L5 證明極限存在 極限的定理證明

△微積分期中、期末考日期 10/25,11/29,1/10(一) 晚上 7:00~10:00

eg2.Show that $\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$.

pf:

Let $\varepsilon>0$ $|(2x-1)-3|=2|x-2|<\varepsilon$.

從 ε 給出的不等式，找出$|x-2|<\delta$ 的解集合，先化簡後解

$\Rightarrow |x-2|<\varepsilon/2$,

Take $\delta=\varepsilon/2$.任何比它小的數都可以

Then $\forall$ x in $0<|x-2|<\delta$, $|f(x)-L|<\varepsilon$.找到 δ 定義被滿足

Therefore $\lim_{x\to 2}2x-1=3$.根據定義證得極限等於 3

eg3.Show that $\lim_{x\to 2}x^2=4$.

pf:

Let $\varepsilon>0$, $|x^2-4|=|(x+2)(x-2)|=|x+2||x-2|<\varepsilon$

解$|x-2|<\delta$ 的解集合

Q:$|x+2||x-2|<\varepsilon$ 能不能解的出來？A:不能

如果硬要解必須要改成$|x-2|<\varepsilon/|x+2|$

Q:$|x-2|<\varepsilon/|x+2|$可不可以解？
A:不可。因為$|x+2|$不是一個數，而是一個函數，如果$|x+2|$是一個數就可以解。
Q:所以估計此數，將其估成一個數，你要估≥還≤？
A:≤。因為最後要找$|x-2|<\delta$，所以必須維持≤。
Q:$|x+2|$它的範圍多少？A:它要多大有多大，基本上要估它不太可能。
如果不能估它這個極限算不出來．
Q:如果要估它，必須將 x 取範圍。問題可不可以取範圍？Q:可以，為什麼？
想到極限，在極限裡可以取 x 的範圍，極限值在遠離 x=2 遠處無關，從哪裡開始走也無關，也就是先給一個範圍，但範圍一定要是 2 的範圍，可以取右邊多一點

L5 證明極限存在 極限的定理證明

或左邊多一點，但最後要解|x-2|的範圍，所以取一樣的距離。

assume(假設) $|x-2|<1$.就隨便選一個數，取 1 方便計算。

Then $-1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3 \Rightarrow 3<x+2<5 \Rightarrow |x+2|<5$ 解不等式，估得小於 5

回到$|x^2-4|<5|x-2|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\varepsilon/5$

Q:take $\delta=\varepsilon/5$，可不可？A:不可
因爲一開始已經定$|x-2|<1$，所以要取交集，交集取半徑小的。區間用距離描述的，。

Take $\delta=\min(1, \varepsilon/5)$. 距離有兩個一個是 1,一個是 $\varepsilon/5$，兩個數取小的

Then $\forall$ x in $0<|x-2|<\delta$,$|x^2-4|<\varepsilon$.找到 δ 做到定義的要求

Therefore $\lim_{(x\to 2)}x^2=4$. 根據定義證得極限等於 4

步驟：

① Let $\varepsilon>0$, 解$|f(x)-L|<\varepsilon$ 的不等式

② 先化簡再解$|x-c|<\delta$

③ 如果解不是定數，則估x大小

④ Take δ =如果一開始有限制x的範圍，則須取min()

⑤ Then δ 必須滿足定義的要求

⑥ Therefore因此根據定義，極限存在。

L5 證明極限存在 極限的定理證明

Theorem(Thm)不用證明，可以直接用的，根據定義而推得的結果。

① $\boxed{\lim_{x\to c}|x|=|c|.\ \forall\ c(c\text{是一個常數or實數})\text{屬於}\in\ \mathbb{R}.}$

Note:實數所成的集合 the set of real numbers=$\mathbb{R}$

② $\boxed{\lim_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c},\forall\ c>0.}$因爲沒有路徑就走不下去了

$\lim_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c},\forall\ c>$Q:可不可以改等於 0？A:不可。不然要改 c^+

第一個 定理是被證明的，是被承認的。定理是一個法則，需要背
第二個 內容需要記
第三個 口語化

pf:

①.Let $\varepsilon>0$, $||x|-|c||\le|x-c|<\varepsilon$.化簡成|x-c|。等於不影響，最後會小於

Take $\delta=\varepsilon$.

Then $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta$, $||x|-|c||<\varepsilon$.

Therefore $\lim_{x\to c}|x|=|c|$.

②.Let $\varepsilon>0$,$|\sqrt{x}-\sqrt{c}|=|(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})/(\sqrt{x}+\sqrt{c})|=|x-c|/|\sqrt{x}+\sqrt{c}|$

Q:分母的絕對值能不能拿掉？A:能，爲什麼？
因爲$\sqrt{x}>0,\sqrt{c}>0$。
Q: $|x-c|/(\sqrt{x}+\sqrt{c})$能不能再化簡？A:能，爲什麼？
如果不能，要估計，因爲它是一個函數，所以要估它。
Q:能不能把$\sqrt{x}$拿掉？A:能，爲什麼？
因爲$\sqrt{x}>0$，省略整個值變大，等號變≤。如果變≥就不能。

$|\sqrt{x}-\sqrt{c}|\le|x+c|/\sqrt{c}<\varepsilon$. $\Rightarrow|x-c|<\sqrt{c}\,\varepsilon$.

Take $\delta=\sqrt{c}\,\varepsilon$.

Then $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta$,$|\sqrt{x}-\sqrt{c}|<\varepsilon$.

Therefore $\lim_{x\to c}\sqrt{x}=\sqrt{c}$.

L5 證明極限存在 極限的定理證明

§ 2.3 存在有 δ 的第二種。

已知極限存在，能做什麼？會有什麼結果？

Thm: $\boxed{\lim_{x\to c} f(x)=0 \Leftrightarrow \text{ if and only if 若且唯若 } \lim_{x\to c}|f(x)|=0.}$

已知⇒求證 If $\lim_{x\to c} f(x)=0 \Rightarrow \lim_{x\to c}|f(x)|=0$.

已知⇐求證 If $\lim_{x\to c} f(x)=0 \Leftarrow \lim_{x\to c}|f(x)|=0$.

Q:一般來講，已知和求證從何想起？A:求證
因爲已知通常是中間過程才用到。從所求想起，證明極限。

Let $\varepsilon>0$, $||f(x)|-0|=|f(x)|=$解不下去了，這時候用已知來解。

$|f(x)-0|<\varepsilon$

Q:解的是已知的不等式，爲什麼能解？A:因爲極限已經存在了

$\because \lim_{x\to c} f(x)=0$, $\therefore$ For this ε, $\exists\, \delta_1>0$, such that $\forall$ x in

$0<|x-c|<\delta_1, |f(x)-0|<\varepsilon$

$\Rightarrow ||f(x)|-0|<\varepsilon$.因爲已知已經解了，所以所求能解

Therefore $\lim_{x\to c}|f(x)|=0$

⇐自己證.

口語：

⇒如果某函數極限值爲 0，則加絕對值，極限值亦爲 0；

⇐如果某函數極限值爲 0，則去絕對值，極限值亦爲 0。

L5 證明極限存在 極限的定理證明

Thm: $\boxed{\lim_{x\to c}f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to c^+}f(x)=L \text{ and } \lim_{x\to c^-}f(x)=L}$

這個定理，在前八個圖已經看到了。

pf:Let $\varepsilon>0$, $|f(x)-L|<\varepsilon$ 解$(c,c+\delta)$及$(c-\delta,c)$ 不能解了

兩個合併起來$|x-c|<\delta$，從已知解此不等式

$\because \lim_{x\to c}f(x)=L$,

$\therefore$For this ε, $\exists\,\delta_1>0$, such that $\forall$ x in $(c,c+\delta_1)$, $|f(x)-L|<\varepsilon$

For this ε, $\exists\,\delta_2>0$, such that $\forall$ x in $(c-\delta_2,c)$, $|f(x)-L|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Therefore $\lim_{x\to c^+}f(x)=L$ and $\lim_{x\to c^-}f(x)=L$

$\Leftarrow$ pf:Let $\varepsilon>0$, $|f(x)-L|<\varepsilon$, 解$|x-c|<\varepsilon$ 從已知解此不等式

$\because \lim_{x\to c^+}f(x)=L$,

$\therefore$For this ε, $\exists\,\delta_1>0$, such that $\forall$ x in $(c,c+\delta_1)$, $|f(x)-L|<\varepsilon$

$\because \lim_{x\to c^-}f(x)=L$,

$\therefore$For this ε, $\exists\,\delta_2>0$, such that $\forall$ x in $(c-\delta_1,c)$, $|f(x)-L|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

Therefore $\lim_{x\to c}f(x)=L$

口語：

$\Rightarrow$如果一個極限=L，則左極限一定存在，右極限一定存在，且=L。

$\Rightarrow$如果左極限存在=L，右極限存在=L，則極限一定存在等於=L。

P71:39.42.45.51.53.54.62