4 正規設計

在前一章中我們說明了若某設計之實驗點在圓上有均勻分佈的性質, 其在 (r, θ) 區間上亦會有均勻分佈的性質。但是對同一圓上的設計由於極軸選取的不同, 所導致的 (r, θ) 設計也會不同。在本章中我們將考慮如何能讓所有的 (r, θ) 設計都有好的表現, 進而找出最佳設計 (optimal design)。

4.1 正規設計的定義與性質

在實驗設計上, 正規設計指的是實驗點彼此間滿足一個群 (group) 或體 (field) 的結構的設計, 一個正規設計可由其定義對比子群 (defining contrast subgroup) 定義出來。關於正規設計, 如 2^{s-p}, 3^{s-p} 的各種性質, 在一般的教科書 (如 Wu and Hamada(2000), Montgomery (2001), Dean and Voss (1999)) 中, 已有詳細的介紹。在本章中, 首先考慮在限定實驗次數 n 爲質數時, 2因子 (r 與 θ) 的正規設計。其中 r 與 θ 皆含 n 個水準, 標記爲 $0, 1, \cdots, n-1$。若將 (r, θ) 區間等分成 n^2 個小方陣, 使得其中每一個實驗點便落在一個不同的小方陣內, 令 A 與 B 分別代表 r 與 θ 的水準值。在此我們定義若某個設計的實驗點滿足 (4.1) 式, 稱此設計爲正規設計。

$$A + pB = q \ \ (mod \ \ n) \tag{4.1}$$

其中 $A \in \{0, \cdots, n-1\}, B \in \{0, \cdots, n-1\}, p \in \{1, \cdots, n-1\}, q \in \{0, \cdots, n-1\}$。對每一組給定的 (n, p, q), 滿足 (4.1) 式的 A 與 B 的組合所形成的集合, 便是一個正規設計。往後我們將以 (n, p, q)-設計稱之。

例 4.1　若給定 $(n,p,q)=(5,3,0)$, 則 (4.1) 式爲

$$A+3B=0 \quad (mod\ \ 5)$$

滿足上式的實驗點組合 (A,B) 如下:

$$(A,B)\in\{(0,0),(1,3),(2,1),(3,4),(4,2)\}$$

由幾何圖示可知, 所得之設計如圖4.1(a) 所示, 若改變 q 值爲 $1,\cdots,4$ 則 $(5,3,q)$-設計分別如圖4.1(b)-(e) 所示。在圖4.1(b) 中, 我們可以看出當以 $B=1.5$ 爲新的極軸時, (r,θ)區間分割爲上下兩個區塊, 在不改變區塊內實驗點的相對位置下, 將下方區塊平移至上方區塊頂端, 可得到與圖4.1(a) 相同的圖形, 圖4.1(c) 亦可在改變極軸爲 $B=3.5$ 後, 藉由相同的方式得到與圖4.1(a) 相同的圖形。因此不同的 q 值將對應到同一個圓上的設計針對不同極軸轉換後所形成 (r,θ) 區間上不同的設計, 且設計間可利用區塊上下平移互換互相呼應, 如圖4.1所示。 □

在2.2節中, 我們指出針對同一個圓上的設計, 隨著不同的極軸選取, 其導致的 (r,θ) 設計, 會有不同的性質, 每改變一次極軸即對應一新的設計, 極軸改變後的設計可在 (r,θ) 區間利用互換上下區塊的方式呈現, 此概念可由 (4.1) 式 q 值的改變來具體表示。

例 4.2 (續例4.1) 在圖4.1(a) 中 , 我們若要考慮以 $B=0.5$ 爲新的極軸, 所對應新的設計, 即爲 $q=2$, 如圖4.1(c) 所示, 若將新的極軸改變爲 $B=1.5$, 則對應到圖4.1(e), 此時 q 值爲 4, 若將新的極軸改變爲 $B=2.5$, 則對應到圖4.1(b), 此時 q 值爲 1, 同理若將新的極軸改變爲 $B=3.5$, 其所對應的設計如圖4.1(d) 所示, 此時 q 值分別爲 3。 □

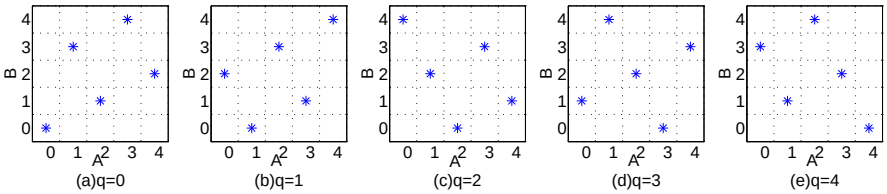

圖 4.1: $A + 3B = q \ (mod\ 5)$

對給定 (n, p) 下, 若將此 q 個不同的設計中的實驗點所在的位置以其 q 值取代, 例如圖4.1(a) 中的5個點用 $q = 0$ 取代, 4.2(b) 中的5個點用 $q = 1$ 取代, 其餘以此類推。再將此 q 個設計重疊起來, 即形成一個 $\{0, \cdots, n-1\}$ 排列的 $n \times n$ 拉丁方陣, 在此方陣的每一行每一列 $0, 1, \cdots, n-1$ 皆出現且僅出現一次。在此我們稱其爲 (n, p)-方陣。在 (n, p)-方陣中, 那些具有相同的數字 (即 q 值) 的實驗點, 即對應到 $A + pB = q \quad (mod\ \ n)$的設計。

例 4.3　圖4.1, 即爲固定 (n, p)=(5,3) 的五種設計, 我們亦可列出它的 (n, p)-方陣。首先用 q 值取代圖中的星點, 再將此五種設計一一重疊起來, 則形成一 (n, p)-方陣, 如表4.1所示。若給定 (n, p)=(5,1) 其 (n, p)-方陣, 如表4.2所示。其中表4.2中的數字4, 所對應的設計, 如圖4.2(a) 所示; 而表4.1數字4, 所對應的設計, 如圖4.2(b) 所示。□

表 4.1: $(5, 3)$-方陣

2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2
0	1	2	3	4

表 4.2: $(5,1)$-方陣

4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0
0	1	2	3	4

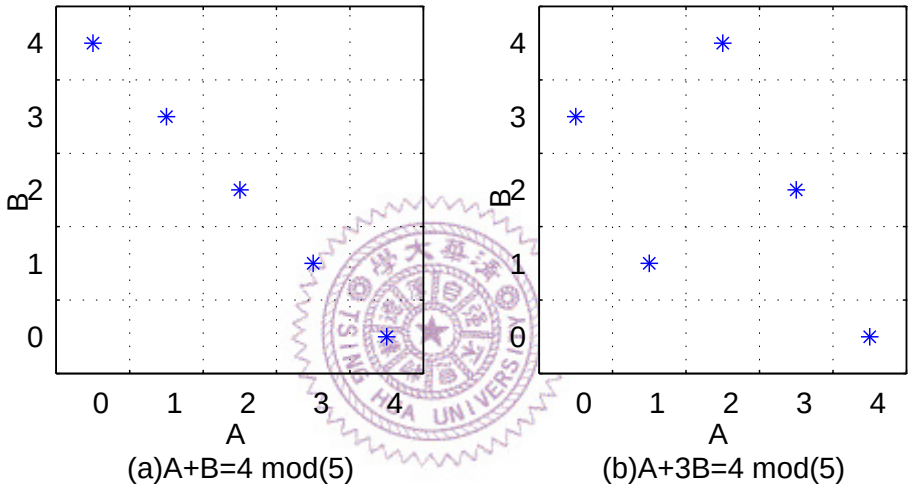

圖 4.2: (5,1,4)-設計與 (5,3,4)-設計

判斷設計好壞有許多準則, 下例我們將以 CL_2 爲準則, 比較(5,3)-方陣中與 (5,1)-方陣中, 那些具有相同數字的實驗點, 其所對應的設計在 CL_2 的表現何者較好。

例 4.4　圖4.3中橫軸表示 q 值, 縱軸表示 CL_2 值, 由圖4.3可知在給定 $n=5$ 之下, 不論 q 值爲多少, $p=3$ 的 (n,p)-方陣中所對應的設計, 在 CL_2 的表現上, 皆比 $p=1$ 的 (n,p)-方陣中所對應的設計, 表現的好。 □

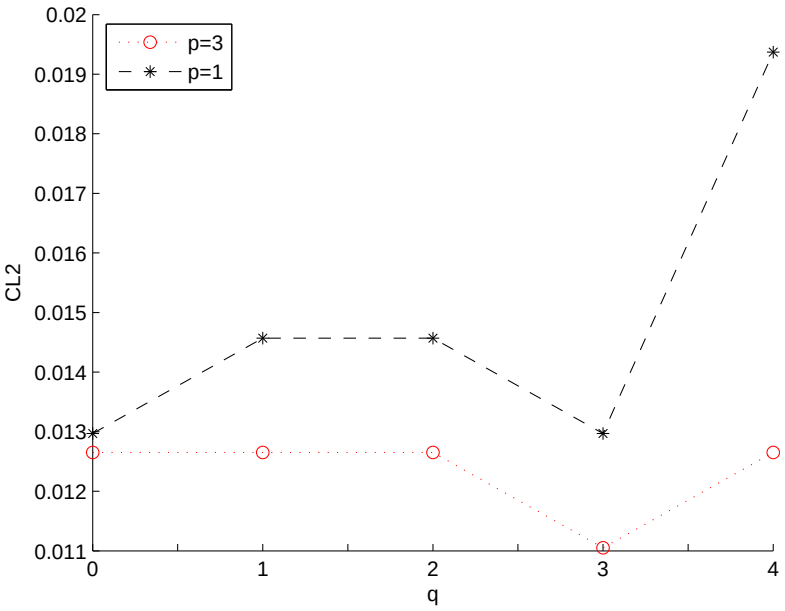

圖 4.3: $(5,1,q)$-設計及 $(5,3,q)$-設計的 CL_2 值

因爲未來做資料分析時, 不知最佳的極軸會選取在何處, 故我們希望在實驗設計的階段, 對於給定的 (n,p), 不論 q 值爲何, (n,p,q)-設計都要好。也因爲在給定 n 之後, p 是唯一可變動的部份, 故本章接下來將探討的是, 在給定 n 之下該如何挑選 p。我們提出了兩種新的準則來選取 p 值, 將在4.2及4.3節加以敘述。

4.2 準則一

在介紹準則一之前, 我們先介紹一些因爲同餘所造成的性質。由 (4.1) 式所生成的正規設計, 因同餘性質故存在以下的對稱性, 一個 (n,p,q)-設計可藉由鏡射 (reflection) 得到另一個與其對稱的設計, 且此兩個設計具有相同的性質。

1 對 $A=\frac{(n-1)}{2}$ 對稱: 首先將對 $A=\frac{(n-1)}{2}$ 鏡射以函數表示爲 $T(A,B)=(n-1-A,B)$, 故可得 (n,p,q)-設計對 $A=\frac{(n-1)}{2}$ 鏡射所對應的設計即爲 $(n,n-p,n-$

$1-q$)-設計 (證明參考附錄 A.1)。以圖4.4爲例, 在圖4.4中 (a) 爲 (11,4,2)-設計, (b) 爲 (11,7,8)-設計, 若將 (11,4,2)-設計之實驗點, 對 $A=5$ 鏡射 , 可得 (11,4,2)-設計, 並且此兩種設計在 CL_2 的數值計算上皆爲 0.0029943 。所以可知 (n,p,q)-設計與 $(n,n-p,n-1-q)$-設計此二設計具有相同的幾何性質, 故以下我們只考慮 $p=1,\cdots,\frac{(n-1)}{2}$ 的情況。

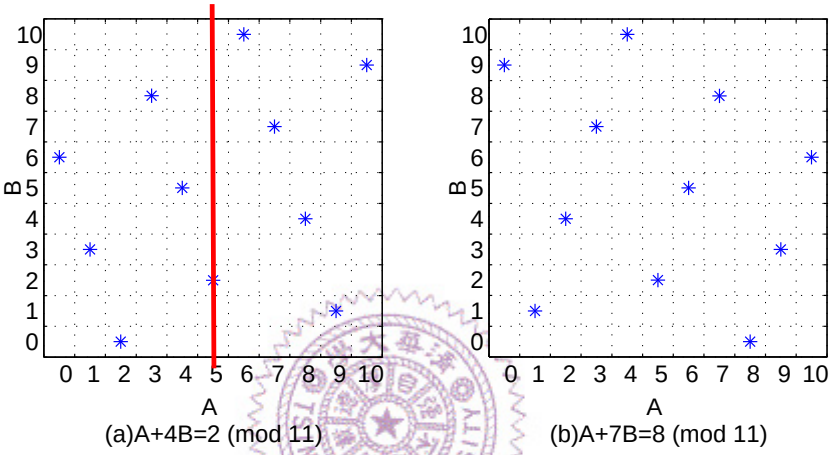

圖 4.4: (11,4,2)-設計與 (11,7,8)-設計

2 對直線 $A=B$ 對稱: 將對 $A=B$ 鏡射以函數表示爲 $T(A,B)=(B,A)$。故對 (n,p,q)-設計, 存在另一組 (n,p',q')-設計(其中 p' 與 q' 滿足 $q'=p'\cdot q\ (mod\ n)$), 其與 (n,p,q)-設計對稱於直線 $A=B$ (推導請參照附錄 A.2), 而 p 與 p' 必須滿足

$$p\cdot p'=1\ or\ (n-1)\ (mod\ n) \tag{4.2}$$

以圖4.5爲例, 若將 (11,4,2)-設計對直線 $A=B$ 鏡射, 可得到 (11,3,6)-設計, 並且此兩種設計在 CL_2 上皆爲 0.0029943, 所以可知 (n,p,q)-設計與 (n,p',q')-設計也具有相同的幾何性質。

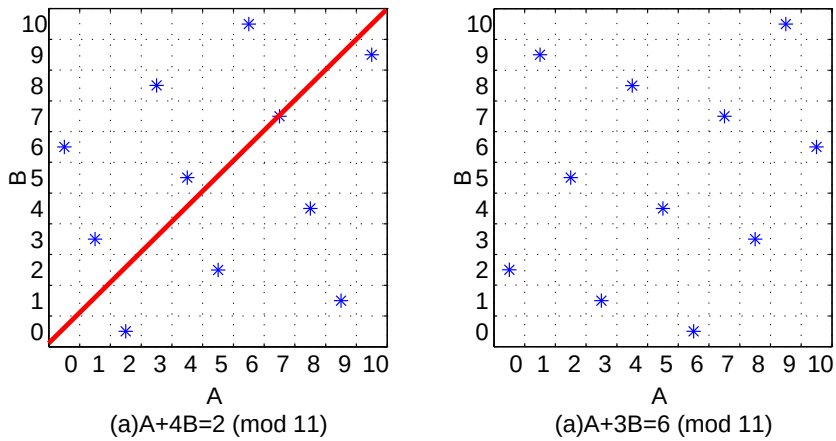

圖 4.5: (11,4,2)-設計與 (11,3,6)-設計

以下我們將藉由 (4.2) 式衍生出準則一。令 $(A_i, B_i), i = 1, \cdots, n$, 代表設計中的 n 個點, 令 $\boldsymbol{A}$=$(A_1, A_2, \cdots, A_n)$, $\boldsymbol{B}$=$\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$。若 $(A_i, B_i), (A_j, B_j)$ 爲 (n, p, q)-設計中任意不同的兩點 , 令 $\Delta A_{i,j}$ 爲此兩點的水平距離, 亦即 $\Delta A_{i,j} = |A_i - A_j|$, 且令 $\Delta B_{i,j}$ 爲此兩點的垂直距離, 亦即 $\Delta B_{i,j} = |B_i - B_j|$。在此我們定義

$$\Delta A^m_{i,j} = \min(\Delta A_{i,j}, n - \Delta A_{i,j}\ ),\ \Delta A^m_{i,j} \in \{1, \cdots, \tfrac{(n-1)}{2}\}$$
$$\Delta B^m_{i,j} = \min(\Delta B_{i,j}, n - \Delta B_{i,j}\ ),\ \Delta B^m_{i,j} \in \{1, \cdots, \tfrac{(n-1)}{2}\}$$

例 4.5　以圖4.4 (a) 爲例, $\boldsymbol{A}$=(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,1 0), $\boldsymbol{B}$=(6, 3, 0, 8, 5, 2, 10, 7, 4, 1, 9), 若取 $(A_1, B_1) = (0, 6), (A_9, B_9) = (8, 4)$, 則

$$\Delta A_{1,9} = |8 - 0| = 8, \Delta A^m_{1,9} = \min(\Delta A_{1,9}, n - \Delta A_{1,9}) = 3,$$

$$\Delta B_{1,9} = |4 - 6| = 2, \Delta A^m_{1,9} = \min(\Delta B_{1,9}, n - \Delta B_{1,9}) = 2。$$

□

定理 4.1. 對 (n, p, q)-設計中任意不同的兩點 (A_i, B_i), (A_j, B_j), 當 $\Delta B_{i,j}$=*1* 時

$\Delta A^m_{i,j} = p$。

證明 4.1. 若將 n 個點表示如下 $(A_1, 0), (A_2, 1), (A_3, 2) \ldots (A_n, n-1)$, 因爲這些點滿足 (4.1) 式, 故將此 n 個點分別代入 (4.1) 式, 可得

$$A_i = n \cdot k_i - p \cdot (i-1),\ i = 1, \cdots, n,\ k_i \in Z。$$

故對 $i \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$

$$\Delta A_{i,i+1} = |n \cdot (k_{i+1} - k_i) - p|,$$

其中 $p \in \{1, \cdots, \frac{(n-1)}{2}\}$。因爲 $\Delta A^m_{i,i+1} = \min(\Delta A_{i,i+1}, n - \Delta A_{i,i+1})$, 又因 $\Delta A^m_{i,i+1} \in \{1, \cdots, \frac{(n-1)}{2}\}$ 故

1 當 $\Delta A^m_{i,i+1} = \Delta A_{i,i+1}$ 時, 可推得 $k_{i+1} - k_i = 0$, 所以 $\Delta A^m_{i,i+1} = p$。

2 若 $\Delta A^m_{i,i+1} = n - \Delta A_{i,i+1}$ 時, 可推得 $k_{i+1} - k_i = 1$, 所以 $\Delta A^m_{i,i+1} = n - (n - p) = p$。

故在 $\Delta B_{i,j} = 1$ 時, $\Delta A^m_{i,j} = p$ ■

若 (n, p', q')-設計爲 (n, p, q)-設計對稱於 $A = B$ 的設計。若在 (n, p', q')-設計中的某兩點滿足 $\Delta B_{i,j}$=1 且 $\Delta A^m_{i,j} = p'$, 則利用其對稱於 $A = B$ 的性質, 在 (n, p, q)-設計中可找到兩點其滿足 $\Delta A_{i,j}$=1 且 $\Delta B^m_{i,j} = p'$ 的性質。

由定理4.1可知當 $\Delta B_{i,j}$=1 時 $\Delta A^m_{i,j} = p$。因爲當 p 太小時, 其所對應的會是不好的設計, 例如當 $p = 1$ 我們可知實驗點會幾乎落在一直線上, 如圖3.6(a) 所示, 故我們希望 p 不應太小。由 (4.2) 式可得知, 當 p 愈大時 p'(當 $\Delta A_{i,j}$=1 時, $\Delta B^m_{i,j} = p'$) 將愈小, 此時所對應的設計也不會是個好設計, 如在圖4.6(b) 中實驗點幾乎落在二條直線上。同理當 p' 愈大時 p 將愈小時, 此時所得到的設計自然也不是個好的設計, 如

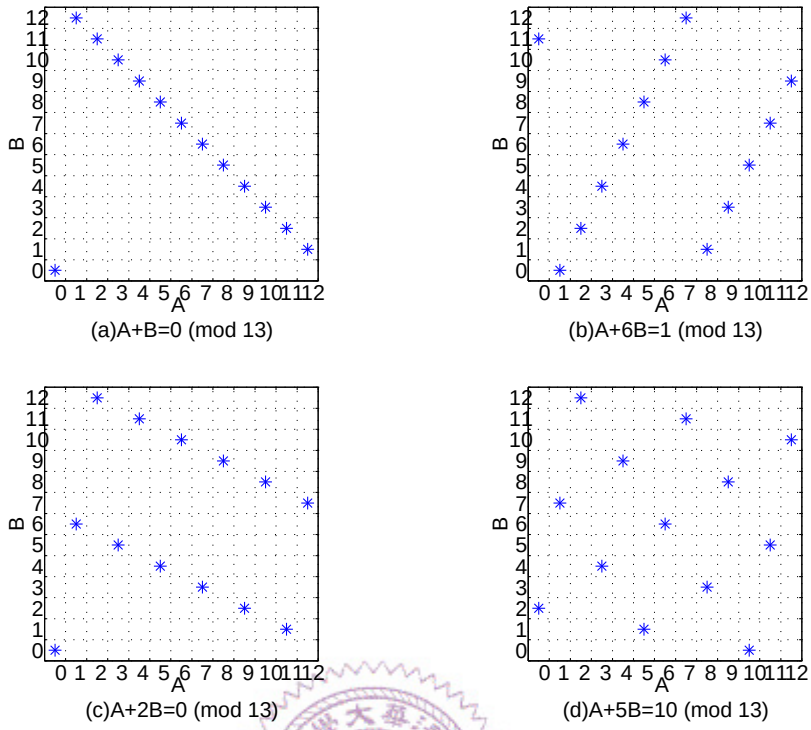

圖 4.6: n 爲 13 時, 4種不同的 (n, p, q)-設計

圖4.6(c) 所示。故我們必須選取適當的 p 與 p' 才會得到不錯的設計, 如像在圖4.6(d) 中實驗點分佈的相當均勻。因此我們將取一個平衡點, 使得 p 及 p' 適中。故取

$$\max_{p}(p \cdot p')$$

爲挑選設計的準則, 以下稱其爲準則一。下例我們將藉由準則一, 比較 $n = 17$ 的 4 個不同的 (n, p, q)-設計, 最後以 CL_2 來驗證。

例 4.6　以 $n = 17$ 爲例 , 當 p=7時, p'=5, $p \cdot p'$=35。p=4時, p'=4, $p \cdot p'$=16。p=3時, p'=6, $p \cdot p'$=18。p=2時, p'=8, $p \cdot p'$=16。所以依據準則一, 我們所挑選的設計爲 p=7。並由圖4.7可知在給定 $n = 17$ 之下, p=7 在不同 q 所對應的設計, 在 CL_2 的表現上, 大多比其他 p 值在不同 q 所對應的設計表現的好。 □

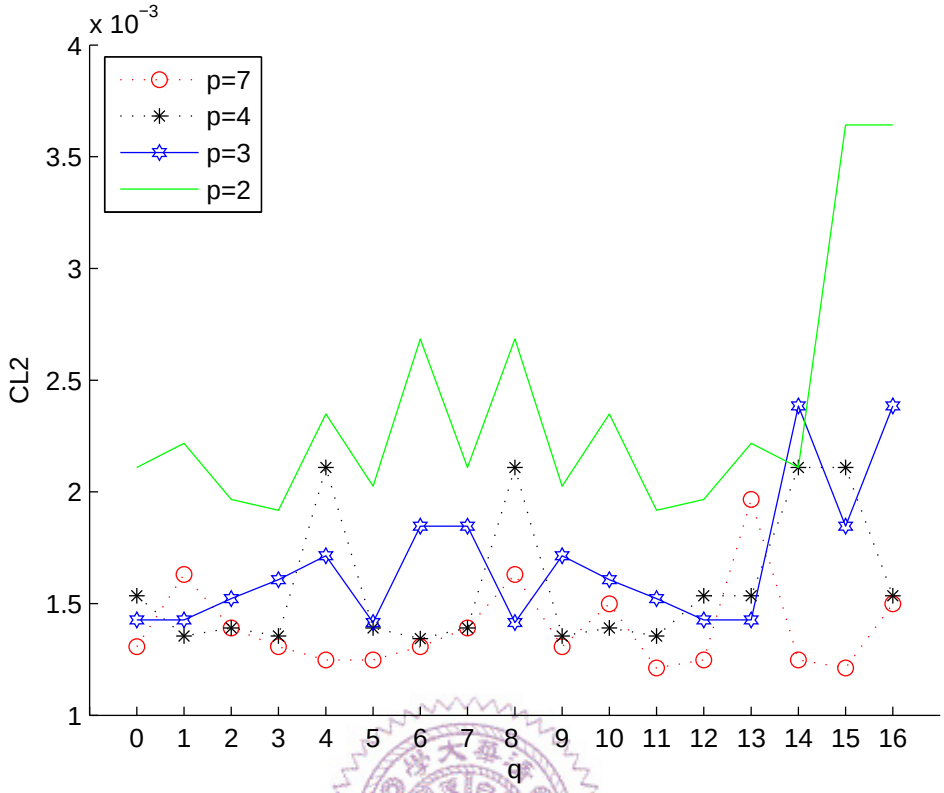

圖 4.7: $(17, p, q)$-設計, $p = 2, 3, 4, 7$ 的 CL_2 值

我們將 n 爲小於 100 的質數時, 依據準則一所獲得的最佳設計列於表 4.3。

表 4.3: 準則一下的最佳設計列表

n	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
p	2	3	4	5	7	8	12	12	13	11	18	18
p'	2	2	3	5	5	7	10	12	12	10	16	12
n	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
p	18	23	26	22	26	30	27	30	36	34	36	
p'	13	23	26	22	18	26	27	29	30	34	35	

4.3 準則二

我們將先以一個 (13,5,10)-設計來說明。由圖 4.8 可得知, 一個正規設計中所有的實驗

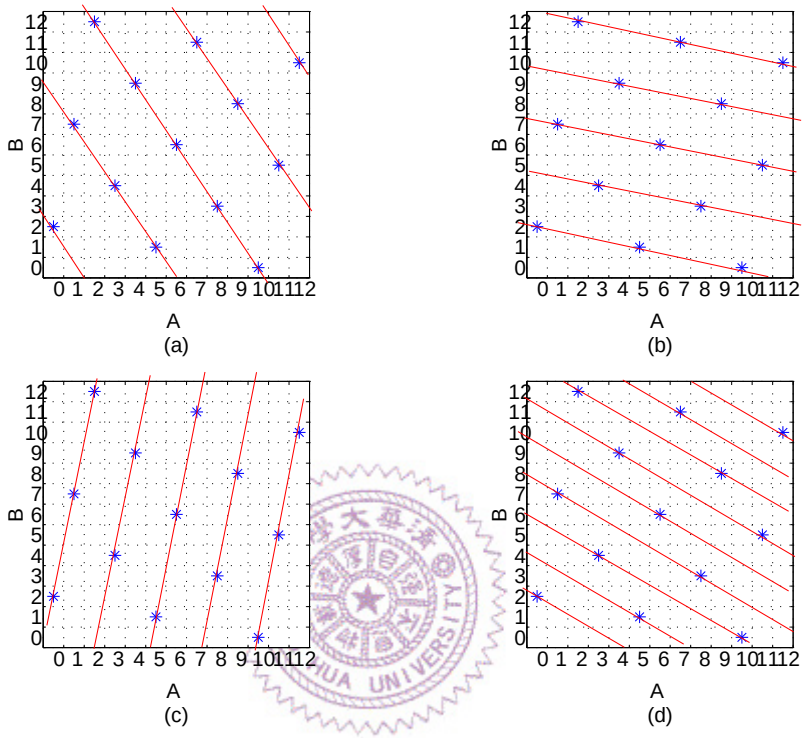

圖 4.8: (13,5,10)-設計之標準線

點皆位於某幾條平行線上。並且隨著斜率不同, 可以有不同組的平行線, 我們將以可包含較多實驗點的平行線, 稱爲標準線。例如在圖 4.8 中, (a) 圖的平行線上最多可以通過 5 個實驗點,(b) 圖最多通過 3 個實驗點,(c) 圖最多 3 個,(d) 圖最多 2 個, 因此我們將以圖 4.8(a) 的這組平行線稱之爲標準線。對一個(n, p, q)-設計, 其標準線求法如下: 首先找出與中心點 $(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2})$ 距離最近的實驗點 o, 再找出與 o 點距離最近的實驗點 w , 令 L_0 爲通過 o 和 w 的直線, 將 L_0 往上或往下平行移動至其他實驗點上, 即形成其他直線 L_i, 在此定義 L_i (包含 L_0) 爲標準線, 這些標準線將通過所有實驗點, 同

時標準線上任二個最近點之距離皆爲 o 與 w 間的距離, 用 $|\overline{ow}|$ 表示。

我們認爲當標準線的線數愈多時, 將使得實驗區間被分割成愈多的區間, 表示點跟點間愈分散, 因此在本節中, 我們將提出一個以標準線的多寡來決定設計好壞的準則。以下我們將推導出當 o 與 w 兩點間的水平距離加垂直距離越大, 則標準線越多條, 並且可由其得知實驗區間內有幾條標準線通過。首先我們令 a 爲 o、w 兩點間的垂直距離, b 爲 o、w 兩點間的水平距離。a 與 b 之推導可由以下陳述得知: 在 (n,p,q)-設計中, 若 (n,p) 給定後, 不論 q 值爲何, 對 (n,p,q)-設計上的 n 個點 $(A_1,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_3)\ldots(A_n,B_{n-1})$ 皆滿足以下性質: 若第 i , j 個實驗點使得 $\Delta B_{i,j}=1$, 則 $\Delta A^m_{i,j}=p$。若第 i , j 個實驗點使得 $\Delta B_{i,j}=2$, 則 $\Delta A^m_{i,j}$ 爲 $2p$, 但 $2p$ 可能大於 n, 故我們對其取餘數 $2p\ (mod\ n)$。因取過餘數後, 其值仍可能大於 $\frac{n-1}{2}$, 故我們可以將 $\Delta A^m_{i,j}$ 透過函數 g 以 $g(2p)$ 表示, 代表 $\min(\Delta A_{i,j}, n-\Delta A_{i,j})$, 其中 g 函數表示如下:

$$g(x)=\begin{cases} x\ (mod\ n) & \text{, if } x\ (mod\ n)<\frac{n-1}{2} \\ n-(x\ mod\ n) & \text{, if } x\ (mod\ n)>\frac{n-1}{2} \end{cases}$$

所以當第 i , j 個實驗點使得 $\Delta B_{i,j}=k$, $\Delta A^m_{i,j}$ 可以 $g(kp)$ 表示, $k=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$。若我們以歐氏距離計算兩點間距離的算法, 則標準線定義中的 $|\overline{ow}|$ 可表示如下

$$|\overline{ow}|=\min_{i,j}\{(\Delta B_{i,j})^2+(\Delta A^m_{i,j})^2\}。$$

且若 i^*, j^* 爲使得上式滿足之 i 與 j 值, 則 $a=\Delta B_{i^*,j^*}$, $b=\Delta A^m_{i^*,j^*}$。接下來我們將推導, 當 a+b 愈大時, 代表標準線愈多條, 並且標準線的個數, 可以由 a、b 決定。首先考慮標準線斜率爲負時的情況。我們將標準線之方程式表示如下:

$$aA+bB=n\cdot k+q,$$

其中 $k\in Z; q=0,\cdots,n-1$ 。移項可得

$$aA = n \cdot k + q - bB。$$

因爲 $A \in \{0, \cdots, n-1\}$, 故

$$0 \leq n \cdot k + q - bB \leq a(n-1)。$$

因 $B \in \{0, \cdots, n-1\}$, 可得知

$$0 \leq n \cdot k + q \leq (a+b)(n-1)。 \tag{4.3}$$

每一個滿足 (4.3) 式的 k 值, 即對應到一條標準線, 故滿足 (4.3) 式的 k 值個數便是通過建模區間的標準線個數。並且 (a+b) 越大, 則標準線將越多。因爲

$$0 \leq k \leq \frac{(a+b)(n-1)-q}{n} \tag{4.4}$$

由 (4.4) 式可知共有 $([\frac{(a+b)(n-1)-q}{n}]+1)$ 個 k, 所以將會有 $(a+b)$ 或 $(a+b-1)$ 條標準線。由此推導我們可得 2 個結論

1 $a+b$ 越大代表標準線越多

2 會有 $a+b$ 或者 $a+b-1$ 條標準線, 隨著餘數不同而有變化

同理可推得當標準線斜率爲正時, 結論與標準線斜率爲負時相同 (推導可參照附錄 A.3)。因爲我們希望通過建模空間的標準線愈多愈好, 故取

$$\max_{p}(a+b)$$

爲挑選設計的準則, 以下我們稱其爲準則二。下例我們將計算出 $n = 13$ 的 4 個不同的 (n, p, q)-設計之標準線, 並且將以標準線的個數來挑選最適設計, 最後以 CL_2 來驗證。

例 4.7　如圖4.9所示 , 在圖4.9(a) 中, 以 (6,6) 爲 o 點, 可找出 w 點 (7,5) 並可得 $a = (6-5) = 1$、$b = (7-6) = 1$, 且有 $(a+b-1) = 1$ 條標準線。在圖4.9(b) 中,

以 (5,4) 爲 o 點, 可找出 w 點 (7,3) 並可得 $a = (4-3) = 1$、$b = (7-5) = 2$, 且有 $(a+b) = 3$ 條標準線。在圖4.9(c) 中, 以 (5,7) 爲 o 點, 可找出 w 點 (8,6) 並可得 $a = (7-6) = 1$、$b = (8-5) = 3$, 且有 $(a+b) = 4$ 條標準線。在圖4.9(d) 中, 以 (6,6) 爲 o 點, 可找出 w 點 (8,3) 並可得 $a = (6-3) = 3$、$b = (8-6) = 2$, 且有 $(a+b) = 5$ 條標準線。同時在 CL_2 的計算上 $(d)CL_2 = 0.0019084 < (c)CL_2 = 0.0022586 < (b)CL_2 = 0.0025737 < (a)CL_2 = 0.012342$。此外由圖4.10可知給定 $n = 13$ 之下, p=5 在不同 q 所對應的設計, 在 CL_2 的表現上, 大多比其他 p 值在不同 q 所對應的設計, 表現的好。 □

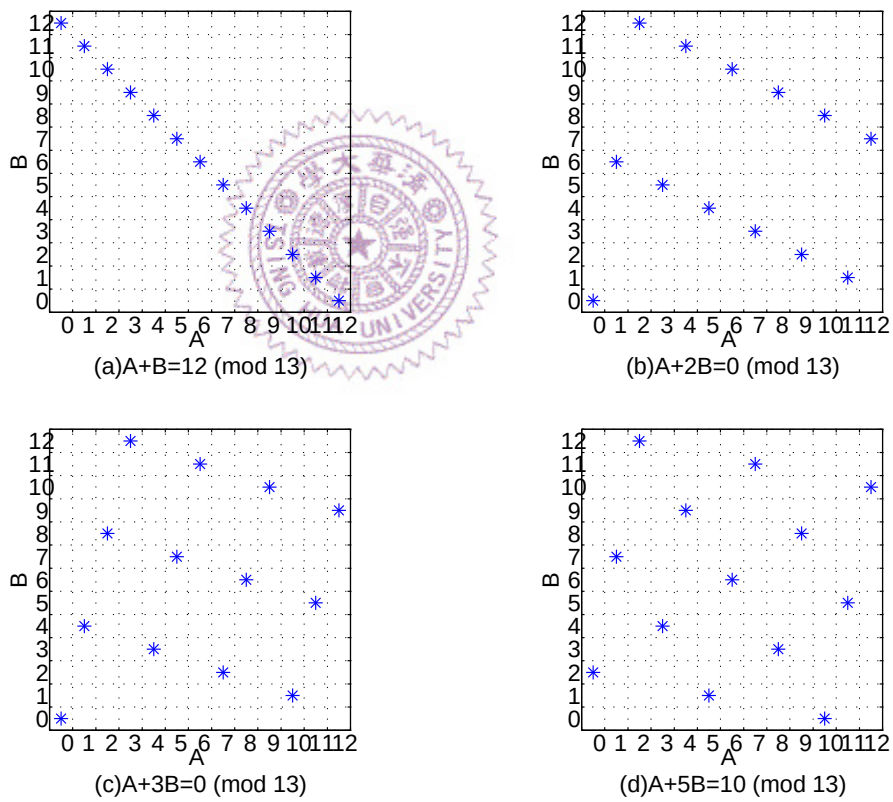

圖 4.9: 四種不同的 (n, p, q)-設計, n=13

我們將 n 爲小於 100 的質數時, 依據準則二所獲得的最佳設計列於表 4.4。

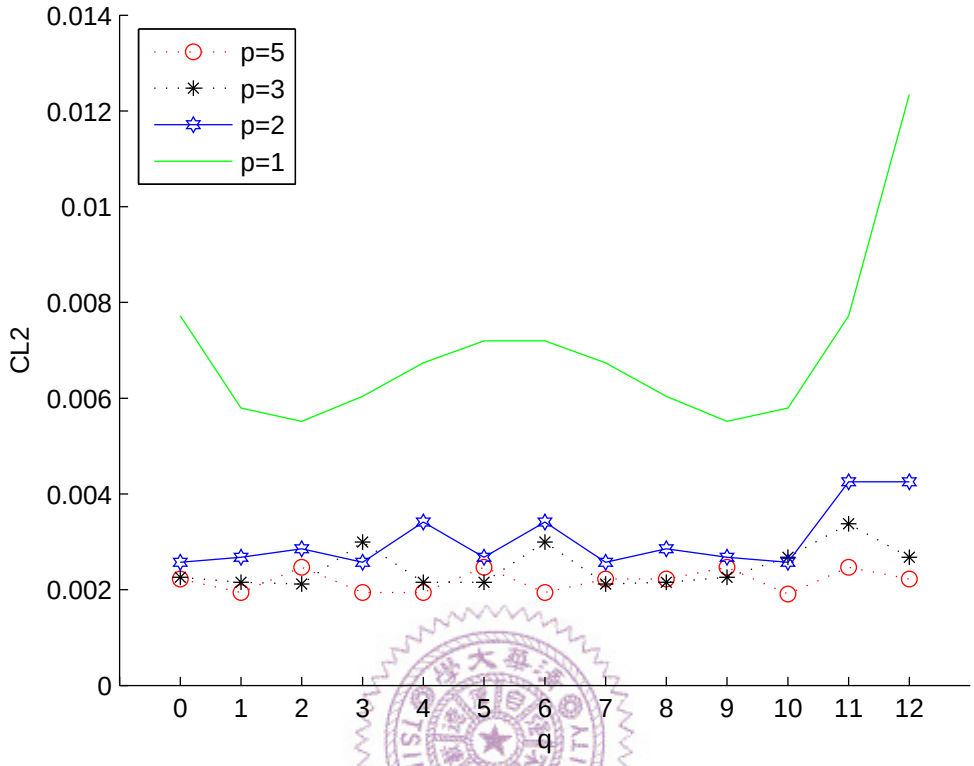

圖 4.10: $(13, p, q)$-設計, $p = 1, 2, 3, 5,$ 的 CL_2 值

表 4.4: 準則二下的最佳設計列表

n	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
p	2	3	4	5	7	8	9	11	13	16	9	18
p'	2	2	3	5	5	7	5	8	12	7	9	12
n	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
p	18	20	13	18	28	27	32	23	15	34	37	
p'	13	8	9	17	12	21	16	12	11	34	21	

4.4 M 方陣

前兩節所述之 $\Delta B_{i,j}$ 與 $\Delta A_{i,j}$, 可以用來表示任意兩點的垂直距離與水平距離。對一個 (n,p,q)-設計, 若 $\Delta B_{i,j}=k^*, k^*=1,...,\frac{(n-1)}{2}$, 則 $\Delta A^m_{i,j}$ 可由前一節所述之 g 函數求得。在給定 n 之下, 將 p 由小至大, 組成不同的 (n,p)-方陣, 再依序將 $\Delta B_{i,j}$ 由 1 變動至 $\frac{(n-1)}{2}$ 時, 所對應的 $\Delta A^m_{i,j}$ 記錄下來, 即可建構出一個 $\frac{(n-1)}{2}\times\frac{(n-1)}{2}$ 的方陣 M。令 $m_{h,k}$ 代表 M 中第 h 列第 k 行的值, $h=1,...,\frac{(n-1)}{2}, k=1,...,\frac{(n-1)}{2}$, 則 $m_{h,k}$ 代表 $p=k$, $\Delta B_{i,j}=h$ 時 , $\Delta A^m_{i,j}$ 的值。而 $m_{h,k}$ 亦可用 $m_{\Delta B_{i,j},p}$ 表示。

例 4.8　以 $n=17$ 爲例, M 方陣如下表4.5 所示: 其中 $m_{5,4}$ 即代表當 p 爲 4, $\Delta B_{i,j}$ 爲 5 時, 所對應的 $\Delta A^m_{i,j}$, 由表4.5可知 $m_{5,4}$=3, 其餘以此類推。 □

表 4.5: n=17 之 M 方陣

1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	6	8	7	5	3	1
3	6	8	5	2	1	4	7
4	8	5	1	3	7	6	2
5	7	2	3	8	4	1	6
6	5	1	7	4	2	8	3
7	3	4	6	1	8	2	5
8	1	7	2	6	3	5	4

另外, 我們亦可藉由此方陣得到準則一與準則二的資訊。以下我們將敘述如何藉由 M 方陣得到準則一與準則二的資訊:

準則一: 若 (n,p,q)-設計與 (n,p',q')-設計對稱於 $A=B$, 其中 $p\cdot p'=1\ or\ (n-1)\ (mod\ n)$。我們以 $\max_p(p\cdot p')$ 的一組 (p,p') 爲最佳設計, 其中 $p\cdot p'$ 除以 n 餘數

爲 1 或 $n-1$ 此性質與 $p \cdot \Delta B_{i,j} = \Delta A^m_{i,j}$ $(mod\ n)$ 相同。當 $\Delta B_{i,j}$ 爲 k^*, $\Delta A^m_{i,j}$ 爲 $g(k^* \cdot p)$, 透過 g 函數, $\Delta A^m_{i,j}$ 可用 k^*p $(mod\ n)$ 或 $n-(k^*p\ (mod\ n))$ 表示。故給定 (n,p) 下, $\Delta A^m_{i,j}$=1時所對應的 $\Delta B_{i,j}$ 即爲 $p^{'}$。因此若已知實驗次數 n, 我們可以根據 M 方陣找出 p 從 1 變動至 $\frac{(n-1)}{2}$ 時所對應的 $p^{'}$, 便能找出 $\max\limits_p(p \cdot p^{'})$ 以尋得最佳設計。藉由 M 方陣中我們可將準則一表示如下:

$$\text{當 } m_{h,k} = 1 \text{ 時, 若 } h、k \text{ 爲滿足 } \max(h \cdot k) \text{ 時的值, 則}$$
$$p = k, p^{'} = h \text{ 或 } p = h, p^{'} = k。$$

準則二: 在給定 (n,p) 下, 我們可以算出最短距離 $|\overline{ow}|(=\sqrt{a^2+b^2})$, 我們比較不同 p 之下的 $a+b$ 值, 以 $\max\limits_p(a+b)$ 代表標準線越多爲由, 找出最佳設計。M 矩陣的生成方式即由不同 p 值且不同 $\Delta B_{i,j}$ 之下的 $\Delta A^m_{i,j}$ 所組成, 我們可依循 M 方陣的規律找到每個 p 及 $\Delta B_{i,j}$ 所對應的 $\Delta A^m_{i,j}$。首先給定 p 值, 我們可以由第 p 行由上而下找尋最短距離, 即 $\min\{\sqrt{\Delta B^2_{i,j}+(\Delta A^m_{i,j})^2}\} = \min\{\sqrt{h^2+m^2_{h,p}}\}$, 找出不同 p 所相對應的最短距離後, 再比較其水平距離與垂直距離之和, 找 $\max\limits_p(a+b) = \max\limits_p(h+m_{h,p})$。在 M 方陣中我們可將準則二表示如下

$$\max_p\{h+m_{h,p}|\min(h^2+m^2_{h,p})\}$$

以下我們將說明如何藉由 M 方陣找出 $n=17$ 在準則一及準則二下的最佳設計。

例 4.9　我們可藉由 M 方陣, 找出依準則一找出最適之設計, 首先當 p=1 時, 在第一行找出 $m_{h,1}$=1 的值, 則 $p^{'}=h=1$, 得 $p \cdot p^{'}$=1, 當 p=2 時, 依相同規律在第二行中找出 $m_{h,8}$=1 時之 h 值, 則 $p^{'}=h=8$, 得 $p \cdot p^{'}$=16, 依照此規律可找出所有 $(p,p^{'}) \in \{(1,1),(2,8),(3,6),(4,4),(5,7),(6,3),(7,5),(8,2)\}$, 則 $\max(p \cdot p^{'})$ 爲 35 , 即 $(p,p^{'})=(5,7)$ 或 $(p,p^{'})=(7,5)$ 時, 故根據準則一$\max\limits_p(p \cdot p^{'})$, 我們挑選的最適設計爲 $(17,7,q)$-設計, $q=0,\cdots,n-1$。 □

例 4.10　我們亦可藉由 M 方陣, 找出以準則二爲標準之最適設計, 當 p=1 時, 我們由 M 方陣中, 第 1 行得到符合 $\min(m_{h,p}^2 + h^2)$ 的 $\Delta B_{i,j}$ 爲 1, $\Delta A_{i,j}^m (= m_{h,p})$ 爲 1, 則水平距離與垂直距離之和爲 2; 當 p=2 時, 符合最短距離爲 $(\Delta B_{i,j}, \Delta A_{i,j}^m) = (1,2)$, 則 $a+b$ 爲 3。其餘 p 值所對應的最短距離我們亦可透過 M 方陣找出, 由 $(p, \Delta B_{i,j}, \Delta A_{i,j}^m)(= (p, h, m_{h,p})) \in \{(1,1,1),(2,1,2),(3,1,3),(4,1,4),(5,3,2),(6,3,1),(7,2,3),(8,2,1)\}$ 在此集合中尋找出 $\max(h + m_{h,p})$ 爲 5, 即 p=4、5、7 時, 因此, 在準則二 $\max\limits_{p}(h + m_{h,p})$ 之下我們找出 $(17,7,q)$-設計, 爲 n=17 時最佳之設計。 □

在正規設計中, 實驗點之間所有的資訊皆被包含在 M 方陣中, 因此從 M 方陣中可以判斷設計的好壞, 往後如果需要發展挑選最適正規設計的準則, 可以從 M 方陣中著手。

TSING HUA UNIVERSITY