L11 中間值定理的應用 3.1 derivate

Q:中間值的內容敘述
A:如果有一個函數在 AB 閉區間上連續，對任意 c 在 f(a)與 f(b)之間，
則會存在有一個 x_0在 AB 閉區間，使得 $f(x_0)=c$。
它真正建模的概念 f(a) and f(b) 之間的值必被取。

eg. Show that 3x^3-2x+5 has a root.

Q:這裡提到 AB 閉區間了沒？A:沒。
Q:那怎麼辦？A:所以要自己找。
Q:這個題目是要找一個數？A:取值爲 0。
Q:找怎樣的區間，有沒有條件？A:有。
第一個 f 在這個閉區間連續。第二個要使得 0 被取，0 要介於 f(a) and f (b)之間。

$\because$ $f(0)=5$, $f(-2)=-24+4-5<0$ $\therefore$ 0 is between f(0) and f(-2).

$\because$ f is cont. on [-2,0] $\therefore$By Intermediate value thm. $\exists\, x_0 \in[-2,0]$ s.t $f(x_0)=0$.

Therefore f has a root.

eg. Let f be cont. on [0,1] and $0\leq f(x)\leq 1$. Show that $\exists$ $c\in[0,1]$ s.t. $f(c)=c$

pf: If f(0)=0 or f(1)=1, then it’ s done! 證得，解題的經驗。

assume then f(0)>0 and f(1)<1. 假設 f(0)=0 or f(1)=1 不發生，也成立。

f(0)=0 不發生，所以 f(0)>0；f(1)=1 不發生，所以 f(1)<1

Let $g(x)=f(x)-x$ Q:在數學上如何求交集？ A:求兩個函數相減有零根

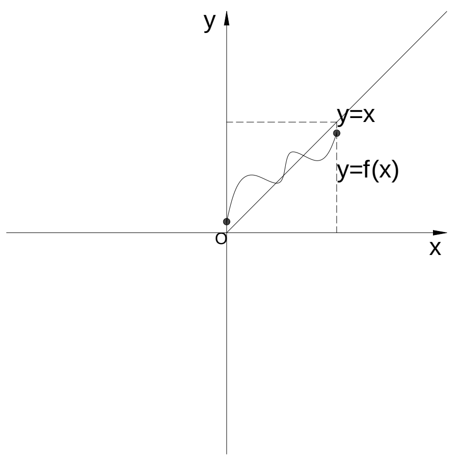
$\because$ f and x are cont. on [0,1] $\therefore$ g is cont. on [0,1] 根據連續四則運算

$\because$ $g(0)=f(0)-0>0$ and $g(1)=f(1)-1<0$ $\therefore$ 0 is between g(0) and g(1).

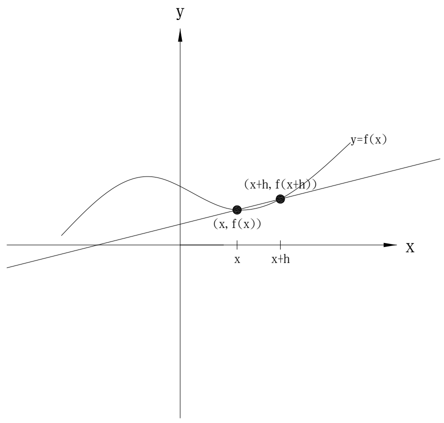
By Intermediate value thm. $\exists$ $c\in[0,1]$ s.t. $g(c)=0$

$\Rightarrow g(c)=f(c)-c=0$

$\Rightarrow f(c)=c$



L11 中間值定理的應用 3.1 derivate



Chapter 3 Differentiation

§ 3.1 The derivative

Let f be a function

Question:How to find the tangent line of graph

of the function $y=f(x)$ at $(x,f(x))$?這個問題就是研究微分的出處

所有人的經驗都說我會畫，但是問題是常常畫壞，變成割線，所以事實上畫割線。
Q:什麼叫割線？A:就是在圖形上取任何兩點的連線。
割線找兩點，有一點會被固定，那點就是找切線的點，所以在找一點。
圖形上的一點，事實上定義上先給一點。所以我要講這個點有 x 座標 y 座標，但這是函數的圖形，所以這兩個位置，x 的位置決定 y 的位置就決定。就算你要決定函數值，事實上是從自變數所決定的。所以在這個地方須要再找一個點，描述這個點有兩種方式，一個是用函數的變數，一個是用跟該點的差距，在這個地方我們用的是差距。x 是固定點，差距為 h，所以該點就是$(x+h,f(x+h))$

去看$(x,f(x))$與$(x+h,f(x+h))$所決定的割線

Q:割線不是切線，但是我要求切線。可是我從割線畫起，如何得到切線？
A:從圖形上想，也就是讓第二點往 x 靠近，也就是讓 h 變小。

當 $h \to 0$ 時，此割線會逼近切線。故切線是割線的極限(as $h \to 0$)

可是你會發現，割線是一整條線，你求它的極限，線的極限是一條線，不好控制。可牽涉到有無線多點，想法上可行，可是它的數學建模寫出來有一點難。
換一個方式，割線是兩點所決定，有一個點固定不動，就是$(x,f(x))$，過這點的割線，依依對應它的斜率，斜率是一個數，割線是一條線。求線的極限，可以考慮從割線斜率的極限，由點斜式可知。
Q:割線的斜率等於多少？A:兩點$(x,f(x)),(x+h,f(x+h))$， y 差值/x 差值

改成考慮割線的斜率$=[f(x+h)-f(x)]/h$

考慮 $\lim_{h \to 0}[f(x+h)-f(x)]/h$ 割線斜率的極限

Q:極限一定會存在嗎？A:不一定。
Q:如果存在，結果會是一個數。切線知道了嗎？
A:知道了，過那點，以這個數為斜率，由點斜式可以求出。

L11 中間值定理的應用 3.1 derivate

Def: $\boxed{\text{We say that f is differentiable at x, if } \lim(h\to 0)[f(x+h)-f(x)]/h \text{ exists.}}$

$\boxed{\text{我們說函數在該點可微，如果割線斜率的極限存在。}}$

$\boxed{\text{If the limit exists, it is called the derivative of f at x, and is denoted by } f'(x).}$

$\boxed{\text{如果極限存在，它被稱爲函數在該點 derivative，被記成 } f'(x)\text{。}}$

Q:lim 是誰的極限？A:割線斜率的極限。

Q:f'(c)？A:該點割線斜率的極限。數學上 lim(h→0)[f(c+h)-f(c)]/h

Def:We say that f is diff. on the set I, if it is diff. at every point of I.

Rmk:f→f' (f'=derivative of f)

Q: f(Dom)與 f'(Dom)哪一個大？A: f(Dom)，爲什麼？因爲討論 f 在割線斜率的極限存在，存在的叫 f' (Dom).

① Dom(f')包含於Dom(f)

② f'(x)=the slope of tangent line of the graph of the function y=(x) at (x,(f(x).

eg. Show that f(x)=x^2 is deff. on ℝ and f'(x)=2x.

pf:Let x∈ℝ 設實數上一點，根據可微的定義，割線斜率的極限存在

lim(h→0)[f(x+h)-f(x)]/h= lim(h→0) [(x+h)^2-x^2]/h

=lim(h→0) [x^2+2xh+h^2-x^2]/h= lim(h→0) (2xh+h^2)/h= lim(h→0)2x+h

= 2x+0=2x.極限的四則運算(2x→2x,h→0)

So f is diff. on ℝ and f'(x)=2x. Q:f'(x)=2x 爲什麼？A:該極限存在等於 2x

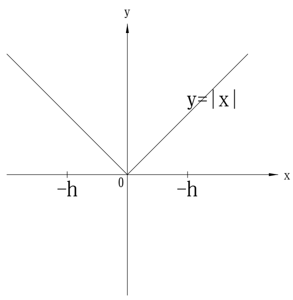
eg. Let f(x)=|x|. Show that f is not diff at 0.

Let f(x)=x,if x≥0 －x,if x≤0

L11 中間值定理的應用 3.1 derivate

$\lim(h\to 0^{+})=(h-0)/h=1$, $\lim(h\to 0^{-})=(-h-0)/h=-1$

$\because 1\neq -1$ $\therefore \lim(h\to 0)[f(h)-f(0)]/h$ does't exist$\Rightarrow f$ is diff. at 0.



Note:

在 0 點是兩條割線相交，割線的極限不存在，割線斜率的極限也不存在。
1 跟-1 不能趨近一定數。
Q:從圖形上如何判斷可不可微？A:若圖形在某點有尖角，則 f 在該點不可微，故若 f 在該點可微，則圖形在該點會圓滑。

eg. Find f'(1) given by $f(x)=x^2, x\leq 1$ 、$2x-1, x\geq 1$, and the tangent line…at

$(1,f(1))$.

pf:

Q:證什麼？A:f(1)割線斜率的極限存在，在 1 這點切割成兩部分，要分開算。

$\lim(x\to 0^{+})\{[2(1+h)-1]-1\}/h=\lim(x\to 0^{+})2h/h=\lim(x\to 0^{+})2=2$

$\lim(x\to 0^{-})[(1+h)^2-1]/h=\lim(x\to 0^{-})(2h+h^2)/h=\lim(x\to 0^{-})2+h=2+0=2$

$f'(1)=2, f(1)=1$ 過這點，由點斜式

$\because (y-1)/(x-1)=2$ $\therefore y-1=2x-2\Rightarrow 2x-y=1$

P112(6.19.32.40.49.59)