L9　證明連續的合成函數、多項式 端點連續

2.5 Pinching theorems (夾擠定理) Trigonometric theorems (三角函數的連續)

Q:為什麼證明題需要因為~所以~？

A:證明題需要思想的推導，過程中會有數學符號因為∵~所以∴。

Q:連續合成函數的定理是什麼？

A:If f is cont. at c and g is cont. at f(c), then g(f(x)) is cont. at g(f(c)).

Q:什麼時候函數在該點會連續？

A:該函數在該點極限值等於函數值，數學上說該點連續。圖形在該點不會斷掉。

Q:這個地方有個定理可以用？

A:1.連續的四則運算、2. 連續合成函數的定理。

Q:我們想如何製造大量的函數？

A:大部分的函數都是合成函數。四則運算是最簡單的，但不是最好的工具。

因為連續的定義是根據極限算的，所以可以用連續算極限。

e.g Show that f(x)= $\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-8)^3}}$ is cont. on x>8.

Q:在該點及集合的英文介系詞？點 at、on 區間

必需猜解成一個一個合成函數。$x \to (x^2+1)/(x-8)^3 \to \sqrt{t}$

利用有理分式連續的定理，如果在該點有定義，則在該點會連續。(or 可取 x>8)

pf:

$\because \frac{x^2+1}{(x-8)^3}$ is defined on $x \neq 8$.

$\therefore \frac{x^2+1}{(x-8)^3}$ is cont. on $x \neq 8$.

利用$\sqrt{t}$ is cont. on t>0.，不用真的去算 f(I)>0，利用 t>0 代表。

$\because \frac{x^2+1}{(x-8)^3} > 0$ on x>8 and $\sqrt{t}$ is cont. on t>0.

$\therefore \sqrt{\frac{x^2+1}{(x-8)^3}}$ is cont. on x>8.

e.g. Show that f(x)= $\frac{x}{5-\sqrt{x^2+16}}$ is cont. everywhere except at $x \neq \pm 3$.

Q:因為它是一個分式，所以想到連續除法定理。連續除法法則定理？

A:若兩個連續函數相除，在該點的分母的函數值不為 0，則在該點連續

先看分母，$\sqrt{x^2+16}$連續，$\sqrt{x^2+16}$是多項式所以在 R 上都連續。

利用連續合成函數的定理。$\sqrt{x^2+16} \to \sqrt{t}$

$\because x^2+16$ is cont. on $\mathbb{R}$

$\because x^2+16$ is cont. on $\mathbb{R}$ and $\sqrt{t}$ is cont. on t>0 $f(\mathbb{R})>0$

L9　證明連續的合成函數、多項式 端點連續

2.5 Pinching theorems (夾擠定理) Trigonometric theorems (三角函數的連續)

$\therefore \sqrt{x^2+16}$ is cont. on R.

$\Rightarrow 5-\sqrt{x^2+16}$ is cont. on R.

接著回到相除的連續，分母不為 0。需要解分母為 0 的點。

$5-\sqrt{x^2+16}=0 \Rightarrow x^2+16=25 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm3$

$\because$ x is cont. on R and $5-\sqrt{x^2+16} \neq 0$ on $x \neq \pm3$

$\therefore \frac{x}{5-\sqrt{x^2+16}}$.

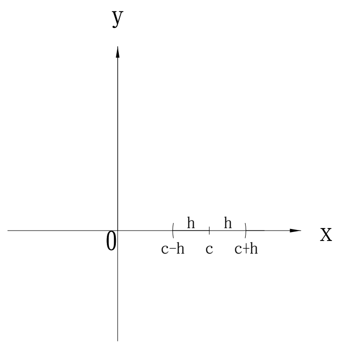
Def:

Let f [a,b]→R be a function, f is cont. at a, if $\lim(x\to a^+)f(x)=f(a)$

左連續 函數在該點的右極限等於該點函數值

Let f [a,b]→R be a function, f is cont. at b, if $\lim(x\to b^-)f(x)=f(b)$

右連續 函數在該點的左極限等於該點函數值



By the way $x\to a^+$只能用在極限

Thm: f is cont. at c $\Leftrightarrow \lim(h\to0)f(c+h)=f(c)$

函數在 c 點連續若且唯若 $\lim(h\to0)f(c+h)=f(c)$

pf:f is cont. at c $\Leftrightarrow \lim(x\to c)f(x)=f(c)$

"Let x=c+h" ,then $x\to c \Leftrightarrow h\to0$ 做一個變數變換，把點換成差距。

f is cont. at c $\Leftrightarrow \lim(h\to0)f(c+h)=f(c)$

Thm:

Suppose that f is cont. at c.If f(c)>0, then $\exists\ \delta>0$ s.t. f(x)>0 on $(c-\delta, c+\delta)$

$=(\forall x \text{ in } (c-\delta, c+\delta), f(x)>0)$

如果有一個函數在 c 點連續，且它的函數值大於 0，則存在有一個區間 δ，使得它在這個區間內的每一點取值都會大於 0。

pf:

(畫圖就知道) 把圖形看到的現象用數學寫出來，數學建模。
Q:什麼叫連續？A:極限值等於函數值連續的定義

$\because$ f is cont. at c. $\therefore \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$

Q:什麼叫極限？A:函數值跟極限值得很貼近。
Q:要多接近有貼近，貼近要取多少？A:就是貼近的值不會由正變到負。
Q:用什麼描述貼近？A:y 軸上的差距用 ε 。
Q: ε 取 f(c)可不可以？A:取比 f(c)小的值都可以

Let $\varepsilon=f(c)/2$, then $\exists\ \delta>0$, s.t. $\forall x$ in $0<|x-c|<\delta$, $|f(x)-f(c)|<f(c)/2$

$\Rightarrow f(x)\in(f(c)/2, 3f(c)/2)$

因為 f(c)>0，所以已半徑 f(x)，上下夠走 f(x)/2。
Q: 這個式子一出來表示 f(c)>0，在哪個區間內？A:在挖掉 c 點那個區間內
根據條件 f(c)>0 已經大於 0，推得|x-c|>0
By the way~可以寫區間，也可以寫成不等式 $f(c)/2<x<3f(c)/2$

Ex:P88(35.37.52.53.54.55)

補充題：

Show that $f(x)=(x^2+2x)^{1/3}+|4x+5|/(x^2-2x+1)$ is cont. everywhere except at x=1.

L9　證明連續的合成函數、多項式 端點連續
2.5 Pinching theorems (夾擠定理) Trigonometric theorems (三角函數的連續)

§ 2.5 The Pinching theorems and Trigonometric functions.

Thm: Let $f(x)>g(x)$ on $0<|x-c|<a$. If $\lim_{x\to c}f(x)=L$ and $\lim_{x\to c}g(x)=M$,

then $L\geq M$. 小於也是一樣。

如果我有兩個函數可以比大小，且極限存在，則極限可以比大小

(多等於)。

Q:這個定理講的是極限會不會保持不等式？不一定，極限要先存在。Q:$\because f(x)\geq g(x)$
$\therefore \lim_{x\to c}f(x)\geq \lim_{x\to c}g(x)$對不對？
A:不對？爲什麼，因爲極限不一定存在。
By the way~這個運算跟極限四則運算一樣，極限要先存在。

Thm:(The Pinching thm.)證明留到高微

Suppose that $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ on $0<|x-c|<a$.

If $\lim_{x\to c}h(x)=\lim_{x\to c}g$ L, then $\lim_{x\to c}f(x)=L$

Q:夾擊定理是什麼？

A:

如果我有三個函數可以比大小，如果頭尾的極限存在且相等 L，則中

間的極限會存且等於 L。

Q:這個定理什麼時候用？

A:三個函數可以比大小，頭尾極限存在且相等。

備註：右極限成立，左極限也成立。

By the way~極限是枯燥乏味的。就像練武功的紮馬步，但會讓你變成宗師。