

L2 2.1, 2.2 極限(Limit)的定義 用圖例說明極限、左極限和右極限

極限從研究一個問題(函數)開始

We begin to study the limit by looking at some function  $f(x)=x^2$ .

Question:What happens to  $f(x)$  when  $x$  get to close 2 ?

口語：當  $x$  靠近 2 的時後， $f(x)$  會怎麼樣？

Def(Definition):將此問題記成  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=?$

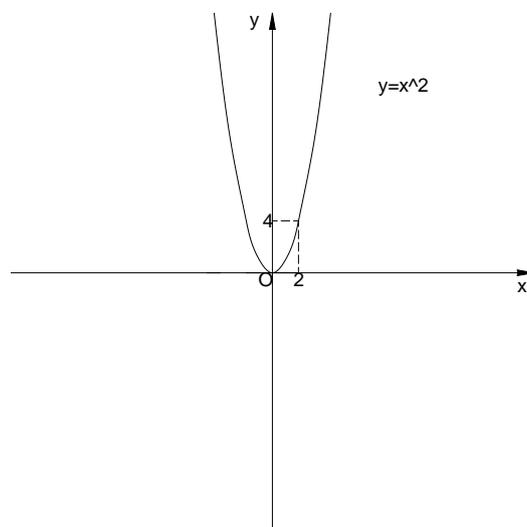
這個問題是一個極限的問題，limit 極限，對函數考慮極限，對自變數  $x$  靠近 2，對  $f(x)$  的考慮？

口語跟數學如何銜接，把口語寫成一個式子，這個式子代表這個問題，像  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)?$ ，當  $x$  靠近  $c$  的時後， $g(x)$  會怎麼樣？

極限本身是一個式子，是一個事情一個現象。

研究這個答案我們從圖形看起，先從概念開始。

第一個圖形



當  $x$  走到 2 時，有兩種走法，可以從 2 的右邊( $x \rightarrow 2^+$ )，或 2 的左邊( $x \rightarrow 2^-$ )，其函數值  $f(x)$  會趨近 4，(趨近的意思，跟 4 要多靠近有多靠近)，趨近是一個概念。

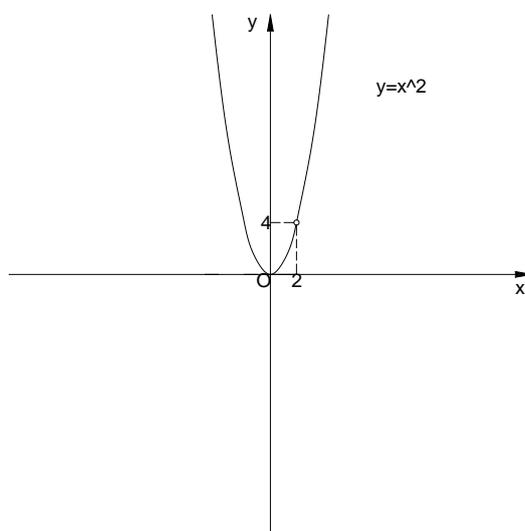
L2 2.1, 2.2 極限(Limit)的定義 用圖例說明極限、左極限和右極限

Def: 將此問題與此答案(其函數值  $f(x)$  跟 4 有多靠近，是走出來的)，記

成  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

eg.  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = -\sqrt{5}$ ，這是一個永不停止現象，跟  $-\sqrt{5}$  要多靠近有多靠近，它永遠不會走到這個數，卻跟這個數不可分離。

第二個圖形，圖形不包含  $(2,4)$ ，在  $x=2$  沒有定義，換句話說此函數只定義在不等於 2



By the way 什麼叫函數(function)? 構成函數三大要素：定義域  $x$ 、對應域  $f(x)$ 、如何對應。

定義域上的每一個點，在對應域可以找到一個點跟它對應。

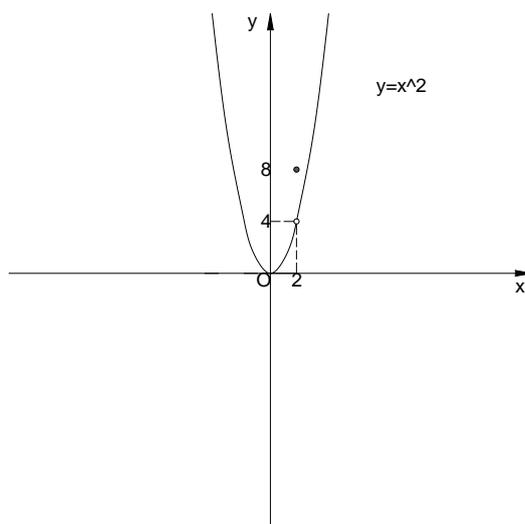
$f: A \rightarrow B$  by  $f(x) = \dots$   $f(x)$  是函數值、 $f(x)$  的集合是值域。

Q:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$  A:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

為什麼這兩個圖形不一樣，答案一樣？原因是，是問  $x$  逼到 2，它從來不會走到，拿掉  $x=2$  沒關係。討論  $x \rightarrow 2$  的極限時與函數在該點  $x=2$  時，有無定義無關。函數在 2 沒有定義，還是可以問  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$

L2 2.1, 2.2 極限(Limit)的定義 用圖例說明極限、左極限和右極限

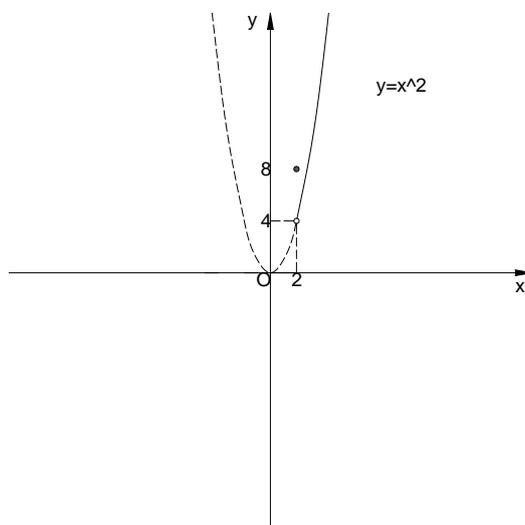
第三個圖形 請問這個圖形在講什麼？在  $x=2$  時，定義成 8。



Q: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=?$  A: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=4$

因為你是問  $x$  趨近 2，所以它的極限值跟在  $x=2$  的函數值無關。

第四個圖形 這個圖形的虛線是看不到的，虛線是讓你看出圖形  $y=x^2$

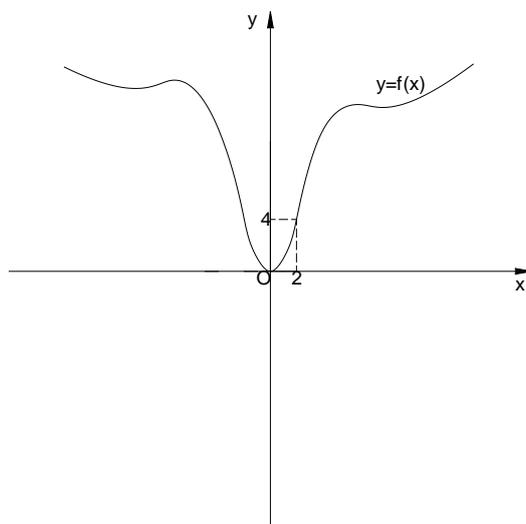


Q: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=?$  A:不存在

因為逼近有兩種，左邊沒有辦法逼近 2。因為  $x$  不能逼近 2(因為  $f$  在  $x < 2$  時無定義)，所以問題不成立 → 答案不存在(The limit doesn't exist)。

L2 2.1, 2.2 極限(Limit)的定義 用圖例說明極限、左極限和右極限

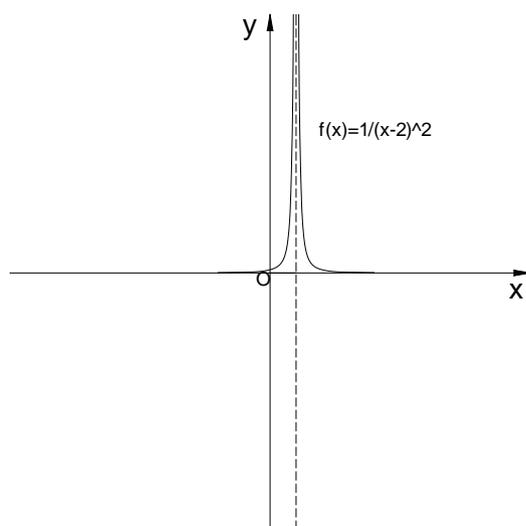
第五個圖形 在遠離  $x=2$  的地方亂畫



Q: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=?$  A: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=4$

遠離 2 遠端的函數值變化，不會影響在  $x=2$  附近的變化。(極限值與遠離  $x=2$  的情形無關)。

第六個圖形 當  $x$  靠近 2 時，會發生無窮大，此問題可以問，因為是問  $x$  逼到 2

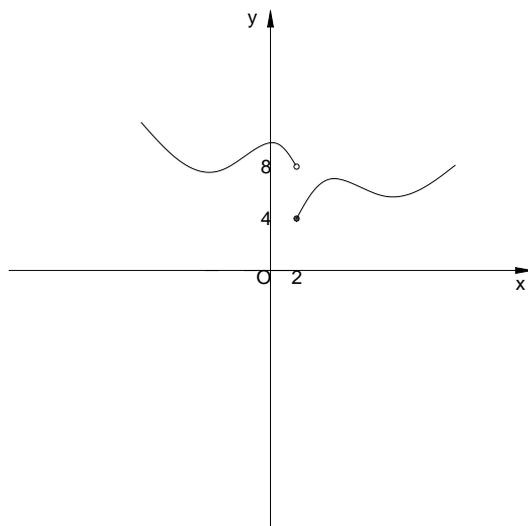


Q: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=?$  A: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=$ 不存在

L2 2.1, 2.2 極限(Limit)的定義 用圖例說明極限、左極限和右極限

此問題可以問，參考例題 2。因為你從圖形上觀察到一個現象，函數值要多大有多大，停不下來，沒辦法逼近某值，(極限值必須是一個定數)。

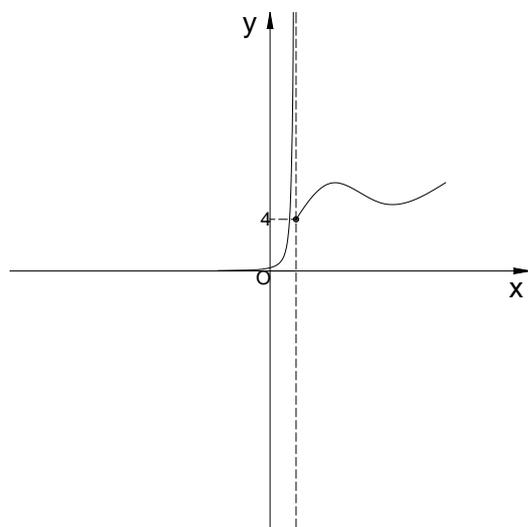
第七個圖形



Q: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$  A: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ 不存在

因為從左邊逼近 8，從右邊逼近 4，總而言之沒辦法逼到某一個數，左邊逼近不等於右邊逼近，(因為  $x \rightarrow 2$  的結果與  $x \rightarrow 2^+$  的結果不一樣，所以極限不存在)

第八個圖形



L2 2.1, 2.2 極限(Limit)的定義 用圖例說明極限、左極限和右極限

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$  A:  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ 不存在，

這個圖形比例 7 還爛 XD! 左邊逼近不存在，只要有一邊不存在，則極限就不存在。

eg.1 Calculate  $\lim_{x \rightarrow c} |x| = ?$  by drawing the graph A:  $|c|$ 。

$|x| = x$  as  $x \geq 0$ ,  $-x$  as  $x < 0$

eg.2  $\lim_{x \rightarrow 0} |x|/x = ?$  (By picture!) A: 不存在，Therefore 極限不存在(The limit doesn't exist)

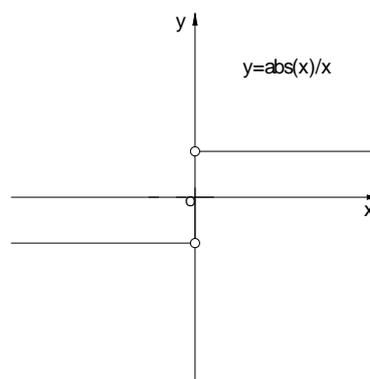
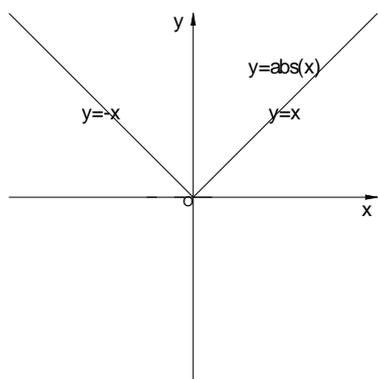
$|x|/x: x = 1$  as  $x > 0$  因為分母為 0 沒有定義,  $-1$  as  $x < 0$

Def:

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = ?$  叫做右極限 當  $x$  從右邊逼近 2 時， $f(x)$  會怎麼樣？

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = ?$  叫做左極限 當  $x$  從左邊逼近 2 時， $f(x)$  會怎麼樣？

如果極限存在  $\Leftrightarrow$  右極限存在，左極限存在，且相等。



Ex(Exercise)

P61(1.2.3.5.11 Determine the limit by drawing the graph: 41.45.46)

Next time 極限真的困難是，如果我不會畫圖，我該如何得到極限值？