L19 定義 integrable(可積)
廣義面積 連續必可積 Riemann sum (黎曼和)

我們延續上次的討論，在同樣的假設之下，函數大於零，y=f(x)在 x 所夾的面積，這個面積沒辦法算，因爲它不是規則形，所以後來我們把它變規則一點，透過細分。因爲我們希望細分的方式一置，所以我們在定義域上做細分，把它分成 n 段，n 個小區間，考慮內接和外接長方形，分別爲 $L_f(P)$和 $U_f(P)$。

$L_f(P)\le \text{area}(\Omega)\le U_f(P),\ \forall P$。

Q:在每一個小區間上都有一定的誤差，如何把誤差變小呢？
A:把細分的區間變小。
Q:如何讓每一個區間都變小呢？
A:就把區間最長的區間變小，其它的也會跟著變小。

Def: The length of a partition P of [a,b] is denoted ||P|| and defined by ||P||=

$\boxed{\displaystyle\max_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i}$。

口語：對 n 的小區間取最大值，定成||P||。

Consider $\lim_{\|P\|\to 0}U_f(P)$ and $\lim_{\|P\|\to 0}L_f(P)$考慮極限可能存在或不存在

If $\lim_{\|P\|\to 0}U_f(P)$ and $\lim_{\|P\|\to 0}L_f(P)$ exist, and are equal to each other

then $\text{area}(\Omega)=\lim_{\|P\|\to 0}U_f(P)=\lim_{\|P\|\to 0}L_f(P)$.如果存在誤差幾近於零

Q:什麼時候這個極限會是我的面積呢？
A:第一個 $U_f(P)$and$L_f(P)$極限一定要存在。
　第二個這兩個極限要相等。怎麼知道它相等，取決算出來的結果。(如果不相等，一定有問題。)

Rmk:

① 當$f\le 0$ on [a,b], 若$\lim_{\|P\|\to 0}L_f(P)$ and $\lim_{\|P\|\to 0}U_f(P)$存在且相等，

則thelimit=-area(Ω)

Q:Ω是什麼東西？A:函數圖形跟 x 軸所夾的區間。

② In general, f的取值有正有負.若$\lim_{\|P\|\to 0}L_f(P)$ and $\lim_{\|P\|\to 0}U_f(P)$

存在且相等，則 thelimit=(函數y=f(x)的圖形在x-軸上方的面積)

-(函數 y=f(x)的圖形在 x-軸下方的面積).$\overset{\Delta}{\to}$ Ω的廣義的面積

L19 定義 integrable(可積)
廣義面積 連續必可積 Riemann sum (黎曼和)

Def:

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a function.

If $\lim_{(\|P\|\to 0)}Pf(P)$ and $\lim_{(\|P\|\to 0)}Lf(P)$ exist and equal to each other, then

we say f is integrable over [a,b].

Pf(P)極限存在 Lf(P)極限存在且相等，我們就說在[a,b]可積。

We denote the limit by $\int_a^b f(x)dx$.函數圖形在 x 軸所夾的廣義面積。

Q:什麼是廣義面積？A:函數圖形在 x 軸上方的面積減 x 軸下方的面積。
By the way f'(x)表割線斜率的極限，工程上表瞬間變率

Question:怎樣的函數是可積的？ A:連續函數

By the way~
上次考慮函數的極限、連續、可微、遞增減、上下凹，一直在研究函數的性質。
可積不一定連續。可積函數跟連續函數定義不一樣。
可微必可積，因爲可微必連續，連續必可積，所以可微必可積。

Thm:

If $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ is cont., then f is integrable over [a,b].

如果函數在[a,b]連續，則函數在[a,b]可積。

pf:高微證

[Observation]

Let $x^*\in[x_{i-1},x_i]$, $\forall$ i=1,...,n.

$[x_{i-1},x_i]$是 ab 區間的第 i 的區間；$\forall$ i=1,...,n 是對每一個區間都取一點出來叫 i*

then $m_i\leq f(x^*)\leq M_i$, $\forall$ i=1,...,n.

L19 定義 integrable(可積)
廣義面積 連續必可積 Riemann sum (黎曼和)

⇒ mi Δ xi ≤ f(x*) Δ xi ≤ Mi Δ xi, ∀ i=1,...,n.

內接長方形≤中間任一個長方形≤外接長方形

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} mi\Delta xi \le \sum_{i=1}^{n} f(xi^{*})\Delta xi \le \sum_{i=1}^{n} Mi\Delta xi$$

全部求和起來

i.e $L_f(P) \le \sum_{i=1}^{n} f(xi)\Delta xi \le U_f(P)$

$\sum_{i=1}^{n} f(xi^{*})\Delta xi$ which is called a Riemann sum for partition P.

(有無限多個 Riemann sum)

Q:一個 partition 有幾個 Riemann sum？
A:無限多個，從每個區間上任取高的個數。
Q:一個 partition 有幾個 Uf(P)orLf(P)？
A:一個，每個區間只能取最大(小)高。
Q: Riemann sum 是什麼？~默背

Thm:

Q:什麼是 integrable？
A:Uf(P)和 Lf(P)極限存在且相等。
By pinching thm.頭尾的極限存在且相等，中間的極限存在且相等。

If f integrable over [a,b], then $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(xi^{*})\Delta xi = \int_a^b f(x)dx$.

$\int_a^b f(x)dx$ the definite integral of f frown a to b.

Rmk:

① 若f是可積的，則可算upper sum, lower sum or Riemann sum.

upper sum 算最大、lower sum 算最小、Riemann sum 在其中取就可以

② $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

Q:為什麼對？
A:都等於在函數 y=f(x)與 x 軸所夾的廣義面積
(即定積分與函數的變數的取法無關)
By the way 微積分真正難的是下學期，上學期只是基礎。
現在還可以臨時抱佛腳，下學期不可能，因為連上學期也要抱。

L19 定義 integrable(可積)
廣義面積 連續必可積 Riemann sum (黎曼和)

eg. Let f(x)=$\begin{cases} 1, if\ x \ni Q \cap [0,1] \\ -1, if\ x \ni Q^c \cap [0,1] \end{cases}$.

Is f integrable over [0,1] ?

Q 是有理數、c 是補集、Q^c 是無理數
這是一個明確的題目，要證 integrable(Uf(P)的極限 Lf(P)的極限存在且相等。)

pf:

給一個 partition，任意的 partition。

Let P={$0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$} be a partition of [0,1].

再來算 Uf(P)和 Lf(P)，在每一個小 sum 算最大值最小值

Then Mi=1 and mi=-1, ∀ i=1,2,...n.

⇒Uf(P)=$\sum_{i=1}^{n} 1\cdot \Delta xi$=1-0=1 and Lf(P)=$\sum_{i=1}^{n} -1\cdot \Delta xi$=-(1-0)=-1

$\sum_{i=1}^{n} \Delta xi$ 整段區間的和

lim(||P||→0)Uf(P)=1 and lim(||P||→0)Lf(P)=-1 取極限

∵ 1≠-1 ∴ f is not integrable over [a,b].

Thm:

$\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$, where a>0.

pf:

Q:什麼叫定積分？A:Uf(P)的極限、Lf(P) 的極限、也可以說 Riemann sum 的極限

∵ x^2 is cont. on [a,b] x^2 是一個多項式函數

∴ x^2 is integrable over [a,b] 連續必可積分

Let P={a=x0<x1<...<xn=b} be a partition of [a,b].

Let f(x)=x^2

L19 定義 integrable(可積)
廣義面積 連續必可積 Riemann sum (黎曼和)

Then $M_i=f(x_i)=x_i^2$ and $m_i=f(x_{i-1})=x_{i-1}^2$

$$U_f(P)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} x_i^2(x_i-x_{i-1})$$

$$L_f(P)=\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2(x_i-x_{i-1})$$ 這的地方沒辦法算，改用 Riemann sum

$$\sum_{i=1}^{n} f(xi^*)(x_i-x_{i-1})$$ 沒辦法直接算，把湊成 a^3-b^3，可以相消

a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)希望找 $xi^*\in[x_{i-1},x_i]$ s.t.

$f(xi^*)=(x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)/3$ 取平均 沒辦法算，所以取平均値

Q:能不能找到一個點取值爲$(x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)/3$？
A:可以，爲什麼？Intermediate value thm.

$f(x_{i-1})\le(x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)/3\le f(x_i)$, $\forall i=1,2\ldots,n$

$\because$ f is cont. on $[x_{i-1},x_i]$

$\therefore$ By Intermediate value thm.

$\exists\ xi^*\in[x_{i-1},x_i]$, s.t. $f(xi^*)=(x_i^2+x_ix_{i-1}+x_{i-1}^2)/3$, $\forall\ xi=1,2\ldots,n$

$$\sum_{i=1}^{n} f(xi^*)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}(x_i^3-x_{i-1}^3)$$ (a-b)(a^2+ab+b^2)= (a^3-b^3)

$$=\frac{1}{3}\left[(x_1^3-x_0^3)+(x_2^3-x_1^3)+\ldots+(x_n^3-x_{n-1}^3)\right]$$

$$=\frac{1}{3}(x_n^3-x_0^3)=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$ 取極限，a、b 定數，取極限也是定數。

$$\Rightarrow \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(xi^*)\Delta x_i=\frac{1}{3}(b^3-a^3)\Rightarrow\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

定積分就是 Riemann sum 的極限

Ex:P245(12.15.17.21.23.31.39)