- $S = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^{T}$

在用 Schur's theorem 證後如何確保 QDQ^{-1} 即是 $Q\Lambda Q^{-1}$？

I、表現行為法

$S^{k} = (QDQ^{-1})^{k} = QD^{k}Q^{-1}$ → 與 $Q\Lambda Q^{-1}$ 性質一樣 → 可直接將 D 視為 Λ ※

II、$D(\Lambda)$ 元素必相同

假設 $S = Q_1\Lambda Q_1^{-1} = Q_2 D Q_2^{-1}$ $\quad D = Q_2^{-1}Q_1\Lambda Q_1^{-1}Q_2 = Q_2^{-1}Q_1\Lambda(Q_2^{-1}Q_1)^{-1}$

$\overset{②}{=} Q_3\Lambda Q_3^{-1} = M^{-1}\Lambda M$ → D、Λ 相似 → λ's 一樣（在對角線上）※

- 因此 QDQ^{-1} 即是 $Q\Lambda Q^{-1}$ → $S = Q\Lambda Q^{-1}$ ※

2、$Q_1^{-1}Q_2 = Q_1^{T}Q_2 = Q_3$ 正交矩陣相乘依然為正交矩陣

Let $A_3 = Q_1^{-1}Q_2 = Q_1^{T}Q_2$, $A_3^{T}A_3 = (Q_1^{-1}Q_2)^{T}Q_1^{-1}Q_2 = Q_2^{T}(Q_1^{-1})^{T}Q_1^{-1}Q_2$

$= Q_2^{T}(Q_1^{-1})^{-1}Q_1^{-1}Q_2 = Q_2^{T}Q_2 = I = A_3^{-1}A_3$ → $A_3^{T} = A_3^{-1}$ → $A_3 = Q_3$