Chapter 13 Fourier Series

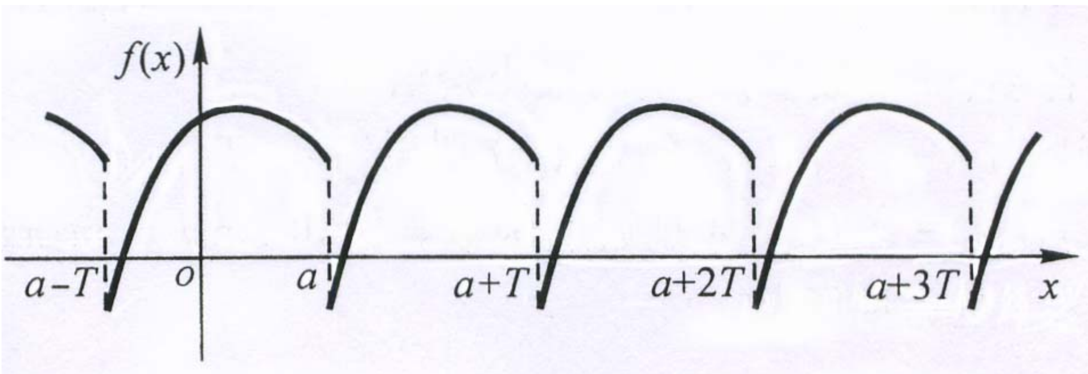
(Def) 週期函數

設函數 $f(x)$ 定義在區間 $(-\infty,+\infty)$ 內，若存在常數 $T\neq 0$，使對任意的 x 都有

$$f(x+T)=f(x)$$

則稱 $f(x)$ 是一個週期函數(periodic function)，T 稱為 $f(x)$ 的一個週期(period)。使上式成立的最小正數 T 稱為 $f(x)$ 的最小正週期(least positive period)，簡稱為 $f(x)$ 的週期，後面凡提到週期函數 $f(x)$ 的週期 T，都是指它的最小正週期

週期函數是各種周而復始、循環往復的現象的數學描述，它的圖像是週期性地重複出現的(如下圖)



最常見的週期函數是我們熟知的三角函數；$\sin x$，$\cos x$，$\sec x$，$\csc x$ 的週期為 2π，$\tan x$ 和 $\cot x$ 的週期為 π

◆ 三角級數與三角函數系的正交性

從物理學的觀點看，在所有週期運動中，以用正弦函數

$$y = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)$$

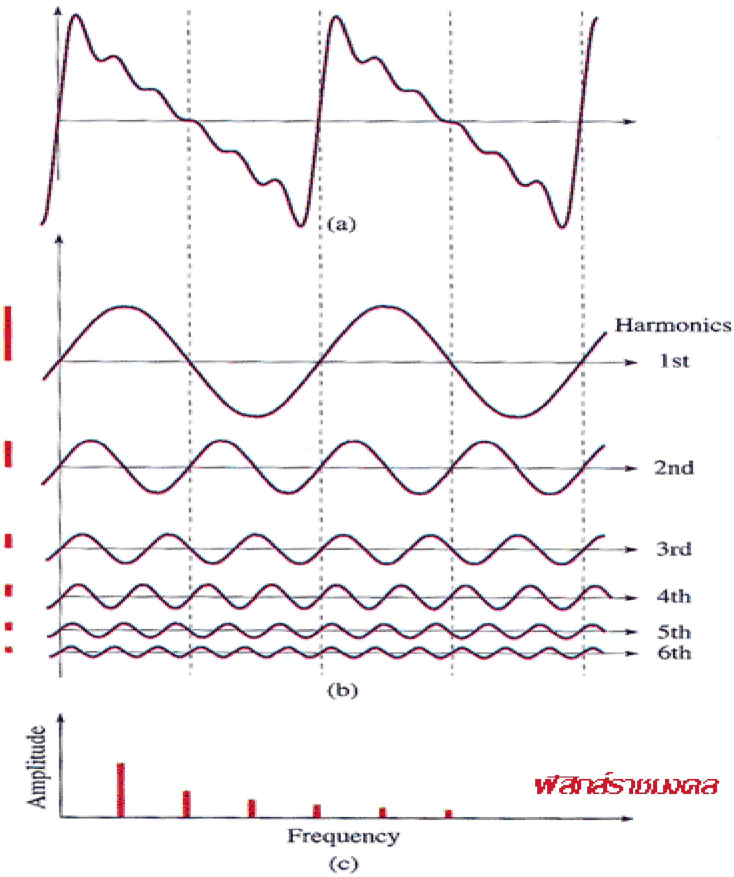
來描述週期運動最簡單，這類運動通常稱為簡諧運動(simple harmonic motion)或簡諧振動，A稱為振幅(amplitude)，ω稱為角頻率(angular frequency)，φ稱為初相，(initial phase)。此簡諧運動的週期為$T = 2\pi / \omega$。單擺的運動、彈簧的振動、交流電的電流或電壓強度等，都是簡諧振動的例子

前面已介紹過將函數展開成冪級數，而下面討論的是將週期函數 $f\left(t\right)$展開成三角函數組成的級數：

$$f\left(t\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\omega t + \varphi_n\right)$$

其中A_0，A_n，φ_n($n = 1, 2, 3, \ldots$)都是常數

中 a_0，a_n，$b_n(n=1,2,3,...)$都稱為常數，稱之為三角級數的係



注意到

$$A_n \sin(n\omega t+\varphi_n)=A_n \sin(\varphi_n+n\omega t)=$$

$$A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t$$

令 $A_0=\dfrac{a_0}{2}$，$A_n \sin\varphi_n = a_n$，$A_n \cos\varphi_n = b_n$，$\omega t = x$，則

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

通常稱形如上式的級數為三角級數(trigonometric series)，其中 a_0，a_n，$b_n(n=1,2,3,...)$都稱為常數，稱之為三角級數的係數(coefficient)

三角級數中，$a_0/2$，a_n，b_n分別是如下函數系的係數：

1，$\cos x$，$\sin x$，$\cos 2x$，$\sin 2x$，…，$\cos nx$，$\sin nx$，…

此函數系稱為一個三角函數系(family of trigonometric function)

三角函數系具有如下重要性質：

三角函數系中任意兩個<u>不同</u>的函數相乘後，在區間$[-\pi,\pi]$上的<u>積分等於0</u>，即有

$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx dx = 0$，$n = 1,2,3,...$

$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx dx = 0$，$n = 1,2,3,...$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$，$m$，$n = 1,2,3,...$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0$，$m \neq n$，$m$，$n = 1,2,3,...$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$，$m \neq n$，$m$，$n = 1,2,3,...$

[Proof]：前面兩式易直接積分得出：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0，\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

後面三式可分別利用三角函數的積化和差公式證明：

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin\left(m+n\right)x+\sin\left(m-n\right)x\right]$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos\left(m+n\right)x+\cos\left(m-n\right)x\right]$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left[\cos\left(m-n\right)x-\cos\left(m+n\right)x\right]$$

轉化為計算如下形式的積分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\text{，}\int_{-\pi}^{\pi}\sin lxdx\text{，}\begin{array}{l}k=1,2,3,\ldots\\ l=1,2,3,\ldots\end{array}$$

比如，當整數$m\neq n$時，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(m+n\right)x+\cos\left(m-n\right)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(m+n\right)x}{m+n}+\frac{\sin\left(m-n\right)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}=0$$

其餘兩式可同樣驗證

上述性質稱為三角函數系在區間$\left[-\pi,\pi\right]$上的正交性(orthogonality)

在三角函數系中，兩個<u>相同</u>函數的乘積在區間$\left[-\pi,\pi\right]$上的<u>積分不等於 0</u>，而有

$$\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi\text{，}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\pi\text{，}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\pi\text{，}n=1,2,3,\ldots$$

13.2 The Fourier Series of a Function

設 $f(x)$ 是週期 2π 的週期函數，且能展開成三角級數

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \qquad (1)$$

此時係數 a_0，a_n，$b_n(n=1,2,3,...)$與函數 $f(x)$ 有如下的重要關係：

(Euler-Fourier)公式：如果(1)式左端的函數 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可積，右端的三角級數可逐項積分，則其中的係數可分別表達為

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx \quad , \quad n=1,2,3,... \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx \quad , \quad n=1,2,3,.. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

[Proof]：對(1)式從 $-\pi$ 到 π 逐項積分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx\right]$$

由三角函數系的正交性，等式右端除第一項外，其餘各項均為 0，所以 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi$，從而有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

用 $\cos kx$ 乘(1)式的兩端，再從 $-\pi$ 到 π 逐項積分，得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx =$$

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx dx\right]$$

由三角函數系的正交性，等式右端除 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx dx$,

$n=k$, 的一項以外，其餘各項均為 0，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx dx = \frac{a_k}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2kx)dx$$

$$= \frac{a_k}{2}\left(x+\frac{1}{2k}\sin 2kx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = a_k\pi$$

從而

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \text{ ， } k=1,2,3...$$

這即是(2)中的第二個公式

類似地，用 $\sin kx$ 乘(1)式的兩端，再從 $-\pi$ 到 π 逐項積分，可得

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \text{ ， } k=1,2,3,...$$

這即是(2)中的第三個公式

若公式(2)中的積分都存在，則由它們確定的係數 a_0，a_n，b_n ($n=1,2,3,...$)（這些稱為函數 $f(x)$ 的傅里葉係數(Fourier coefficient))，將這些係數帶入(1)式的右端，所得的三角級數稱為函數 $f\left(x\right)$ 的傅里葉級數(Fourier series)，簡稱 $f\left(x\right)$ 的傅氏級數

值得注意的是，上述並沒有討論函數 $f\left(x\right)$ 在怎樣的條件下，它的傅里葉級數才收斂於 $f\left(x\right)$？因此不能認為傅里葉級數(1)就一定等於 $f\left(x\right)$。可暫記為

$$f\left(x\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

若在公式(2)中，取 $n=0$，則 a_n 的表達式恰好給出 a_0，和 a_n 的結果合併，將公式(2)寫成

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx dx, \quad n = 0,1,2,... \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx, \quad n = 1,2,3,... \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

正是為了 a_n 表達公式的這種統一，在上面(1)式中才將傅里葉級數的常數項記為 $a_0/2$

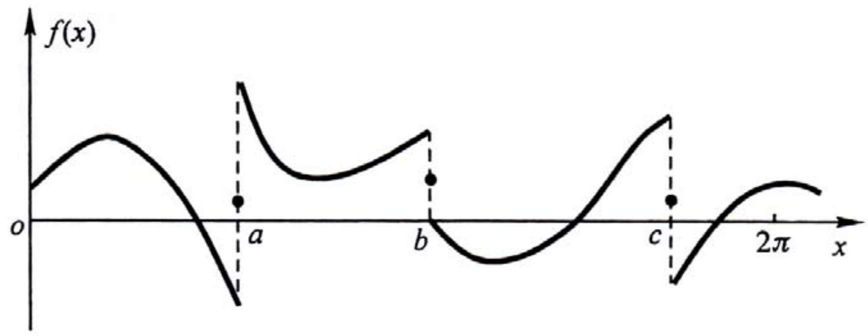
13.3 Convergence of Fourier Series

下面討論一個基本問題：函數 $f(x)$ 滿足什麼條件才能使它的傅里葉級數(1)收斂，而且級數的和恰好就是 $f(x)$？

我們僅討論分段連續(piecewise continuity)的週期函數 $f(x)$，即 $f(x)$ 在一個週期的區間 $[-\pi,\pi]$ 上連續或有有限個不連續點，同時在每個不連續點 x 的左極限(left limit)和右極限(right limit)：

$$f(x^-) = f(x-0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(x-\varepsilon)$$
$$f(x^+) = f(x+0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f(x+\varepsilon)$$

均為有限值。分段連續的週期函數如下圖所示



此外還假設 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上也分段連續，即在導數 $f'(x)$ 不存在的點 x 處，其左導數(derivative on the left)和右導數(derivative on the right)均為有限值

對這類週期函數有如下的收斂定理:

(Thm 13.1) Dirichlet 收斂定理:

若函數 $f(x)$ 以及它的導函數 $f'(x)$ 在一個週期內分段連續，則 $f(x)$ 的傅里葉級數(1)在每一點 x 都收斂，並且

(1) 當 x 是 $f(x)$ 的連續點時，級數收斂於 $f(x)$

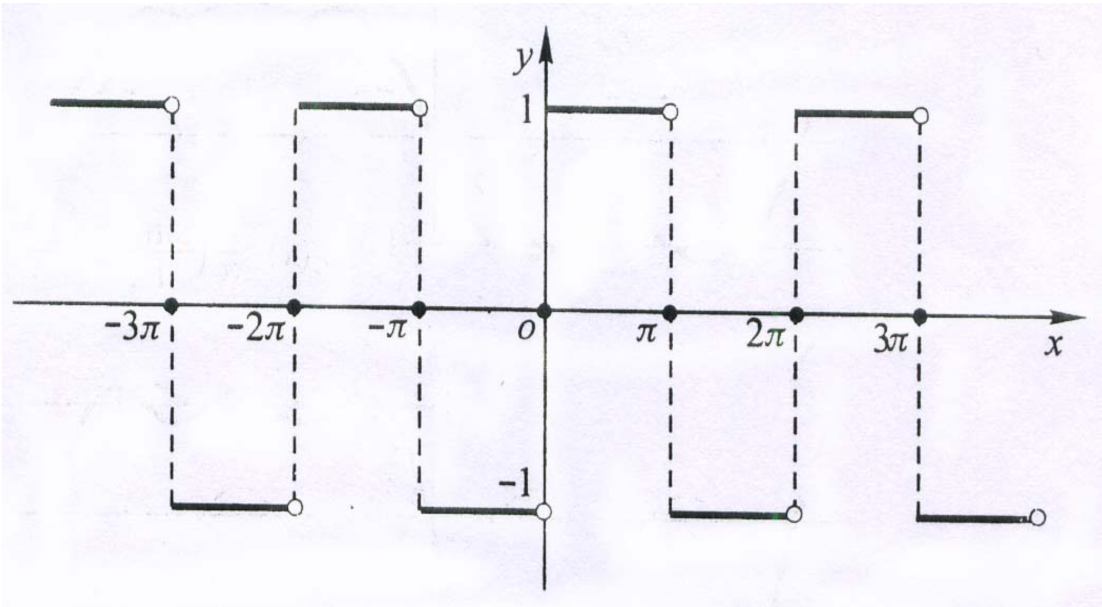
(2) 當 x 是 $f(x)$ 的間斷點時，級數收斂於 $f(x)$ 在點 x 的右極限與左極限的算數平均值

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

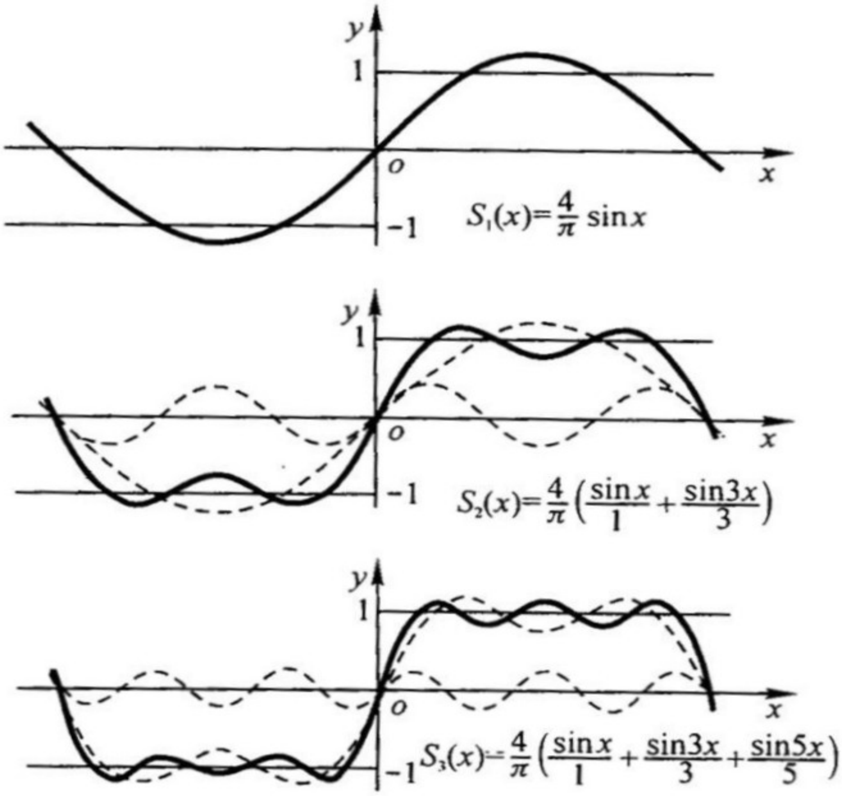
Ex70: 設 $f\left(x\right)$是週期為2π的函數，它在$\left[-\pi,\pi\right)$上的表達式

為 $f\left(x\right)=\begin{cases}-1 & -\pi\le x<0\\ 1 & 0\le x<\pi\end{cases}$ ，試將$f\left(x\right)$展開成傅

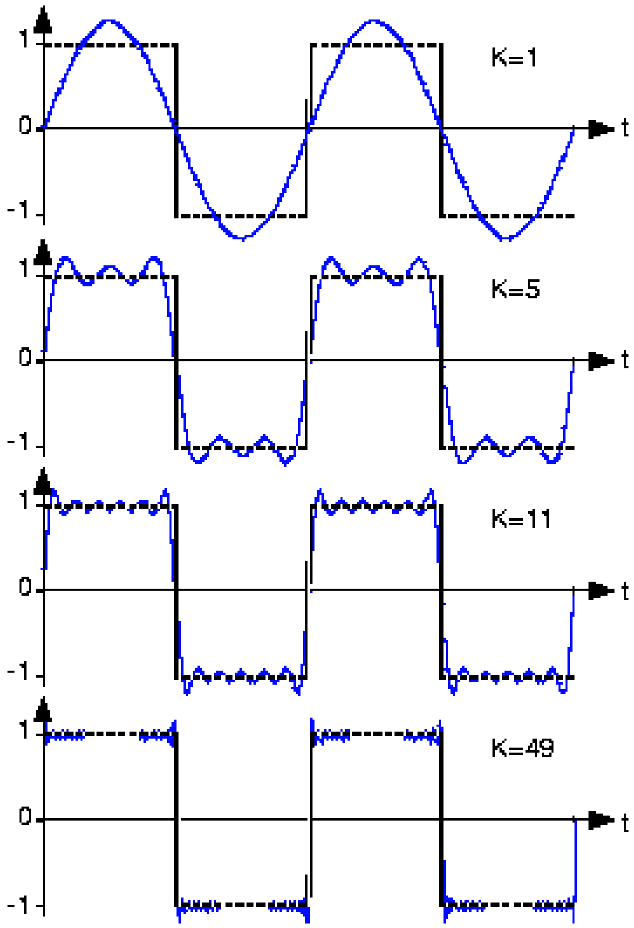
里葉級數



[解]：



$S_1(x)=\frac{4}{\pi}\sin x$
$S_2(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}\right)$
$S_3(x)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}\right)$



K=1
K=5
K=11
K=49

Ex71: 已知週期為2π的函數$f\left(x\right)$在一個週期內的表達式為

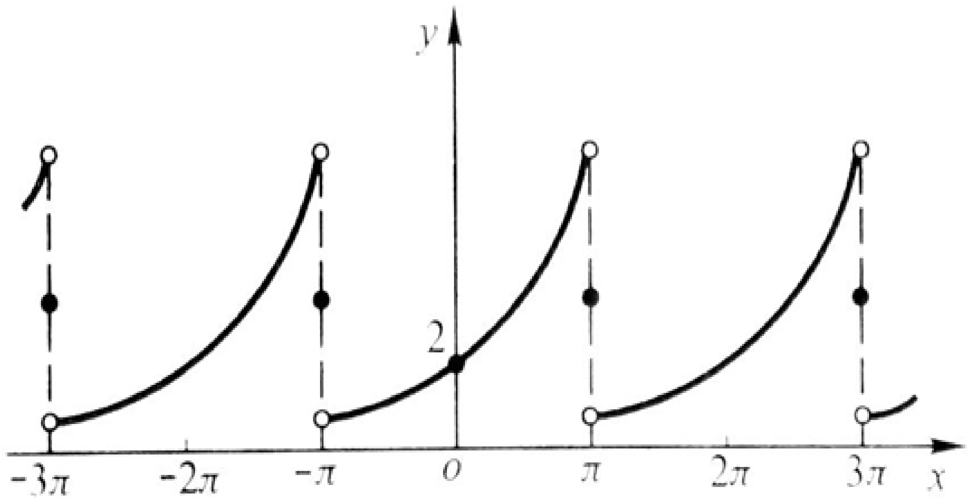
$f\left(x\right)=e^{x}+1$，$-\pi\le x\le\pi$，試求$f\left(x\right)$的傅里葉級數

[解]:

上面用到不定積分公式：

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x\right)}{\alpha^{2}+\beta^{2}}+C$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)}{\alpha^{2}+\beta^{2}}+C$$


y
2
-3π
-2π
$-\pi$
O
π
2π
3π
x

◆ 設週期為$2l$的週期函數$f\left(x\right)$滿足收斂定理的條件，則它的傅里葉級數展開式為

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (3)$$

其中傅里葉係數a_n，b_n為

$$\left.\begin{aligned} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad \text{n=0,1,2,...} \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad \text{n=1,2,3,...} \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

做變數代換$z=\pi x/l$，於是區間$-l\le x\le l$就變換成$-\pi\le z\le\pi$，設

$$f\left(x\right)=f\left(\frac{lz}{\pi}\right)=f\left(z\right), \quad -\pi\le z\le\pi$$

從而$f\left(z\right)$是週期2π的週期函數，並且它滿足收斂定理的條件，因此可得$f\left(z\right)$展開成傅里葉級數

$$f\left(z\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nz+b_n\sin nz\right)$$

其中係數依照(2’)式為

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(z\right)\cos nzdz,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(z\right)\sin nzdz$$

在以上式子中令$z=\pi x/l$，並注意到$f\left(z\right)=f\left(x\right)$，於是

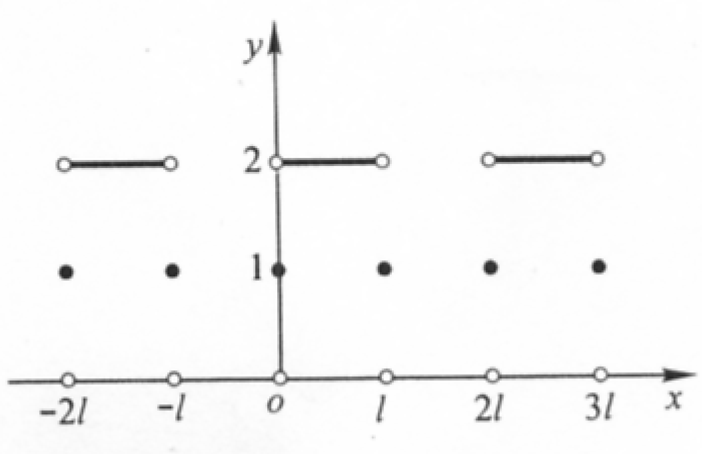
$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad \text{n=0,1,2,...}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\quad \text{n=1,2,3,...}$$

Ex72: 設 $f\left(x\right)$是週期為$2l$的週期函數，它在$\left[-l,l\right)$上的表達式為 $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & -l\le x<0\\ 2 & 0\le x<l\end{cases}$，試將 $f\left(x\right)$展開成傅里葉級數

[解]：



若 $f(x)$ 不是週期函數，僅在 $[-l,l)$ 上有定義，則同樣可將 $f(x)$ 進行週期延拓，再求其傅里葉級數的展開式

13.2.1 Even and Odd Functions

若函數 $f(x)$ 對於定義域中的任一 x 都有

$$f(-x)=f(x)$$

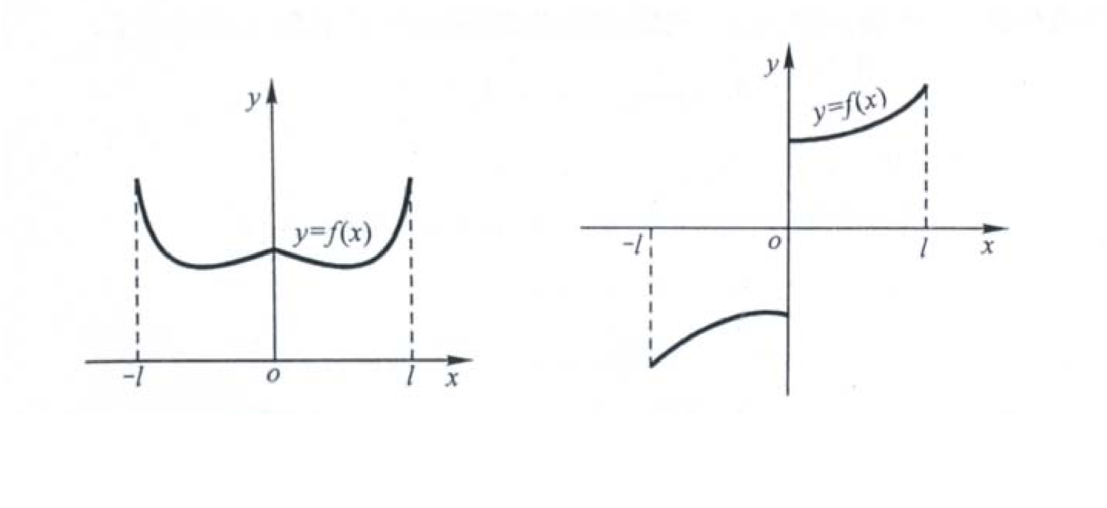
則稱 $f(x)$ 是偶函數(even function)；若對於定義域中的任一 x 都有

$$f(-x)=-f(x)$$

則稱 $f(x)$ 是奇函數(odd function)

由定義知，一切偶函數 $y=f(x)$ 的圖形於 y 軸對稱(如下左圖)。若把定積分理解為面積，即知對於使偶函數 $f(x)$ 有定義的任意區間 $[-l,l]$，都有

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$$



而一切奇函數$y=f\left(x\right)$的圖形於原點對稱(如上右圖)。

對於使奇函數$f\left(x\right)$有定義的任意區間$\left[-l,l\right]$，都有

$$\int_{-l}^{l} f\left(x\right)dx=0$$

奇函數與偶函數有如下明顯的性質：

1. 兩個奇函數或兩個偶函數的乘積是偶函數

[Proof]：若$\varphi\left(x\right)$和$\psi\left(x\right)$都是奇函數，則對於

$f\left(x\right)=\varphi\left(x\right)\psi\left(x\right)$，有

$$f\left(-x\right)=\varphi\left(-x\right)\psi\left(-x\right)=\left[-\varphi\left(x\right)\right]\left[-\psi\left(x\right)\right]=\varphi\left(x\right)\psi\left(x\right)=f\left(x\right)$$

若$\varphi\left(x\right)$和$\psi\left(x\right)$都是偶函數，則有

$$f\left(-x\right)=\varphi\left(-x\right)\psi\left(-x\right)=\varphi\left(x\right)\psi\left(x\right)=f\left(x\right)$$

上面兩式都表明$f\left(x\right)$是偶函數

2. 奇函數與偶函數的乘積是奇函數

[Proof]：設$\varphi\left(x\right)$是奇函數，$\psi\left(x\right)$是偶函數，則對於

$f\left(x\right)=\varphi\left(x\right)\psi\left(x\right)$，有

$$f\left(-x\right)=\varphi\left(-x\right)\psi\left(-x\right)=\left[-\varphi\left(x\right)\right]\psi\left(x\right)=-\varphi\left(x\right)\psi\left(x\right)=-f\left(x\right)$$

這表明$f\left(x\right)$是奇函數

◆ 一般說來，一個週期函數的傅里葉級數既含有正弦項，也含有餘弦項（常數項 $\frac{a_0}{2}$ 看成是特殊的餘弦項 $\frac{a_0}{2}\cos 0$）。但是，也有一些函數的傅里葉級數只含正弦項，或只含常數項和餘弦項，出現這種情況的原因在於所給函數 $f\left(x\right)$ 為奇函數或偶函數。對此，我們有如下結論：

1. 當週期為 2π 的奇函數 $f\left(x\right)$ 展開成傅里葉級數時，它的傅里葉係數為

$$a_n = 0,\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(x\right)\sin nx dx,\ n = 1,2,3,\ldots$$

2. 當週期為 2π 的偶函數 $f\left(x\right)$ 展開成傅里葉級數時，它的傅里葉係數為

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\left(x\right)\cos nx dx,\ n = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = 0,\ n = 1,2,3,\ldots$$

◆ 若 $f(x)$ 為奇函數，則它的傅里葉級數形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

這種只含正弦項的傅里葉級數稱為正弦級數（sine series）；若 $f(x)$ 為偶函數，則它的傅里葉級數形如

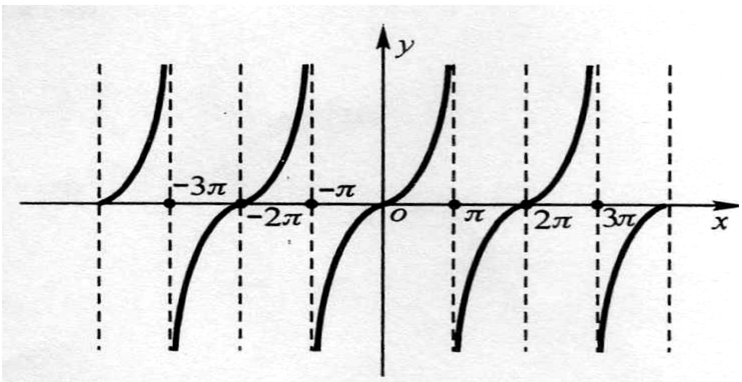
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

這種只含常數項和餘弦項的傅里葉級數稱為餘弦級數（cosine series）

Ex73: 已知週期為 2π 的函數 $f(x)$ 在一個週期內的表達式為

$f(x) = x^3,\ -\pi \le x \le \pi$，試求 $f(x)$ 的傅里葉級數

[解]：



y
-3π
$-\pi$
-2π
o
π
2π
3π
x

Exercise Y:

1.試求以2π為週期的函數$f(x)$展開為傅里葉級數,已知它在$[-\pi,\pi]$上的表達式為$f(x)=\begin{cases} e^x & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le \pi \end{cases}$

[解]：由於$f(x)$滿足收斂定理，且在$(-\pi,\pi)$內連續。從而$f(x)$的傅里葉級數在區間$(-\pi,\pi)$內收斂於$f(x)$，而在間斷點$x=(2k-1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$處收斂於

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

按(2)式可算出其傅里葉係數為

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}dx=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^x(n\sin nx+\cos nx)}{n^2+1}\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{\sin nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)},\quad n=1,2,3,...$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}e^x\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{e^x(\sin nx-n\cos nx)}{n^2+1}\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{\cos nx}{n\pi}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{-n+e^{-\pi}\bullet n\left(-1\right)^{n}}{\pi\left(n^{2}+1\right)}-\frac{\left(-1\right)^{n}-1}{n\pi},\quad n=1,2,3,\ldots$$

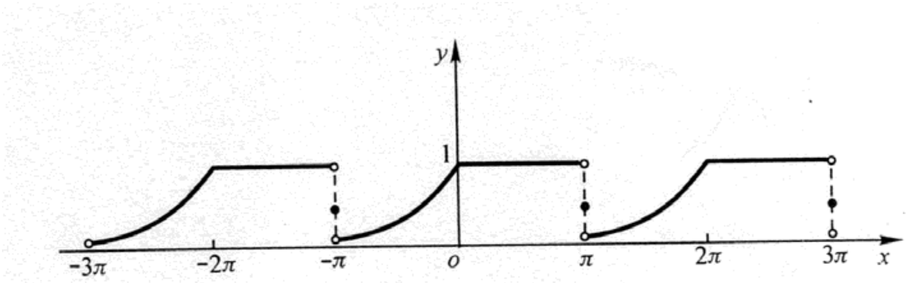
故

$$f\left(x\right)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\left(-1\right)^{n}e^{-\pi}}{n^{2}+1}\cos nx+\left[\frac{-n+\left(-1\right)^{n}ne^{-\pi}}{n^{2}+1}+\frac{1-\left(-1\right)^{n}}{n}\right]\sin nx\right\}$$

$$-\infty<x<+\infty,\text{且 } x\neq(2k-1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

所得傅里葉級數的和函數如下圖所示



2. 設 $f(x)$ 是週期為 2π 的函數，在區間 $[-\pi,\pi]$ 內，有

$$f(x)=\begin{cases}-\pi & -\pi\le x\le 0\\ x & 0<x\le\pi\end{cases}$$ ，試將 $f(x)$ 展開成傅里葉級數

[解]：按公式(2)求 $f(x)$ 的傅里葉級數，得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi^2+\frac{\pi^2}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{\cos n\pi-1}{\pi n^2}=\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2},\ \ n=1,2,3,\ldots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=\frac{1-2\cos n\pi}{n}=\frac{1-2(-1)^n}{n},\ \ n=1,2,3,\ldots$$

因 $f(x)$ 滿足收斂定理的條件，故在 $f(x)$ 的連續點 x 處，

其傅里葉級數收斂於 $f(x)$，即

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx\right]$$

$$-\infty<x<+\infty,\text{且 } x\ne m\pi, m=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

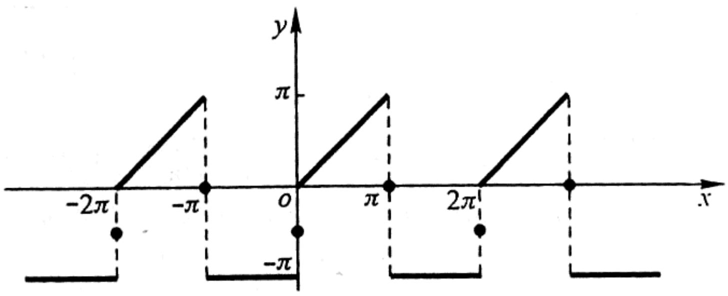
在間斷點 $x=2k\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 時，級數收斂於

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{-\pi+0}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

在間斷點 $x=(2k+1)\pi, k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$ 時，級數收斂於

$$\frac{f(-\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$$

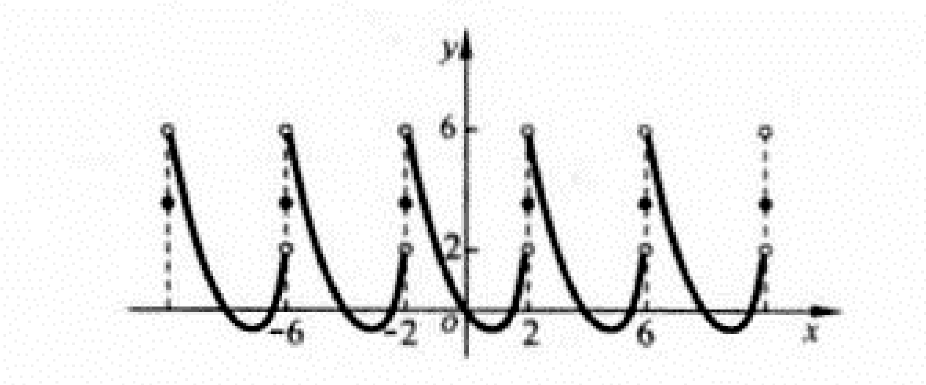
所得傅里葉級數的和函數如下圖所示



3.試將函數 $f(x)=x^2-x$，$-2\le x\le 2$ 展開成傅里葉級數

[解]：由於 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上滿足收斂定理的條件，在 $(-2,2)$ 內連續，將 $f(x)$ 延拓成以 4 為週期的週期函數(如下圖)，則相應的傅里葉級數在 $(-2,2)$ 內收斂於 $f(x)$，在間斷的端點 $x=\pm 2$ 處收斂於

$$\frac{f(2-0)+f(-2+0)}{2}=\frac{(4-2)+(4+2)}{2}=4$$



按公式(2)得傅里葉係數為

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(x^2-x\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{8}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(x^2 - x\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{x^2 - x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-2}^{2} - \frac{1}{n\pi}\int_{-2}^{2}\left(2x-1\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left(2x-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-2}^{2} - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_{-2}^{2}2\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\left(-1\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\left(x^2 - x\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= -\frac{x^2 - x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-2}^{2} + \frac{1}{n\pi}\int_{-2}^{2}\left(2x-1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(-1\right)^n + \frac{6}{n\pi}\left(-1\right)^n + \frac{2\left(2x-1\right)}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-2}^{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\int_{-2}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left(-1\right)^n + \frac{8}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{4}{n\pi}\left(-1\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

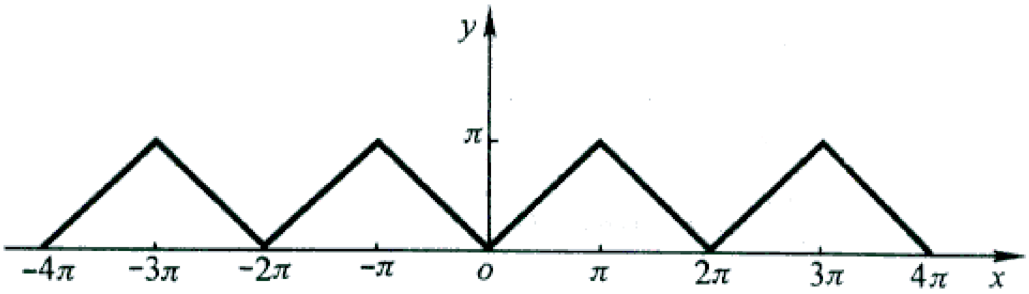
故

$$x^2 - x = \frac{4}{3} + \sum_{n-1}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right), \quad -2 \le x \le 2$$

4. 試將函數 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展開成傅里葉級數

［解］：所給函數 $f\left(x\right)$ 在區間 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上滿足收斂定理的條件，

並且拓展為週期函數時，它在每一點 x 處都連續(如下圖)，故相應的傅里葉級數在 $\left[-\pi,\pi\right]$ 上滿足收斂於 $f\left(x\right)$



又因 $f\left(x\right)$ 為偶函數，知 $b_n=0$，而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos n\pi-1\right)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi} & n=1,3,5,\ldots\\ 0 & n=2,4,6,\ldots\end{cases}$$

故

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^2}\cos\left(2k-1\right)x=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$$