L24 7.1 One to One function and Inverse (Conti.) (續.一對一函數和反函數)

Let f:[a,b]→ℝ be cont.

If $\int_a^b f^2(x)dx=0$, then f(x)=0, ∀ x∈[a,b]. ($\int_a^b |f(x)|dx=0$)

這題目的技巧在高微會常用到，是一個很根本的技巧。(積分分段)
就像要證一個函數最多有三個根，假設有四個根，得到矛盾。

pf:

從所求想起，要證每一點函數值都是零。它沒有給函數，一定用反證法。

assume that ∃ c∈[a,b] s.t. f(c)≠0.

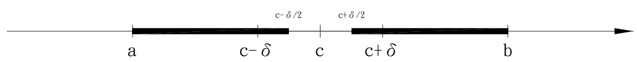
∵ f is cont. at c. ∴ f^2 is cont. at c.

函數大於零，平方也大於零，存在一個區間，使得在這個區間取值大於 0。

⇒∃ δ>0 s.t. $f^2(x)>0$ on (c-δ, c+δ).定理

因為(c-δ, c+δ)為開區間，所以分 δ 要取更小，使得成為閉區間。

$$\int_a^b f^2(x)dx=\int_a^{c-\frac{\delta}{2}} f^2(x)dx+\int_{c-\frac{\delta}{2}}^{c+\frac{\delta}{2}} f^2(x)dx+\int_{c+\frac{\delta}{2}}^{b} f^2(x)dx$$



∵ $f^2\geq 0$ on [a,c-δ/2] and [c+δ/2,b].

∴ $\int_a^{c-\frac{\delta}{2}} f^2(x)dx\geq 0$ and $\int_{c+\frac{\delta}{2}}^{b} f^2(x)dx\geq 0$.定理

∵ $f^2>0$ on[c-δ/2, c+δ/2].

∴ $\int_{c-\frac{\delta}{2}}^{c+\frac{\delta}{2}} f^2(x)dx>0$.定理

⇒$\int_a^b f^2(x)dx>0$ (→←) 矛盾於假設

Therefore f≡0 on [a,b].

By the way~從所求想起，條件常是過程中用到的。定義定理在數學中是重要的。

Q:什麼叫 one-to-one 函數？
A:不同的取值不一樣。
每定義一個函數，就會混哪一類的函數會這樣。
例如哪一類函數連續、可微、可積。

L24 7.1 One to One function and Inverse (Conti.) (續.一對一函數和反函數)

Question: 怎樣的函數會是 one-to-one？

Answer: Increasing functions and decreasing functions。

pf:

$\because$ $x1<x2$ $\therefore$ $f(x1)<f(x2)$.

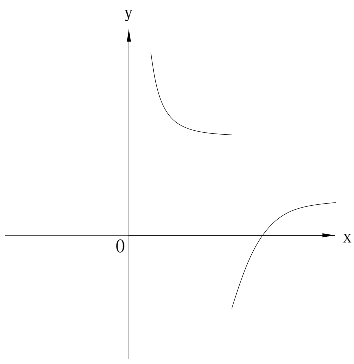
$\Rightarrow f(x1)\neq f(x2)$.

Therefore f is one-to-one.

Question one-to-one functions 是否連續？是否可微？

Answer: No.根據定義

你要問怎麼樣的問題，取決於你的定義清不清楚。這個問題很多人會說 Yes。爲什麼，因爲他對定義的是不管的。做題目是沒有根的，做題目是憑感覺的，如果證明有七八步，憑感覺是做不出來的。人家要的企畫案而不是一個句子。



Question: Are one-to-one functions increasing or decreasing？

Answer: No.

Q:如果是一個連續的 one-to-one 是遞增遞減嗎？
A:是。爲什麼？因爲連續要一筆畫畫完和 one-to-one，所以往上(下)，就不能回頭。

Thm: Let $f:I\to\mathbb{R}$ be a function.

If f is cont. and one-to-one on I, then f increases or decreases on I.

如果函數在 I 上連續和一對一，則函數在 I 上遞增或遞減。

Q:怎樣的函數會遞增(減)？
A:一階微分大(小)零。

L24 7.1 One to One function and Inverse (Conti.) (續.一對一函數和反函數)

Question: Let $f:I\to\mathbb{R}$ be an one-to-one function.Then $f^{-1}:f(I)\to I$ exists.

If f is cont. on I, is f^{-1} cont. on f(I) ?

If f is diff. on I, is f^{-1} diff. on f(I) ? 如果 f^{-1} 可微，跟 f 有什麼關係？

…

Answer:讓我們觀察 f and f^{-1} 的關係.

Let $f:I\to\mathbb{R}$ be one-to-one.

Then $\begin{cases} Dom(f) = range(f^{-1}) \\ range(f) = Dom(f^{-1}) \end{cases}$ or $\begin{cases} Dom(f^{-1}) = range(f) \\ range(f^{-1}) = Dom(f) \end{cases}$.

① Let $x\in Dom(f)$, then $(x,f(x))$ is in the graph of $y=f(x)$.

$\because$ $f^{-1}(f(x))=x$. $\therefore$ $(f(x),x)$ is in the graph of $y=f^{-1}(x)$.

f(x)為變數，x 為取值，函數為 $f^{-1}(x)$。

② Let $x\in Dom(f^{-1})$, then $(x,f^{-1}(x))$ is in the graph of $y=f^{-1}(x)$.

$\because$ $f(f^{-1}(x))=x$. $\therefore$ $(f^{-1}(x),x)$ is in the graph of $y=f(x)$.

f^{-1} (x)為變數，x 為取值，函數為 f (x)。

f 上的圖形，經過把坐標對調，就可以得到 f^{-1} 圖形。

f^{-1} 上的圖形，經過把坐標對調，就可以得到 f 圖形。

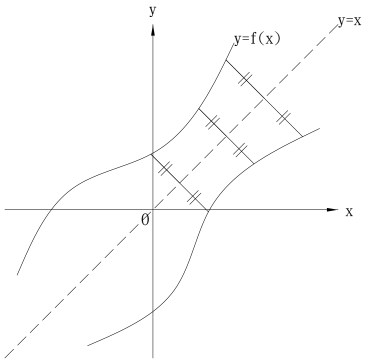
因為 f 可以得到 f^{-1}，f^{-1} 可以得到 f，所以 f 和 f^{-1} 一個都不差，而且它的方向就是坐標互換。

Q:知道 f 的圖形就知道 f^{-1} 的圖形，要怎麼知道呢？

A:把坐標對調。

Q:坐標互換在圖形上是什麼意思呢？

A:就是這兩個點對直線 y=x 是對稱的。



Therefore f and f^{-1} 的圖形直線 y=x 對稱!!!

L24 7.1 One to One function and Inverse (Conti.) (續.一對一函數和反函數)

By the way~期中考題目講解

如果 concave up，則圖形落在每一點的切線之上。那你不要考慮切線，考慮端點的割線。當初是考慮切線，現在考慮割線，當初考慮兩個相減，現在也考慮兩個相減,論述差不多,只不過第一個步驟可能不一樣,但是論述還是要用那些性質。到微分大於零小於零與遞增遞減。

在有理數取值爲 0，Riemann sum 是零。那個時候是每個區間取值爲 4。
相加是 Riemann sum 的極限存在，則相加的 Riemann sum 也會存在。極限的四則運算，如果兩個極限存在，則等於極限相加。

要證可微，要證該點割線斜率的極限存在，$\lim(h\to 0)[f(c+h)-f(c)]/h= \lim(x\to c)[f(x)-f(c)]/(x-c)$，條件是 $\lim(x\to c)f'(c)=L$。要引進均值定理，兩個函數相減除變數相減,會等於中間的微分。要分開論述,x 比 c 大或比 c 小。先用的區間是[x,c]，$\lim(x\to c)[f(x)-f(c)]/(x-c)=\lim(x\to c)f'(d_x) =\lim(x\to c)f'(x)=L$。

$f''(x)>0\ \forall\ x\neq c$.在那點取到局部極大，在那一點不連續。證連續證什麼？該點的函數值等於該點極限值。從所求想起，因爲函數沒有給，所以用反證法。在(a,c、(c,b)區間遞增，假設在 c 點連續，延拓到(a,c]、[c,b)，在整個區間遞增，局部極大不可能發生在遞增，得到矛盾，矛盾於假設。因此在該點不連續。

eg.

Q:坐標互換在圖形上是什麼意思？A:就是圖形對稱 y=x。
Q:函數反函數圖形可否相交？A:可。
Q:什麼叫對稱？A:函數圖形到 y=x 的距離，映射到另一邊的距離。
Q:爲什麼反函數連續？A:因爲圖形對稱，反函數也會對稱。(一筆畫畫完)
Q:爲什麼反函數可微？A:因爲圖形對稱，切線也會對稱。但可不可微，不是只有切線存在，還要要求切線的斜率不爲無限大，也就是切線會不會垂直。所以反函數可不可微，取決於原函數可不可微且微分爲不爲零。

By the way 感覺事實上，是執行之後的經驗得到的感觸，但是最後不能只留下感觸忘記中間的過程是怎麼做的。這就是我覺得你們現在學東西，比較麻煩的地方是，你們最後停留在結果，但是把過程給拿掉了，但是問題是那個過程才可以拿出來一直做東西。你們學習必須去培養出執行跟感覺是連在一起的。那個部分才是真正大學裡嚴格訓練的,有它跟沒它就是你將來能不能找到一個錢多事少離家近，你能不能站在金字塔頂端的人，你只是動腦的人，而不是動勞力的人，你是發號司令，人家講一句你們去這樣做吧。