$，$\#\mathbb{F}_n=\aleph_0^{n+1}=\aleph_0$；而 $P_n\in\mathbb{F}_n$，P_n 至多 n 个实根

令 $S_n=\{x \mid x$ 为代数数满足某 n 次整係数多项式方程$\}$，则 S_n 为可数；

一切代数数 set $=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$，故为可数

- 给定 a 为代数数，b 为无理数，则 a^b 为超越数 (1934 证明)

○ Halmos：Naive set Theory

无定义 noun：set，elements，belong

1908. Zermelo 提出7个Axiom：把空set的存在列为 2nd axiom

1922. Fraenkel 对 Zermelo 系统進行修補

○ ZFC 公理化系统

1. Axiom of extensionality

Two sets are equal iff they have the same elements.

2. Axiom of specification

To every set A and to every sentence $S(x)$, there corresspponds a set B whose elements are exactly those elements x of A for which $S(x)$ holds.

即：$B=\{x\in A \mid S(x)\}$，B 必存在

○ 空 set 的存在可由此 axiom 导出，不必另立 axiom

$B=\{x\in A \mid x \text{不是} x\}$，$B$ 为空 set ϕ

○ 宇集 U 不存在（Russell paradox）

pf: 设 U 为宇集，令 $S=\{A\in U, A\notin A\}$，依 2nd axiom，S 存在，U 为宇集，$S\in U$，有二種可能 (i) $S\notin S \Rightarrow S\in S$ by def of S

(ii) $S\in S \Rightarrow S\notin S$ by def of S，矛盾！

3. Axiom of union

For any collection of sets there exists a set that contains all the elements that belong to at least one set of the given collection.

即：A_λ，$\lambda\in\Lambda$ (index set)，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 存在

4. Axiom of pairing

For any two sets there exists a set that they both belong to.

即：sets A、B，$\exists C=\{A,B\}$

5. Axiom of power set

For each set there exists a collection of sets that contains among its elements all the subsets of the given set.

ex: $A=\{1,2\}$, $\mathbb{P}(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

6. Axiom of infinity

There exists a set containing 0 , and containing the successor of its elements.

即：$\mathbb{N}$ 的存在（含 0），$\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$

7. Axiom of Choice

The product of a non-empty family of non-empty sets is non-empty.

即：$A_\lambda \neq \phi$, $\lambda \in \Lambda$, $S=\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \phi$

- 设 A_λ , $\lambda\in\Lambda$ 为一集合族（family of sets），则 $\exists$ 函数 $f: A_\lambda \longrightarrow y \in A_\lambda$ for some $y\in A_\lambda$, f 称 Choice function
- Russell：可以從无穷多$\overset{\text{不分左右}}{\text{襪子}}$中选一双穿，但不保证有无穷多$\overset{\text{分左右}}{\text{鞋子}}$可选一双穿
- 可以摸彩，但未必能中奬

8. Axiom of substitution

If $S(a,b)$ is a sentence such that for each a in a set A, the set $S(a,b)$ can be formed, then there exists a function F with domain A, such that $F(a)=\{b \mid S(a,b)\}$ for each $a\in A$.

即：set A , $F(a)=\{b\mid S(a,b)\}$, $B=\{F(a)\mid a\in A\}$

9. Axiom of regularity (Axiom of foundation) 1925. Von neumann

Every non-empty set A contain a member B which is disjoint from A.

即：令 $A=\{x\}$，A 中无别物，只有 x ，x 和 $\{x\}$ disjoint ，但显然 $x\in\{x\}$，因此 $x\notin x$