

國立清華大學

碩士論文

題目：具隨機性的實驗區間對參數估計之影響

The Effect of Random Experimental Region  
on Parameter Estimation

所別：統計學研究所 組別：工業統計組

指導教授：鄭少為 (Shao - Wei Cheng) 博士

姓名：鄭立禾 (Li - Ho Cheng)

學號：9624506

中華民國九十八年七月

## 摘要

因子設計是一種常見的實驗設計，在實驗進行之前，實驗者會先決定設計中包含幾個因子，並決定每個因子的水平。換言之，因子實驗的實驗區間在實驗進行前便已決定。但在滑動水平實驗中，實驗的因子可分為滑動因子與非滑動因子兩種。非滑動因子數與其水平在實驗開始前就能夠先決定，其處理方式如同傳統因子設計的因子；但滑動因子的水平則須依賴非滑動因子水準組合才能決定，此為滑動水平實驗與傳統因子實驗之間的差異。Li et al.(2001) 提出的二階段實驗則是針對滑動水平實驗的設計手法，在第一階段實驗裡，實驗者以非滑動因子進行實驗以了解滑動因子適合之實驗區間，接著在此實驗區間中進行第二階段實驗。針對第一階段實驗建構滑動因子水平實驗區間的過程，本論文提出三種不同的情境，因為在給定不同情境下所建構出的實驗區間，會因重複實驗而不同，因此實驗區間具有隨機性。在第二階段實驗的數據分析中，分析者欲對反應變數建立一模型，在模型配適的過程，實驗區間所具有的隨機性便會對參數估計的變異數造成影響，若忽略實驗區間具有的隨機性，將會低估參數估計之變異數，而造成不顯著的效應被宣告為顯著的結果。本論文將會討論並推導第一階段實驗區間的隨機性對於第二階段實驗之參數估計式之期望值與變異數所造成的影響。

關鍵字：滑動水平實驗，二階段實驗，參數估計之期望值與變異數。

## 致謝辭

完成碩士班的研究工作並將成果彙整成這篇論文後，心中湧出一股莫大的成就感，在此之餘，首先想要感謝指導本論文的鄭少為老師。碩一修老師的課時，看見老師對於教學的細心態度，因而萌生想跟著老師做研究的念頭。如我們所預期的，老師在教學上的用心，對於指導學生的過程亦然，從發現問題，接著做出成果，最後寫成論文。在這每一個階段裡，老師讓我們天馬行空般的提出各種想法，而後再細心的與我們討論想法中的瑕疵與錯誤，除了細膩，老師也間接的表現出作研究應有的態度，都將會使我受益無窮。

接著我想感謝我的家人，父親，母親，以及三位姊姊，如果沒有你們的支持，我將不會有機會進入清大就讀；沒有你們的支持，完成學業的過程恐怕也將不會如此順利。

在新竹的這兩年裡，有許許多多與同學們一起歡笑的時刻，碩一暑假的高雄墾丁之旅，內灣的客家巡禮，大夥在南寮放天燈許願，大夥一同前往品嚐的新竹美食等等。特別的是空閒時總是會去的好樂迪，阿ㄣ，陽帆，江森，威寶，我們5個總是在那嘶吼吶喊。一同完成研究工作的 Allen 與泰哥，這一年的過程有歡笑也有淚水。半夜的小7團，丁丁，多比，五燈，我們一起嚐遍小7裡的各種食物。當了我的室友一年的同同，就像家人般的一起度過了宿舍生活。小潘與陽帆總是在研究室裡用阿龐逗大家笑，還有總是能提出中肯建議的瑋哥。這兩年來的點點滴滴將會成為未來美好的回憶。

# 目錄

<b>1</b>	<b>緒論</b>	<b>1</b>
1.1	研究動機與目的	1
1.2	文獻探討	2
<b>2</b>	<b>實驗區間的隨機性對二階段實驗的影響</b>	<b>4</b>
2.1	實驗區間的隨機性在第一階段實驗的影響	4
2.1.1	情境一	6
2.1.2	情境二	7
2.1.3	情境三	8
2.2	實驗區間隨機性對第二階段模型造成的影響	10
2.2.1	情境一	12
2.2.2	情境二	12
2.2.3	情境三	15
<b>3</b>	<b>模擬</b>	<b>16</b>
3.1	模型一之模擬過程	16
3.1.1	模型一之模擬結果-編碼的分析策略	22
3.1.2	模型一之模擬結果-未編碼的分析策略	26
3.2	模型二之模擬過程	28
3.2.1	模型二之模擬結果-編碼的分析策略	31
3.2.2	模型二之模擬結果-未編碼的分析策略	37

4	模擬結果的導證	41
4.1	模型一	41
4.1.1	編碼的隨機滑動因子	41
4.1.2	數值驗證-模型一之編碼策略	48
4.1.3	未編碼的隨機滑動因子	50
4.1.4	數值驗證-模型一之未編碼策略	55
4.2	模型二	55
4.2.1	編碼的隨機滑動因子	55
4.2.2	數值驗證-模型二之編碼策略	65
4.2.3	未編碼的隨機滑動因子	66
4.2.4	模型二之驗證-模型二之未編碼策略	72
5	結論與未來展望	74
	參考文獻	76



## 圖目録

3.1	眞實模型與實驗區間 . . . . .	20
3.2	區間中心改變, 區間半長固定 . . . . .	25
3.3	區間中心固定, 區間半長改變 . . . . .	25
3.4	眞實二次模型與實驗區間 . . . . .	29
3.5	區間中心改變, 區間半長固定 . . . . .	34
3.6	區間中心固定, 區間半長變動 . . . . .	35
3.7	開口向下的二次曲線 . . . . .	37
3.8	開口向上的二次曲線 . . . . .	37
4.1	區間中心變動, 區間半長固定 . . . . .	54
4.2	區間中心改變, 區間半長固定 . . . . .	60
4.3	二次效應對模型之影響 . . . . .	61

# 表目錄

1.1 焊接實驗因子 . . . . .	2
3.1 變異數 $\sigma_c^2$ 和 $\sigma_l^2$ 之設定 . . . . .	21
3.2 編碼的隨機滑動因子之參數平均 . . . . .	22
3.3 編碼的隨機滑動因子之參數變異 . . . . .	23
3.4 未編碼的隨機滑動因子之參數平均 . . . . .	26
3.5 未編碼的隨機滑動因子之參數變異 . . . . .	27
3.6 編碼的隨機滑動因子之參數平均數 . . . . .	31
3.7 編碼的隨機滑動因子之參數變異數 . . . . .	31
3.8 編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數 . . . . .	32
3.9 未編碼的隨機滑動因子之參數平均數 . . . . .	38
3.10 未編碼的隨機滑動因子之參數變異數 . . . . .	38
3.11 未編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數 . . . . .	38
4.1 變異數 $\sigma_c^2$ 和 $\sigma_l^2$ 之設定 . . . . .	48
4.2 編碼的隨機滑動因子之參數期望值 . . . . .	49
4.3 編碼的隨機滑動因子之參數變異理論值 . . . . .	49
4.4 未編碼的隨機滑動因子之參數變異理論值 . . . . .	55
4.5 編碼的隨機滑動因子之參數期望值 . . . . .	65
4.6 編碼的隨機滑動因子之參數變異數理論值 . . . . .	66
4.7 編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數理論值 . . . . .	66
4.8 未編碼的隨機滑動因子之參數變異數理論值 . . . . .	72
4.9 未編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數理論值 . . . . .	73

# 第 1 章

## 緒論

### 1.1 研究動機與目的

在滑動水平(sliding level) 實驗中, 實驗的因子可分為滑動 (slid) 因子與非滑動 (non-slid) 因子兩種。非滑動因子數與其水平在實驗開始前就能夠先決定, 但滑動因子的水平則須依賴非滑動因子水準組合才能決定。Li et al.(2001) 提出的二階段實驗則是針對滑動水平實驗的設計手法, 在第一階段實驗裡, 實驗者以非滑動因子進行實驗以了解滑動因子適合之實驗區間, 接著在此實驗區間中進行第二階段實驗。針對第一階段實驗建構滑動因子水平實驗區間的過程, 本論文提出三種不同的情境, 因為在給定不同情境下所建構出的實驗區間, 會因重複實驗而不同, 因此實驗區間具有隨機性。在第二階段實驗的數據分析中, 分析者欲對反應變數建立一模型, 在模型配適的過程, 實驗區間所具有的隨機性便會對參數估計的變異數造成影響, 若忽略實驗區間具有的隨機性, 將會低估參數估計之變異數, 本論文將會導出實驗區間之隨機性對於參數估計之期望值與變異數的影響。

接下來 1.2 節的文獻探討將介紹二階段實驗與巢狀效應建模法。第二章將描述實驗區間的隨機性如何產生, 以及具有隨機性的實驗區間對於第二階段數據分析的影響。第三章將利用電腦模擬觀察實驗區間具有隨機性對參數估計的影響。第四章則是承續模擬之結果的導證。



## 1.2 文獻探討

Li et al. (2001) 提到一個關於耐性焊接點 (resistance spot welding) 的實驗, 其為滑動水平實驗的一種, 目的在於找出適合的電流範圍以產生良好的焊接點, 此實驗共有 7 個因子, 如下表:

表 1.1: 焊接實驗因子

因子	描述
poor fitup (Ft)	焊接物是否有放好
axial misal. (Ax)	上下焊接電極是否對齊
angular misal. (An)	焊接物和電極間的角度
electrode size (Ed)	電極尺寸大小
force (F)	電極施壓強度
weld time (T)	焊接時間
current (I)	電流

在此焊接實驗中, 若是電流太強並且焊接時間過長, 會發生噴濺的現象使得焊接的成品不良; 若電流太弱且焊接時間不足, 則會使得焊接物品無法成型因而失敗。為得到焊接良品, 即焊接的成品其尺寸大小符合實驗者之標準, 實驗者須找出適合的電流大小與時間長短, 其中最關鍵的是電流的範圍。對於搜尋能夠產生良好焊接成品的未知實驗區間, 該論文提出了二階段實驗的方法並且將表 1.1 的前 6 個因子視為非滑動因子, 電流視為滑動因子。在第一階段實驗裡, 實驗者固定非滑動因子的水準組合 (level combination) 然後再進行實驗, 試驗出產生噴濺現象的電流上界以及焊接無法成型的電流下界, 並以此作為滑動因子實驗區間。然後在數據分析方面, 利用滑動因子實驗區間的區間中心以及區間半長做為反應變數, 建立區間中心模型以及半長模型。透過統計分析, 實驗者便可知顯著影響滑動因子實驗區間的因子為何, 或者是進行預測。在第二階段實驗裡, 實驗者固定非滑動因子及滑動因子的水準組合進行焊接實驗, 然後量測焊接成品的半徑以決定其尺寸, 並利用非滑動因子以及滑動因子對半徑建模。第二階段實驗透過統計分析, 便可了解實驗因子對焊接成品的尺寸產生的效應。經由以上的介紹可知, 在二階段實驗之中, 分析者會透過第一階段的實驗來決定滑動水平實驗之實驗區間, (在第一階段實驗進行前, 實驗區間是未知的)。在第一階段實驗後, 才在該區間裡進行第二階段的實驗。

對於前述的滑動水平實驗,Hamada 和 Wu(1995) 提出巢狀效應建模法 (nested-effects modeling)。因為滑動因子的實驗區間與非滑動因子之間是相關的,即給定不同的非滑動因子水平組合則會得到不同的滑動因子實驗區間,故可知滑動因子的水平將隨著非滑動因子水準組合改變而變動。該論文透過前述滑動因子與非滑動因子之間的關聯,將滑動因子視為巢狀因子並提出巢狀效應建模法。



## 第 2 章

# 實驗區間的隨機性對二階段實驗的影響

### 2.1 實驗區間的隨機性在第一階段實驗的影響

傳統的因子實驗之實驗區間，先對每一個因子 $i$ 選定適合的實驗區間 $(a_i, b_i)$ ，其中 $i = 1, \dots, k$ ，再由 $k$ 個因子乘積而得到整個實驗區間，故有以下關係：

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_k, b_k)$$

$(a_i, b_i)$ 為因子 $i$ 之實驗區間，並且經由 $k$ 個因子之高低水平乘積而得之實驗區間是矩形的。若與因子實驗之實驗區間相比，滑動水平實驗的實驗區間為非矩形。若細看滑動因子實驗的實驗區間，可知它其實是在給定各種非滑動因子的因子水平組合 $\mathbf{Z}_i = (z_{i1}, z_{i2}, \dots, z_{im})$   $i = 1, \dots, n$ 下，所得到的滑動因子區間 $W_{z_i} = [u_{z_i}, v_{z_i}]$ 所構成。其中 $u_{z_i}$ 和 $v_{z_i}$ 分別代表區間的下界以及上界。然而，在給定不同的非滑動因子組合的情況下，例如 $\mathbf{Z}_j$ 和 $\mathbf{Z}_k$ 且 $j \neq k$ ，那麼 $u_{z_j} \neq u_{z_k}$ 和 $v_{z_j} \neq v_{z_k}$ 。所以，滑動因子實驗之實驗區間的非矩形指的就是滑動因子區間上下界將隨著非滑動因子組合變動而隨之變化，所以滑動因子之實驗區間是與非滑動因子相關的。

根據以上非滑動因子 $\mathbf{Z}_i$ 和滑動因子區間 $W_z$ 之敘述，在二階段實驗中的第一階段分析裡，我們可以建立關於滑動因子區間的模型。此外，根據 Chang(2008) 對於區間描述方式所提到三種方法，滑動因子區間建模的方法亦有以下三種：

1. 對於區間的描述方法為區間下界 $u_z$ 和上界 $v_z$ ，且直接以區間上下界建模：

$$u_{z_i} = H^u(z_i)\Gamma^u + \epsilon_{ui}$$

$$v_{z_i} = K^v(z_i)\Gamma^v + \epsilon_{vi}, i = 1, \dots, n$$

$\epsilon_{ui}$ 與 $\epsilon_{ci}$ 表誤差項,  $\Gamma^u = [\gamma_1^u, \gamma_2^u, \dots, \gamma_m^u]'$ ,  $\Gamma^v = [\gamma_1^v, \gamma_2^v, \dots, \gamma_m^v]'$ 表模型之參數,  $H^u(z_i) = (1, h_1^u(z_i), h_2^u(z_i), \dots, h_p^u(z_i))$ ,  $K^v(z_i) = (1, k_1^v(z_i), k_2^v(z_i), \dots, k_{p'}^v(z_i))$ 爲非滑動因子之效應。但若以此模型預測上下界, 可能會產生下界大於上界的情況, 故此建模法並不太恰當。

2. 將區間的描述法改變爲區間中心 $c_{z_i}$ 以及區間半長 $l_{z_i}$ , 其中

$$c_{z_i} = \frac{u_{z_i} + v_{z_i}}{2}$$

$$l_{z_i} = \frac{v_{z_i} - u_{z_i}}{2}$$

並以此建模:

$$c_{z_i} = H^c(z_i)\Gamma_1^c + \epsilon_{ci}$$

$$l_{z_i} = K^l(z_i)\Gamma_2^l + \epsilon_{li}, i = 1, \dots, n$$

$\epsilon_{ci}$ 與 $\epsilon_{li}$ 表誤差項,  $\Gamma^c = [\gamma_1^c, \gamma_2^c, \dots, \gamma_m^c]'$ ,  $\Gamma^l = [\gamma_1^l, \gamma_2^l, \dots, \gamma_m^l]'$ 表模型參數,  $H^c(z_i) = (1, h_1^c(z_i), h_2^c(z_i), \dots, h_p^c(z_i))$ ,  $K^l(z_i) = (1, k_1^l(z_i), k_2^l(z_i), \dots, k_{p'}^l(z_i))$ 爲非滑動因子之效應。但利用此模型預測之區間半長 $\hat{l}_{z_i}$ , 可能會出現負值, 而長度的負值並無任何意義, 故此建模法亦不恰當。

3. 將區間半長取對數轉換改爲 $t_{z_i} = \ln(l_{z_i})$ , 區間中心則爲 $c_{z_i}$ , 以此建模可得;

$$c_{z_i} = H^c(z_i)\Gamma_1^c + \epsilon_{ci} \quad (2.1)$$

$$t_{z_i} = K^t(z_i)\Gamma_2^t + \epsilon_{ti}, i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

$\epsilon_{ci}$ 與 $\epsilon_{ti}$ 表誤差項,  $\Gamma^c = [\gamma_1^c, \gamma_2^c, \dots, \gamma_m^c]'$ ,  $\Gamma^t = [\gamma_1^t, \gamma_2^t, \dots, \gamma_m^t]'$ 表模型參數,  $H^c(z_i) = (1, h_1^c(z_i), h_2^c(z_i), \dots, h_p^c(z_i))$ ,  $K^t(z_i) = (1, k_1^t(z_i), k_2^t(z_i), \dots, k_{p'}^t(z_i))$ 爲非滑動因子之效應。透過模型預測的區間長度 $\hat{l}_{z_i} = \exp(\hat{t}_{z_i})$ 恆正, 而預測的滑動因子區間可寫爲

$$\widehat{W}_{z_i} = [\hat{u}_{z_i}, \hat{u}_{z_i}] = [\hat{c}_{z_i} - \exp(\hat{t}_{z_i}), \hat{c}_{z_i} + \exp(\hat{t}_{z_i})] \quad (2.3)$$

與前述兩方法相比, 以區間中心和對數區間半長建模是較爲適合的方法。

在本文中將以上述的第三種方式建立第一階段分析之模型。利用數據配適出式 (2.1) 以及 (2.2) 之模型後, 分析者便可利用式 (2.3) 的關係預測出任意非滑動因子水平組合對應的滑動因子區間, 進而建構出一個實驗區間, 由於此區間是透過配適而得, 故稱其為「配適」實驗區間。回顧二階段實驗的程序, 分析者在第一階段將會利用各種方法取得滑動因子區間 $W_i$ 之數據, 例如: 專家提供數據或者親自做實驗取得數據。然後利用數據建立滑動因子實驗的配適實驗區間; 第二階段則是根據第一階段分析建立的實驗區間繼續進行的實驗。所以在第一階段分析中, 滑動因子區間 $W_i$ 之數據精確度, 即數據裡誤差的大小, 將影響配適實驗區間的優劣。以下的討論將分三種不同的情境討論, 而專家系統代表的是分析者做實驗其背後所對應的真實模型:

1. 有一專家系統, 並且給了分析者二階段實驗之第一階段的兩個模型
2. 有一專家系統, 並且給了分析者關於滑動水平實驗的數據
3. 沒有專家系統, 實驗數據為分析者親自做實驗獲得

### 2.1.1 情境一

考慮有一專家系統, 並且給了分析者二階段實驗之第一階段的兩個模型。之前提到, 專家系統指的是實驗背後所對應的真實模型。所以對於第一階段的區間中心模型以及對數半長模型, 專家系統提供:

$$\tilde{c}_{z_i} = f(z_i) \quad (2.4)$$

$$\tilde{t}_{z_i} = g(z_i), i = 1, \dots, n \quad (2.5)$$

以上兩個模型可能為非線性的, 但專家系統將會提供 $f$ 和 $g$ 的確切形式, 並且模型中不包含誤差項。只要給定任意的非滑動因子水平組合, 分析者即可透過 (2.4) 與 (2.5) 預測出真實的 $\tilde{c}_{z_i}$ 及 $\tilde{t}_{z_i}$ , 而對應的滑動因子區間如下:

$$\widetilde{W}_{z_i} = [\tilde{c}_{z_i} - \exp(\tilde{t}_{z_i}), \tilde{c}_{z_i} + \exp(\tilde{t}_{z_i})]$$

此真實的滑動因子區間上下界不包含任何誤差。既然任意非滑動因子組合下的滑動因子區間皆不包含誤差, 故稱 $\widetilde{W}_z$ 為「真實」滑動因子區間。而在第二階段實驗中, 實驗者將會依據非滑動因子以及第一階段實驗所得的滑動因子區間之設定進行實

驗, 因此將情境一所建立的第二階段實驗之實驗區間稱為「真實」實驗區間並以  $R_T$  表示。

## 2.1.2 情境二

考慮有一專家系統, 並且給了分析者關於滑動水平實驗的數據。不同於情境1裡專家系統提供的兩個真實確切的模型, 在情境2中, 實驗背後所對應的真實滑動區間中心以及對數半長模型依舊存在, 但是專家系統不會完整的提供所有關於模型的資訊。取而代之的是, 專家系統只提供某些實驗點所對應的真實滑動區間上下界的值。換句話說, 分析者僅能知道在給定某些非滑動因子組合時, 所對應的滑動因子區間是沒有任何誤差的。根據情境2的特徵, 我們可以建立的模型如下:

$$c_{z_i}^\delta = H^\delta(z_i)\Theta^\delta + \epsilon_{c,i} \quad (2.6)$$

$$t_{z_i}^\delta = K^\delta(z_i)\Phi^\delta + \epsilon_{t,i}, i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

其中  $\epsilon_c$  和  $\epsilon_t$  為誤差項,  $H^\delta(z_i) = (1, h_1^\delta(z_i), h_2^\delta(z_i), \dots, h_p^\delta(z_i))$ ,  $K^\delta(z_i) = (1, k_1^\delta(z_i), k_2^\delta(z_i), \dots, k_{p'}^\delta(z_i))$  為非滑動因子之效應,  $\Theta^\delta = (\theta_0^\delta, \theta_1^\delta, \dots, \theta_p^\delta)'$ ,  $\Phi^\delta = (\phi_0^\delta, \phi_1^\delta, \dots, \phi_{p'}^\delta)'$  為模型參數。我們將以式 (2.6) 和 (2.7) 中的  $H^\delta(z_i)\Theta^\delta$  及  $K^\delta(z_i)\Phi^\delta$  逼近式 (2.4) 及 (2.5) 中的  $f$  與  $g$ 。而儘管 (2.6) 與 (2.7) 是利用真實滑動因子區間之數據進行配適並獲得

$$\hat{c}_{z_i}^\delta = \hat{H}^\delta(z_i)\hat{\Theta}^\delta \quad (2.8)$$

$$\hat{t}_{z_i}^\delta = \hat{K}^\delta(z_i)\hat{\Phi}^\delta, i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

但配適過程中仍會產生誤差, 此即  $\epsilon_{c,i}$  和  $\epsilon_{t,i}$  兩項代表配適誤差, 而非實驗誤差。

有了配適的模型, 分析者除了有專家系統提供的真實滑動因子區間外, 還能夠進行配適以獲得實驗區間其他部分的滑動因子區間中心和半長。且預測的滑動因子區間為:

$$\hat{W}_{z_i}^\delta = [\hat{c}_{z_i}^\delta - \exp(\hat{t}_{z_i}^\delta), \hat{c}_{z_i}^\delta + \exp(\hat{t}_{z_i}^\delta)]$$

若代入各種不同的非滑動因子設定, 便能得到在各個非滑動水平組合之滑動因子區間進而配適出一實驗區間, 稱其為半 (pseudo) 真實實驗區間, 且以  $R_P$  代表透過



真實無誤差數據配適之模型, 即式 (2.6) 與 (2.7) 所建構出之實驗區間; 以  $\widehat{W}_{z_i}^\delta$ , 表示預測之滑動因子區間。藉由模型 (2.8) 與 (2.9) 的殘差 (residual) 便可以估計配適誤差  $\epsilon_c$  和  $\epsilon_t$ :

$$\begin{aligned}\widehat{\epsilon}_{c_{z_i}} &= \widetilde{c}_{z_i} - \widehat{c}_{z_i}^\delta \\ \widehat{\epsilon}_{t_{z_i}} &= \widetilde{t}_{z_i} - \widehat{t}_{z_i}^\delta\end{aligned}$$

其中  $\widetilde{c}_{z_i}$  和  $\widetilde{t}_{z_i}$  為專家系統提供的真值,  $\widehat{c}_{z_i}^\delta$  跟  $\widehat{t}_{z_i}^\delta$  為式 (2.8) 及 (2.9) 定義。這樣的誤差造成配適實驗區間偏離了真實實驗區間, 而接下來的第二階段實驗則會根據  $R_P$  預測出的實驗區間進行。所以對實驗者而言, 半真實實驗區間  $R_P$  具有隨機性。

因為專家系統提供了分析者一些區間中心以及對數半長的真值。於是, 我們可以透過區間中心以及對數半長的真值和配適值之間的差異, 計算出關於區間中心以及對數半長模型的均方和 (sum of square)。

$$\widehat{\sigma}_c^2 = \frac{\sum_i \widehat{\epsilon}_{c_{z_i}}^2}{n - df_c} = \frac{\sum_i (c_{z_i} - \widehat{c}_{z_i}^\delta)^2}{n - df_c} \quad (2.10)$$

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \frac{\sum_i \widehat{\epsilon}_{t_{z_i}}^2}{n - df_t} = \frac{\sum_i (t_{z_i} - \widehat{t}_{z_i}^\delta)^2}{n - df_t} \quad (2.11)$$

其中  $df_c$  和  $df_t$  分別代表區間中心和對數半長模型的自由度,  $n$  代表樣本大小。有了區間中心以及對數半長的變異數估計後, 我們便能夠得知配適實驗區間偏離真實實驗區間的大小或者情況。

### 2.1.3 情境三

前面的兩段提到了專家系統給予分析者真實的區間中心還有對數半長模型或者是不帶有誤差的數據, 但若沒有專家系統提供前述兩種真實的資訊, 分析者只能親自做實驗以獲得關於實驗區間的數據。但由於分析者本身的因素, 例如實驗的操作手法, 使得分析者經過試驗取得的滑動因子區間  $I^* = [u^*, v^*]$  可能偏離了真實的滑動因子區間。所以, 經過實驗取得的資料本身可能是帶有誤差的, 並不像前面的兩個狀況, 分析者有一些正確無誤的滑動因子區間。根據實驗數據, 分析者可以建立區間中心以及半長的模型:

$$c_{z_i}^* = H^*(z_i)\Theta^* + \epsilon_{c,i}^* \quad (2.12)$$

$$t_{z_i}^* = K^*(z_i)\Phi^* + \epsilon_{t,i}^*, i = 1, \dots, n \quad (2.13)$$

其中 $\epsilon_{c,i}^*$ 和 $\epsilon_{t,i}^*$ 表示模型的誤差項, $H^*(z_i) = (1, h_1^*(z_i), h_2^*(z_i), \dots, h_p^*(z_i))$ ,  $K^*(z_i) = (1, k_1^*(z_i), k_1^*(z_i), \dots, k_{p'}^{\delta}(z_i))$ 爲非滑動因子之效應,  $\Theta^* = (\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_p^*)'$ ,  $\Phi^* = (\phi_0^*, \phi_1^*, \dots, \phi_{p'}^*)'$ 爲模型參數。由於數據的產生方式是經由實驗而得, 故當進行第一階段分析配適模型時, 數據中的實驗誤差也將會出現在模型中。式 (2.12) 與 (2.13) 中 $H^*(z_i)\Theta^*$ 以及 $K^*(z_i)\Phi^*$ 分別是用來逼近 $f$ 與 $g$ 的, 所以也會產生配適誤差。所以 $\epsilon_{c,i}^*$ 和 $\epsilon_{t,i}^*$ 包含實驗誤差以及配適誤差。

當分析者取得了數據後, 依然能夠建立出配適的區間中心以及對數半長模型:

$$\hat{c}_{z_i}^* = \hat{H}^*(z_i)\hat{\Theta}^* \quad (2.14)$$

$$\hat{t}_{z_i}^* = \hat{K}^*(z_i)\hat{\Phi}^*, i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

其中 $\hat{c}^*$ 和 $\hat{t}^*$ 表示利用分析者自行實驗取得的數據所配適的模型之預測值, 爲了和情境2中的預測值區別, 故加上標 $*$ 。透過配適之模型, 便能夠得到任意非滑動因子組合下的滑動因子區間中心以及對數半長, 然後預測出滑動因子區間, 即:

$$\hat{W}_{z_i}^* = [\hat{c}_{z_i}^* - \exp(\hat{t}_{z_i}^*), \hat{c}_{z_i}^* + \exp(\hat{t}_{z_i}^*)]$$

將此區間稱爲非真實滑動因子區間, 並以 $R_D$ 代表實驗數據配適之實驗區間。並以 $\hat{W}_z^*$ , 表示預測之滑動因子區間。

若以配適實驗區間偏離真實實驗區間的程度比較情境2與情境3, 則可發現, 情境2的配適實驗區間 $R_P$ 較爲精確, 因爲情境2會有專家系統提供的無誤差數據; 而情境3的實驗區間會較爲不精確, 因爲實驗數據是來自分析者親自做實驗之結果, 所以數據裡的實驗誤差使得滑動因子區間原本就偏離真實的區間。

在情境2中, 我們可以估計出配適實驗區間偏離真實實驗區間的程度, 即式 (2.10) 和 (2.11)。那麼在情境3中, 我們也可以估計出偏離的程度

$$\hat{\sigma}_{c^*}^2 = \frac{\sum_i (c_{z_i}^* - \hat{c}_{z_i}^*)^2}{n - df_{c^*}} \quad (2.16)$$

$$\hat{\sigma}_{t^*}^2 = \frac{\sum_i (t_{z_i}^* - \hat{t}_{z_i}^*)^2}{n - df_{t^*}} \quad (2.17)$$

其中 $\hat{c}_{z_i}^*$ 和 $\hat{t}_{z_i}^*$ 由式 (2.14) 及 (2.15) 定義, $c_{z_i}^*$ 和 $t_{z_i}^*$ 爲分析者實驗而得的區間中心以及對數半長數據, $df_{c^*}$ 和 $df_{t^*}$ 分別代表區間中心和對數半長模型的自由度。比較 (2.10)



和 (2.11) 以及 (2.16) 和 (2.17) 可發現, 情境3估計的兩個均方和也將大於情境2所估計的兩個均方和, 因為實驗誤差將會出現在情境3。此外, 情境2有專家系統提供的真實數據, 故可將 (2.10) 和 (2.11) 的估計視為配適誤差的變異數估計。

綜合以上三個情境可知:

1. 只有在分析者獲得專家系統提供的真實區間中心和長度模型時, 才能建構出真實無誤差的實驗區間。
2. 沒有專家系統提供的區間中心和長度模型, 但有真實無誤差的數據, 則透過數據所建構出的實驗區間模型, 將會帶有配適誤差。
3. 沒有專家系統, 沒有真實的模型和無誤差的數據, 則依靠分析者的實驗數據建構的實驗區間模型, 會有實驗誤差與配適誤差。
4. 若有專家系統提供的真實數據, 那麼估計出的實驗區間會較沒有真實數據來的準確。且當估計配適實驗區間偏離真實實驗區間的程度時, 也會是有真實數據的情況較為精準。

## 2.2 實驗區間隨機性對第二階段模型造成的影響

在二階段實驗中, 分析者利用第一階段的數據對滑動因子區間中心和區間半長分別建立模型, 目的是建立配適的實驗區間。在第二階段數據的分析裡, 分析者的目的則是配適非滑動因子與滑動因子對反應變數 $Y$ 的反應曲面, 即建立第二階段分析的模型, 並以此來估計真實的反應曲面。前文提及滑動因子區間 $W_{z_i}$ 可視為給定一組非滑動因子水平組合 $\mathbf{Z}_i$ 下所得之區間, 並且當給定不同的非滑動因子水平組合 $\mathbf{Z}_j$ 且 $i \neq j$ 時,  $W_{z_j}$ 之區間上下界將與 $W_{z_i}$ 之區間上下界不同。在傳統的因子實驗, 由於實驗因子水平組合是固定的, 因此以相同的因子水平組合進行實驗, 其反應變數期望值會是相同的。在二階段實驗中, 實驗因子包含非滑動因子與滑動因子, 由於實驗區間具有隨機性, 故給定相同的非滑動因子水平組合, 其所建立的滑動因子區間將會是隨機的。故可知二階段實驗的實驗因子組合是隨機的, 而第二階段實驗的反應變數期望值亦將會是隨機的。儘管滑動因子區間是隨機的, 但其為給定非滑動因子, 並經過前文描述的情境進行配適或實驗而得。須注意, 在情境一的滑動因子是真實的, 故不具有隨機性。故根據在 Hamada and Wu(1995) 提出, 可將滑

動因子視為一巢狀因子，進而使用巢狀效應建模法來建立第二階段之模型。

不同於第一階段分析，滑動因子的角色在第二階段分析裡由原先的反應變數轉變為解釋變數。根據前文關於實驗區間隨機性的討論，共陳述了三種情境，分別可得三種不同的滑動因子區間中心及半長之模型，所以實驗區間亦可以三種方式描述。此外，非滑動因子水準組合不論在情境一，二或三，都是固定不變的。故三種情境的實驗區間之描述方式如下：

1. 情境一的真實實驗區間  $R_T$ ，其真實滑動因子區間  $\widetilde{W}_{z_i} = [\widetilde{u}_{z_i}, \widetilde{v}_{z_i}]$ ，由於非滑動因子水準組合數為  $n$ ，故  $i = 1, \dots, n$
2. 情境二的半真實實驗區間  $R_P$ ，其半真實滑動因子區間  $\widehat{W}_{z_i}^\delta = [\widehat{u}_{z_i}^\delta, \widehat{v}_{z_i}^\delta]$ 。
3. 情境三的非真實實驗區間  $R_D$ ，其非真實滑動因子區間  $\widehat{W}_{z_i}^* = [\widehat{u}_{z_i}^*, \widehat{v}_{z_i}^*]$ 。

即三種實驗區間之間，是由於滑動因子區間會變動的關係而有不同的描述。根據 3.1 節中的討論，若以  $\widetilde{W}_{z_i}$  為基準比較，可知情境二所配適的實驗區間  $\widehat{W}_{z_i}^\delta$  與  $\widetilde{W}_{z_i}$  之間的誤差將可假設為小於  $\widehat{W}_{z_i}^*$  與  $\widetilde{W}_{z_i}$  之間的誤差。所以，半真實滑動因子區間與真實滑動因子區間之關係為

$$[\widehat{u}_{z_i}^\delta, \widehat{v}_{z_i}^\delta] = [\widetilde{u}_{z_i}, \widetilde{v}_{z_i}] + [\Delta_{1z_i}^u, \Delta_{1z_i}^v] \quad (2.18)$$

非真實滑動因子區間與真實滑動因子區間之關係為

$$[\widehat{u}_{z_i}^*, \widehat{v}_{z_i}^*] = [\widetilde{u}_{z_i}, \widetilde{v}_{z_i}] + [\Delta_{2z_i}^u, \Delta_{2z_i}^v] \quad (2.19)$$

其中  $\Delta_{1z_i}^u, \Delta_{1z_i}^v$  代表  $\widehat{W}_{z_i}^\delta$  和  $\widetilde{W}_{z_i}$  個別的上下界之間的隨機誤差， $\Delta_{2z_i}^u$  以及  $\Delta_{2z_i}^v$  則代表  $\widehat{W}_{z_i}^*$  和  $\widetilde{W}_{z_i}$  個別的上下界之間的隨機誤差，而區間上下界是經由區間中心加減區間半長而得。且

$$\begin{aligned} \text{var}(\Delta_{2z_i}^u) &> \text{var}(\Delta_{1z_i}^u) \\ \text{var}(\Delta_{2z_i}^v) &> \text{var}(\Delta_{1z_i}^v) \end{aligned}$$

以上的關係式，是由三種不同的情境所造成的。在情境二裡，分析者利用真實的數據建立配適的實驗區間  $R_P$ ，其所包含的誤差可視作模型配適誤差。在情境三裡，分析者做實驗獲得的數據所建立之實驗區間  $R_D$ ，其誤差除了包含模型配適誤差，還包含實驗誤差。故可假設  $R_P$  所包含的誤差之變異數將會大於  $R_D$  之變異數。

在情境二中，分析者獲得真實的滑動因子區間數據，然後配適獲得實驗區間模型，其帶有配適誤差。情境三中，若實驗者進行兩次相同的第一階段實驗，將會得到不同的配適滑動因子區間，其包含實驗與配適的誤差。故在情境二與三，第二階段實驗的實驗區間具有隨機性。進入第二階段實驗後，實驗者將會依據第一階段分析的結果，進行第二階段的實驗，然後獲得 $Y$ 的實驗數據。實驗區間的隨機性，不但會影響實驗區間亦會使得反應變數 $Y$ 的期望值具有隨機性，所以利用實驗區間構造的設計矩陣(design matrix)也將會改變，而根據模型矩陣(model matrix)以及反應變數配適而得的第二階段模型之參數估計勢必也將受到影響，其中模型矩陣是和設計矩陣相關的。所以，接下來關於第二階段實驗數據的討論將細分為三種情境。

### 2.2.1 情境一

利用專家系統提供的真實區間中心模型以及區間半長模型建立出真實的實驗區間 $R_T$ 。其所代表的便是分析者欲了解的真實實驗區間，且不包含誤差。接著在第二階段實驗裡，實驗者便在真實實驗區間 $R_T$ 進行實驗並獲得 $Y$ 之數據，而 $Y$ 值將只包含實驗誤差 $\epsilon$ 。所以，利用真實實驗區間 $R_T$ 建立的第二階段模型為

$$Y = U\Gamma + X_T\beta_T + \epsilon \quad (2.20)$$

其中 $U$ 為非滑動因子 $Z$ 編碼後產生的矩陣，表示非滑動因子的效應，若非滑動因子組合數為 $n$ ，非滑動因子數為 $m$ ，則 $U$ 之維度為 $n \times m$ ，與 $Z$ 相同。 $X_T$ 則為 $\widetilde{W}$ 編碼後產生的矩陣，表示滑動因子產生的效應，且 $X_T$ 之維度與第二階段數據分析之模型相關，若模型包含滑動因子的一階線性至 $k$ 階效應，則 $X_T$ 之維度為 $n \times k$ 。 $\Gamma$ 與 $\beta_T$ 分別為參數， $\epsilon$ 為實驗誤差。

當分析者估計參數 $\beta_T$ 時，由於實驗區間 $R_T$ 不包含誤差的關係，亦不會有第一階段實驗之誤差傳遞至第二階段模型之中，所以參數估計 $\hat{\beta}_T$ 之變異數將只受到第二階段實驗誤差 $\epsilon$ 影響。

### 2.2.2 情境二

專家系統提供了某些非滑動因子組合所對應的真實滑動因子區間，根據真實的數據，分析者配適出半真實實驗區間 $R_P$ ，但在 $R_P$ 之內只有某些非滑動因子水平組合

之滑動因子是真實的，所以分析者須預測專家系統未給定真實滑動因子區間的實驗區間。根據式 (2.18) 的描述，儘管實驗區間具有隨機性會使得在情境二配適之滑動因子區間偏離真實的區間，但第二階段的實驗依舊是在  $R_P$  內進行的。配適統計模型的過程中，我們通常會將解釋變數以正交多項式編碼，然後配適模型，或是直接以未編碼的原始值配適模型。採用編碼與未編碼的分析策略下所得之參數估計，其單位是不同的。以下將透過兩種不同的編碼方式討論實驗區間的隨機性對滑動因子效應之參數估計的影響：

1. 直接以滑動因子區間的值配適模型，例如區間為  $[20,50]$ ，則直接以低水平 20 以及高水平 50 配適第二階段模型，而不經過正交多項式轉換。以滑動因子區間真值建立的第二階段模型為：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{X}_{P_1}\beta_{P_1} + \epsilon \quad (2.21)$$

其中  $\mathbf{U}$  為非滑動因子效應， $\mathbf{X}_{P_1}$  為滑動因子之效應， $\beta_{P_1}$  和  $\mathbf{\Gamma}$  為參數， $\epsilon$  表隨機實驗誤差。

根據二階段實驗的步驟，第二階段實驗是透過控制非滑動因子以及滑動因子之設定進行，此外，由於非滑動因子的水準組合不論在任何情境都是固定的，所以我們將編碼方式所產生的變化之討論專注於滑動因子上。而滑動因子的高低水平以真值表示時，其高低水平之間的差距可以用滑動因子的原始單位表示。舉例而言，假設一簡單迴歸模型

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

假設  $\beta_0 = 10, \beta_1 = 3$ ，滑動因子  $x$  之實驗區間為  $[20,50]$ ，若以  $x$  的低水平進行實驗獲得的反應變數之期望值為 7，高水平為 13。直接以  $x$  的高低水平值運用最小平方估計  $\beta_1$ ，則可得  $\hat{\beta}_1$  之期望值為 0.2，而參數之單位為反應變數  $y$  的單位除以解釋變數  $x$  的單位。由此例可知，不採用正交多項式將  $x$  編碼並估計參數，那麼參數估計的單位即為  $y$  單位除以  $x$  單位。換句話說，當  $x$  變動 1 單位時，等同於滑動因子變動 1 單位，使得反應曲面產生 0.2 的變化。



2. 對於所有的非滑動因子水平組合下的滑動因子區間 $W_{z_i}$ ，都將以利用正交多項式 $P^*(W_{z_i})$ 編碼之

$$P^*(W_{z_i}) = \frac{W_{z_i} - c_{z_i}}{l_{z_i}}$$

其中 $W_{z_i}$ 之區間中心 $c_{z_i}$ 以及區間半長 $l_{z_i}$ 都將被用來編碼。以編碼滑動因子建立的第二階段模型為：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\Gamma + \mathbf{X}_{P_2}\beta_{P_2} + \epsilon \quad (2.22)$$

其中 $\mathbf{U}$ 為非滑動因子效應， $\mathbf{X}_{P_2}$ 為滑動因子之效應， $\beta_{P_2}$ 和 $\Gamma$ 為參數， $\epsilon$ 表隨機實驗誤差。

在此狀況下，經過編碼後配適的模型，同樣會有單位所產生的問題，此處我們亦將透過例子說明。假設一真實模型為：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

其中 $\beta_0$ 為10， $\beta_1$ 為3。滑動因子 $x$ 的實驗區間為 $[20, 50]$ ，而反應變數期望值在 $x = 20$ 及 $x = 50$ 時分別為7與13，利用正交多項式將 $[20, 50]$ 編碼成 $[-1, 1]$ ，以最小平方估計 $\beta_1$ 可得 $\hat{\beta}_1$ 之期望值為3，並且1單位的編碼值代表15單位的滑動因子值。因此，以編碼滑動因子估計參數，參數的單位為反應變數 $y$ 的單位除以 $x$ 編碼值的單位，且編碼值的單位隨著實驗區間不同而變化。在此例中，1編碼值代表15單位的滑動因子，故當 $x$ 變動1單位時等於滑動因子變動15單位，並使反應曲面產生3的變化。

上述的例子中，若將滑動因子的實驗區間改為 $[40, 60]$ ，則反應變數期望值在 $x = 40$ 及 $x = 60$ 時分別為11與15，再利用正交多項式將 $[40, 60]$ 編碼成 $[-1, 1]$ 可得 $\hat{\beta}_1$ 之期望值為2。此時1單位的編碼值則代表10單位的滑動因子，故當 $x$ 變動1單位時等於滑動因子變動10單位，並使反應曲面產生2的變化。

兩者之間的差異，說明若採用編碼策略估計參數，則參數的意義將會受到實驗區間的隨機性影響，因為1編碼值所代表的滑動因子量是隨機的。

比較兩種估計的方式，有無將 $x$ 編碼所產生的參數，雖然值不一樣，但其實未編碼的參數是將編碼的參數之單位再細分而得，在此例中編碼的方法獲得之

參數為3, 未編碼之參數則為0.2, 前者為後者的15倍, 和編碼值的單位倍數差是相同的。所以在第二階段的數據分析裡, 若採用未編碼的滑動因子分析策略估計模型參數, 則參數估計之單位會被細分, 我們可較準確的了解一單位滑動因子的變化對於反應曲面造成的改變。若採用正交多項式編碼的分析策略, 雖然參數的涵意會受到實驗區間的隨機性影響, 但卻多了直交性 (orthogonality), 因此也帶來了數據分析上的便利性。

根據以上, 若我們利用未編碼的滑動因子估計參數, 則參數所描述的是每單位滑動因子的變化對反應曲面造成的影響。因此可推斷此分析策略較不易受實驗區間隨機性的影響。若採用編碼的滑動因子估計參數, 則參數所描述的是每單位編碼值對反應曲面的影響。雖然編碼值代表的滑動因子單位會受到區間隨機化影響, 但以正交多項式分析的策略, 具有直交性的優點。

### 2.2.3 情境三

根據式(2.19)的描述可知, 隨機性造成了非真實滑動因子區間 $\widehat{W}_{z_i}^*$ 偏離真實滑動因子區間 $\widetilde{W}_{z_i}^*$ , 而隨機性所產生的誤差之變異大於情境二中所描述的情況。因此, 根據3.2.2所討論之結果, 參數估計在未編碼的分析策略中將比較不會受到實驗區間的隨機性影響; 而在編碼的分析策略中, 參數估計受到實驗區間的隨機性影響將較情境二來的大。

## 第 3 章

### 模擬

第二章提到實驗區間的隨機性使得第二階段模型裡的滑動因子之參數產生變化，為了解實驗區間的變動究竟會如何影響參數估計，所以本章的模擬將會假設一個真實的第二階段分析之模型，並且假設一個真實的實驗區間，然後透過實驗區間的變動，隨機生成新的實驗區間，使得滑動因子區間會不同程度地偏離真實滑動因子區間。接著仿造第二階段實驗的過程隨機生成反應變數之數據，並利用前文提到的編碼方法估計第二階段模型之參數。本章的重點即觀察在不同的編碼方式下，參數估計之期望值與變異數將會因實驗區間的隨機性呈現什麼變化趨勢，並以此來探究實驗區間的隨機性究竟會讓參數估計產生什麼變化。

#### 3.1 模型一之模擬過程

考慮二階段實驗的過程，非滑動因子的各個水平是固定的，而會產生變動的是滑動因子實驗區間。因此，在模擬的過程中，我們將不會把非滑動因子所產生的效應放入模型中。考慮一個最簡單的情況，即模型中的因子只考慮一個二水平的滑動因子，因此我們可以把滑動因子的線性效應放入模型中，故假設一個第二階段模型如下：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \epsilon \quad (3.1)$$

其中 $\beta_0$ 與 $\beta_1$ 是假設為已知的模型參數。 $P_1(W) = \frac{W-c}{l}$ 為正交多項式， $W$ 為滑動因子，真實實驗區間為 $[u, v]$ ，其區間中心為 $c$ ，半長為 $l$ ，而區間上下界 $u, v$ 假設為已知。 $\epsilon$ 為實驗誤差，其變異數為 $\sigma^2$ 。為使真實的滑動因子區間能夠具有隨機性，我們

將利用電腦軟體隨機生成區間中心和半長值構造出隨機的滑動因子區間，其方法如下：利用常態分布隨機生成區間中心，利用對數常態分配 (lognormal distribution) 生成區間半長，則

$$\begin{aligned} c^* &= c + \epsilon_c \\ \epsilon_c &\sim N(0, \sigma_c^2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中  $c$  表示真實滑動因子區間中心，且

$$l^* \sim LOGNOR(\mu_t, \sigma_t)$$

故

$$t^* = \log(l^*) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2) \quad (3.3)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_l &= E(l^*) = \exp(\mu_t + 0.5\sigma_t^2) \\ \sigma_l^2 &= \text{var}(l^*) = \exp(2\mu_t + \sigma_t^2) \times [\exp(\sigma_t^2) - 1] \end{aligned}$$

故

$$\sigma_t^2 = \log\left(\frac{\sigma_l^2}{\mu_l^2} + 1\right) \quad (3.4)$$

$$\mu_t = \log(\mu_l) - 0.5 \times \log\left(\frac{\sigma_l^2}{\mu_l^2} + 1\right) \quad (3.5)$$

在式 (3.4) 和 (3.5) 中， $\mu_t$  和  $\sigma_t^2$  經由  $\mu_l$  和  $\sigma_l^2$  決定後，便可利用式 (3.3) 的常態分布隨機生成  $t^*$ 。其中  $\mu_l$  代表真實滑動因子區間半長， $\sigma_c^2$  和  $\sigma_l^2$  則分別代表區間中心以及半長的變異數。透過控制區間中心和半長的變異數，我們便可模擬出滑動因子區間由低到高不同程度地偏離真實滑動因子區間的情況。關於使用對數常態模型生成區間半長之原因，請參見 2.1 節之討論。最後，將隨機生成的  $c^*$  與  $t^*$  轉換之，便可獲得隨機化的滑動因子區間  $W^*$  為

$$W^* = [u^*, v^*] = [c^* - \exp(t^*), c^* + \exp(t^*)] \quad (3.6)$$

接著利用模型 (3.1) 在新的滑動因子區間 (3.6) 上生成第二階段實驗之反應變數，其作法為：



1. 計算出模型 (3.1) 在區間 (3.6) 上的期望值。

$$E(Y_u^*) = \beta_0 + \beta_1 P_1(u^*)$$

$$E(Y_v^*) = \beta_0 + \beta_1 P_1(v^*)$$

其中

$$P_1(u^*) = \frac{u^* - c}{l}$$

$$P_1(v^*) = \frac{v^* - c}{l}$$

上式中 $c, l$ 分別代表真實滑動因子區間之區間中心及區間半長。

2. 對步驟一中的期望值分別加上一隨機的實驗誤差項, 生成反應變數 $\mathbf{Y}$ 值。

$$Y_{ui}^* = \beta_0 + \beta_1 P_1(u^*) + \epsilon_i \quad (3.7)$$

$$Y_{vi}^* = \beta_0 + \beta_1 P_1(v^*) + \epsilon_i, i = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

且

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

$\mathbf{Y}$ 值生成的個數在每個因子水平中將會生成 $n$ 個, 故在兩水平因子每次將生成 $2n$ 個 $\mathbf{Y}$ 值, 若為 $k$ 水平因子則每次將生成 $k \times n$ 個 $\mathbf{Y}$ 值。

經過以上生成隨機滑動因子區間以及相對應的反應變數值後, 在模擬的程序裡接著進行的步驟便是估計模型 (3.1) 之中的參數, 而在估計的階段, 前文2.2節提到兩種分析策略: 以未編碼的滑動因子以及編碼過後的滑動因子兩種分析策略來估計參數。

1. 以編碼的隨機滑動因子建模, 可得

$$Y = \beta_{01} + \beta_{11} P_1^*(W^*) + \epsilon \quad (3.9)$$

並以正交多項式將滑動因子編碼, 其中用來編碼的正交多項式為

$$P_1^*(W) = \frac{W - c^*}{l^*} \quad (3.10)$$

須注意式 (3.10) 中的正交多項式  $P_1^*(W)$  與式 (3.7) 與 (3.8) 中的正交多項式  $P_1(W)$  是不同的。 $P_1(W)$  是利用真實滑動因子實驗區間的中心  $c$  和半長  $l$  進行編碼, 其用意在於體現當隨機化滑動因子實驗區間  $W^*$  偏離真實區間  $W$  時, 反應變數值的變化。但以編碼的隨機滑動因子估計模型參數時, 不論滑動因子之實驗區間如何變化, 亦即不論區間上下界  $u^*$  和  $v^*$  產生什麼值, 上界  $v^*$  都將被編碼為 1, 下界  $u^*$  都將被編碼為 -1。因此,  $P_1^*(W)$  將利用隨機滑動因子實驗區間之區間中心  $c^*$  與  $l^*$  進行編碼。所以, 模型矩陣  $\mathbf{M}_1$  為:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

故可知參數估計式為

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\beta}_{11} \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_1' \mathbf{M}_1)^{-1} \mathbf{M}_1' \mathbf{Y}$$

2. 以未編碼的滑動因子建模, 可得

$$Y = \beta_{02} + \beta_{12}W^* + \epsilon \quad (3.12)$$

估計參數  $\beta_{02}$  以及  $\beta_{12}$ , 其模型矩陣為:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & u^* \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u^* \\ 1 & v^* \\ \vdots & \vdots \\ 1 & v^* \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{M}_1$ 為 $2n \times 2$ 之矩陣。故利用最小平方方法所得之參數估計式為：

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_2' \mathbf{M}_2)^{-1} \mathbf{M}_2' \mathbf{Y}$$

綜合以上的說明，本章的模擬工作之相關設定為：

1. 模型 (3.1) 中的參數 $\beta_0$ 將設定為20,  $\beta_1$ 將設定為4。
2. 模擬次數將設定為1000, 且每次的模擬, 都是隨機生成反應變數以及解釋變數之數據, 然後利用編碼及未編碼的隨機滑動因子分別估計模型 (3.9) 和 (3.12) 的參數。並與模型 (3.1) 所設定的參數比較。
3. 每次模擬中, 生成的數據大小為 $k \times n$ , 其中 $k$ 表滑動因子之水平數,  $n = 100$ 每個水平之數據大小。在模型一的設定下, 滑動因子之水平個數 $k = 2$ , 故每次的模擬都將會有200筆隨機生成的數據。
4. 真實滑動因子之實驗區間設定為  $[20, 50]$ , 其區間中心 $c = 35$ , 區間半長 $l = 15$ 。

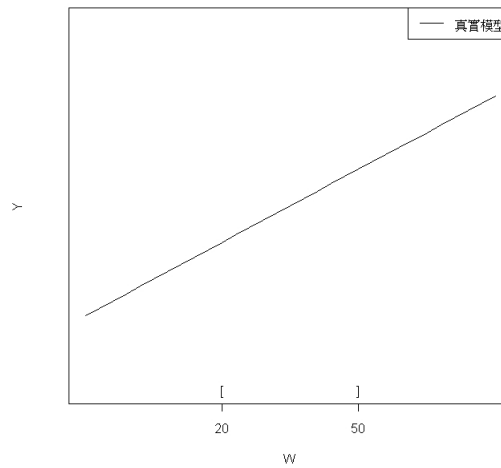


圖 3.1: 真實模型與實驗區間

5. 為使得滑動因子隨機化, 並且不同程度地偏離真實滑動因子區間  $[20, 50]$ 。我們將假設區間中心之變異數, 和區間半長之變異數各為1, 6和10。故滑動因子變動的程度將會有 $3 \times 3 = 9$ 種設定, 即

表 3.1: 變異數 $\sigma_c^2$ 和 $\sigma_t^2$ 之設定

		$\sigma_t^2$		
		1	6	10
$\sigma_c^2$	1	(1,1)	(1,6)	(1,10)
	6	(6,1)	(6,6)	(6,10)
	10	(10,1)	(10,6)	(10,10)

6. 實驗誤差 $\epsilon$ 之變異數 $\sigma_c^2$ 將設定為4。
7. 除利用隨機化滑動因子估計參數, 我們也將用真實的滑動因子 $W$ 估算參數估計之變異數, 以此做為對照將使我們較易觀察隨機滑動因子對參數估計之變異帶來的變化。將 $W$ 之高低水平以 $P_1(W)$ 編碼之, 可得模型矩陣與式 (3.11) 之  $\mathbf{M}_1$ 相同, 此外, 根據前段文章所提, 實驗誤差 $\epsilon$ 之變異數為 $\sigma^2$ 。故可知參數估計之變異數矩陣為:

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_1' \mathbf{M}_1)^{-1} \sigma^2 = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} \end{bmatrix}$$

將 $n$ 以及 $\sigma^2$ 代入設定值的100以及4, 可得:

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

所以 $\hat{\beta}_0$ 以及 $\hat{\beta}_1$ 之變異數皆為0.02, 兩者間的共變異數與相關係數皆為0。此為真實滑動因子區間 $W$ 估計模型 (3.1) 之參數所得的共變異數矩陣。我們將以此做為基準, 觀察隨機化滑動因子所得之參數估計的共變異數矩陣將有何變化。

以本段所述之方法進行模擬，編碼及未編碼的隨機滑動因子都將各有 1000 筆利用模擬所估計的參數，然後再計算出模型 (3.9) 與 (3.12) 的參數估計之平均數，變異數，共變異數與相關係數。以下的 3.1.1 以及 3.1.2 兩小節為模擬結果之討論。

### 3.1.1 模型一之模擬結果-編碼的分析策略

表 3.2: 編碼的隨機滑動因子之參數平均

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$\hat{\beta}_{01}$	$\hat{\beta}_{01}$
(1,1)	19.9855400	4.0173111
(1,6)	19.9936000	4.0062406
(1,10)	20.0079100	4.0042189
(6,1)	19.9818000	4.0005697
(6,6)	19.9702400	4.0173210
(6,10)	19.9845900	4.0185770
(10,1)	19.9718700	4.0096948
(10,6)	20.0017500	4.0173505
(10,10)	19.9234100	3.9819241

編碼的隨機滑動因子與前文所描述的相同，代表將隨機滑動因子區間  $W^*$  以式 (3.10) 的正交多項式  $P_1^*(W^*)$  編碼之。表 (3.2) 最左方的欄位代表該次模擬試驗的滑動因子區間中心之變異數  $\sigma_c^2$  和半長之變異數  $\sigma_l^2$  設定值。而在每一個列之中皆包含 2 個數值，由左至右依序為： $\hat{\beta}_{01}$  的平均值， $\hat{\beta}_{11}$  的平均值。給定一組  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_l^2$  的設定下，我們將透過電腦模擬出 1000 組  $\hat{\beta}_{01}$  和  $\hat{\beta}_{11}$ ，即模型 (3.9) 中的參數估計，接著用這組樣本分別計算  $\hat{\beta}_{01}$  和  $\hat{\beta}_{11}$  的樣本平均數。以表 (3.2) 第一列為例，其  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_l^2$  的設定皆為 1， $\hat{\beta}_{01}=19.98554$  則是利用 1000 個模擬生成的  $\hat{\beta}_{01}$  計算而得之樣本平均數；4.0173111 則為相同計算方式所得的  $\hat{\beta}_{11}$ ，表中其他數值則經過類推可得。

根據表 (3.2)，不論將區間中心和半長變異設定為任何值，利用隨機滑動因子估計模型 (3.9) 之參數  $\beta_{01}$  和  $\beta_{11}$  皆大約為 20 與 4 左右。與模型 (3.1) 所假設的參數設定值幾乎相同，故我們推斷隨機化的滑動因子所估計出的參數，應具有不偏或接近不偏的性質。

表 3.3: 編碼的隨機滑動因子之參數變異

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$var(\hat{\beta}_{01})$	$var(\hat{\beta}_{11})$	$cov(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$	$cor(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$
(1,1)	0.08979469	0.0920137900	0.0002379493	0.0026177770
(1,6)	0.08797613	0.4585140000	0.0059453520	0.0296018494
(1,10)	0.10080891	0.6847309000	-0.0081379730	-0.0309746795
(6,1)	0.47822642	0.0930280560	0.0049232070	0.0233412624
(6,6)	0.44830430	0.4556419000	0.0095990081	0.0212387073
(6,10)	0.46370563	0.6984885223	-0.0437091340	-0.0768017968
(10,1)	0.75301923	0.0853997400	0.0061345168	0.0241907344
(10,6)	0.74456492	0.4679896000	0.0137780908	0.0233410106
(10,10)	0.75200043	0.6802414409	0.0035314843	0.0049376090

表 (3.3) 中, 最左方的欄位所顯示的與表 (3.2) 相同, 皆代表一組  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_l^2$  的設定值。而在每一個列之中皆包含 4 個數值, 由左至右依序為: 截距項  $\hat{\beta}_{01}$  的變異數, 線性效應之參數  $\hat{\beta}_{11}$  的變異數,  $\hat{\beta}_{01}$  和  $\hat{\beta}_{11}$  的共變異數, 以及  $\hat{\beta}_{01}$  和  $\hat{\beta}_{11}$  的相關係數。需注意的是, 表 (3.2) 和表 (3.3) 是用相同模擬結果計算樣本平均和變異, 即給定一組  $(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$  的設定值模擬出參數估計樣本, 然後以此樣本計算表 (3.2) 之樣本平均和表 (3.3) 的樣本變異數。以表 (3.2) 第一列為例, 其  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_l^2$  的設定皆為 1,  $var(\hat{\beta}_{01}) = 0.08979$  則是利用 1000 個模擬生成的  $\hat{\beta}_{01}$  計算而得之樣本變異數; 0.09201 則為相同計算方式所得到的  $var(\hat{\beta}_{11})$ ; 0.00023 則是 1000 組  $\hat{\beta}_{01}$  和  $\hat{\beta}_{11}$  的樣本共變異數; 最後, 把樣本共變異數除以  $\hat{\beta}_{01}$  和  $\hat{\beta}_{11}$  兩者之樣本標準差即可得樣本相關係數 0.00261。表中其他數值則經過類推可得。

在表 (3.3) 中, 我們觀察到了以下幾個現象:

1. 表 (3.3) 中, 第二個欄位的  $var(\hat{\beta}_{01})$  大約介於 0.08 至 0.75, 第三欄的  $var(\hat{\beta}_{11})$  大約介於 0.09 至 0.69。不論在任何  $\sigma_c^2$  與  $\sigma_l^2$  的設定下, 都大於式 (3.13) 中的兩個參數估計之變異數 0.02。其中 0.02 所代表的是, 以真實滑動因子實驗區間  $W$  進行實驗並且估計所獲得的參數之變異數, 其只受到實驗誤差  $\epsilon$  影響。但隨機化的滑動因子所估計的參數變異包含的不只有實驗誤差, 還包含隨機區間中心和隨機區間半長的變異  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_l^2$ , 這些誤差都會使得參數估計的變異數增加。故可知, 只要有區間中心和半長的變異, 隨機化滑動因子  $W^*$  的參數估計之變異數便會大於真實滑動因子  $W$  的參數估計之變異數。若忽略滑動



因子實驗區間的隨機性，即區間視為固定的，則 $var(\hat{\beta}_{01})$ 與 $var(\hat{\beta}_{11})$ 將被低估，這將會使得參數由不顯著變成顯著，因而得到錯誤的分析結果。

2. 仔細觀察 $var(\hat{\beta}_{01})$ 和 $var(\hat{\beta}_{11})$ 可發現，當 $\sigma_c^2$ 為1的時候， $var(\hat{\beta}_{01})$ 大約是0.09；若 $\sigma_c^2$ 變為6時， $var(\hat{\beta}_{01})$ 則大約上升為0.46；若 $\sigma_c^2$ 再提升到10， $var(\hat{\beta}_{01})$ 將再大約上升為0.75。當隨機區間中心之變異數上升時， $\hat{\beta}_{01}$ 及 $\hat{\beta}_{11}$ 的變異數皆產生遞增的現象。給定 $\sigma_l^2$ 為1且 $\sigma_c^2$ 為1,6或10， $var(\hat{\beta}_{11})$ 約為0.09；同樣地，若 $\sigma_l^2$ 為6，則 $var(\hat{\beta}_{11})$ 約為0.45；若 $\sigma_l^2$ 為10，則 $var(\hat{\beta}_{11})$ 約為0.69。我們可發現，給定區間半長之變異， $var(\hat{\beta}_{11})$ 受區間中心變異的影響很小。圖3.2中，我們讓區間半長維持固定，而只有區間中心產生變動，因此可看到兩個半長相同但不重疊的實驗區間1與2。而在圖3.2中，我們分別對兩實驗區域畫出其個別的三角型，若以 $X$ 分量表示滑動因子的變化， $Y$ 分量代表反應變數的變化。在實驗區間1與2裡， $X$ 與 $Y$ 分量兩者的變量完全相同，可知其斜率變化亦相同，即斜率參數 $\hat{\beta}_{11}$ 在實驗區域1與2中是相同的。故可知，採用編碼分析策略所得的參數估計，在給定區間半長變異的情況下，其參數估計所代表的單位不會有太大的改變。若以隨機滑動因子實驗區間 $W = [u^*, v^*]$ 的角度解釋，1單位的編碼值代表 $\frac{v^* - u^*}{2} = l^*$ 單位的滑動因子，可知編碼值單位的改變只受到隨機區間半長影響，因此也解釋了為何隨機區間中心對於 $var(\hat{\beta}_{11})$ 幾乎沒有太大影響。雖然區間中心變動對於斜率參數沒有太大影響，但區間的變動對反應變數之期望值造成影響，圖3.2的實驗區間1裡，可看到反應變數期望值較實驗區間2小，因此使得截距參數估計的變異 $var(\hat{\beta}_{01})$ 產生變化，故可知區間中心變異遞增會使得 $var(\hat{\beta}_{01})$ 遞增。

3. 表(3.3)中，當 $\sigma_l^2$ 為1的時候， $var(\hat{\beta}_{01})$ 大約是0.09；若 $\sigma_l^2$ 變為6時， $var(\hat{\beta}_{01})$ 則大約上升為0.44；若 $\sigma_l^2$ 再提升到10， $var(\hat{\beta}_{01})$ 將再大約上升為0.75。此外，給定 $\sigma_c^2$ 為1,6或10，當 $\sigma_l^2$ 為1， $var(\hat{\beta}_{11})$ 約為0.09， $\sigma_l^2$ 為6， $var(\hat{\beta}_{11})$ 約為0.45； $\sigma_l^2$ 為10， $var(\hat{\beta}_{11})$ 約為0.68。這樣的現象與第2點相反，給定區間中心變異則區間半長變異對於 $var(\hat{\beta}_{01})$ 變化不大，但造成 $var(\hat{\beta}_{11})$ 劇烈的改變。圖3.3中，展示兩不同的實驗區間3與4，兩者之區間中心相同，但區間半長不同。如同圖3.2，實驗區間3和4中亦有其對應的三角型，其意義與圖3.2中的三角型相同，但可發現實驗區間3在 $X$ 與 $Y$ 分量的變化量皆小於實驗區間4，若將

隨機滑動因子以 $-1, 1$ 編碼之，則實驗區間3的編碼值與實驗區間4的編碼值代表的滑動因子單位是不一樣的。由第2點的討論知，1編碼值代表 $\frac{v^* - u^*}{2} = l^*$ 單位的滑動因子，而編碼值的單位代表 $\hat{\beta}_{11}$ 的單位，因此說明了隨著 $\sigma_l^2$ 上升 $var(\hat{\beta}_{11})$ 有劇烈的變動。實驗區間3與4在區間中心不變的情況下，兩者之反應變數期望值的平均是相同的，故可知區間半長對於 $var(\hat{\beta}_{01})$ 沒有影響。

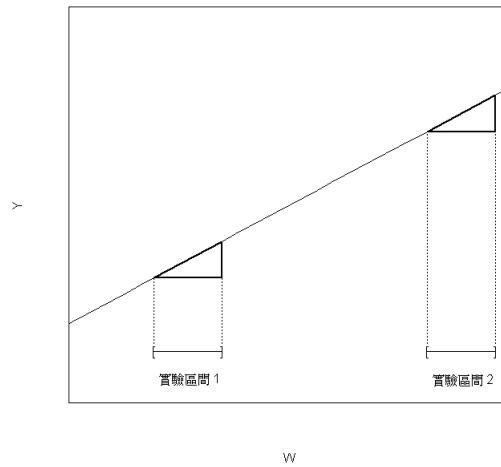


圖 3.2: 區間中心改變，區間半長固定

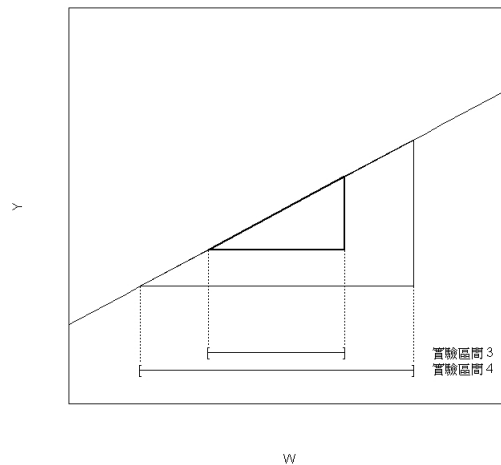


圖 3.3: 區間中心固定，區間半長改變



4. 表 (3.3) 第四個欄位顯示,9個 $\hat{\beta}_{01}$ 和 $\hat{\beta}_{11}$ 的共變異數值中的最大值約為0.013, 最小值約為-0.04, 其餘大約介於-0.008至0.009之間。這些數字都偏小, 且有正的值和負的值。所以, 我們推斷 $cov(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$  在任意 $\sigma_c^2$ 和 $\sigma_l^2$ 的設定下皆接近0。若觀察表 (3.2) 的第五個欄位亦可發現, $cor(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$  的值約在-0.07至0.02之間散佈著, 且數字偏小, 所以我們亦推斷 $cor(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$ 為0。此結論與式 (3.13) 的共變異數為0一致。

### 3.1.2 模型一之模擬結果-未編碼的分析策略

表 3.4: 未編碼的隨機滑動因子之參數平均

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$\hat{\beta}_{02}$	$\hat{\beta}_{12}$
(1,1)	10.64226	0.2671117
(1,6)	10.66222	0.2667396
(1,10)	10.66922	0.2667253
(6,1)	10.66345	0.2666874
(6,6)	10.67337	0.2666126
(6,10)	10.66705	0.2666316
(10,1)	10.66483	0.2667866
(10,6)	10.65354	0.2670275
(10,10)	10.66548	0.2667121

未編碼的隨機滑動因子代表我們在模擬試驗的過程, 直接以隨機生成的滑動因子實驗區間上下界值估計模型的參數, 而未經過正交多項式編碼。表 (3.3) 之中的每個數值計算方法皆與表 (3.1) 相同, 但表 (3.3) 是利用模型 (3.12) 的參數估計計算而得, 表 (3.1) 則是利用模型 (3.9) 的參數估計計算而得。

根據表 (3.4),  $\hat{\beta}_{02}$ 和 $\hat{\beta}_{12}$  的樣本平均值大約為10.66與0.26, 與模型 (3.1) 所假設之 $\beta_0 = 20, \beta_1 = 4$ 不同。這樣的差異主要是因為未編碼的滑動因子所得的參數估計之單位已經改變, 不論隨機滑動因子實驗區間如何改變, 參數估計之單位皆為滑動因子的原始單位, 所以未編碼分析策略的參數估計將會與真實滑動因子的參數估計不同。

表 3.5: 未編碼的隨機滑動因子之參數變異

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$var(\hat{\beta}_{02})$	$var(\hat{\beta}_{12})$	$cov(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$	$cor(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$
(1,1)	0.12791036	0.00008867062	-0.0030879056	-0.9168985415
(1,6)	0.14102491	0.00009891921	-0.0034676230	-0.9284181875
(1,10)	0.13757215	0.00009753699	-0.0033847100	-0.9239990563
(6,1)	0.13091439	0.00009275900	-0.0031936620	-0.9164678378
(6,6)	0.13401309	0.00009507613	-0.0032882851	-0.9212131021
(6,10)	0.15377150	0.00010458980	-0.0037252746	-0.9289144091
(10,1)	0.12762936	0.00008692157	-0.0030488365	-0.9153665927
(10,6)	0.13963533	0.00009700738	-0.0033974902	-0.9231200146
(10,10)	0.15509402	0.00010763050	-0.0037888305	-0.9273420890

表 (3.5) 之中的每個數值計算方法亦與表 (3.3) 相同, 故不贅述。表 (3.5) 的數值, 包含了以下幾點資訊:

1. 表 (3.5) 第二個欄位的  $var(\hat{\beta}_{02})$  大約介於 0.127 至 0.155, 第三個欄位的  $var(\hat{\beta}_{12})$  大約介於 0.00008 至 0.0001 之間。我們可發現  $var(\hat{\beta}_{02})$  與  $var(\hat{\beta}_{12})$  與區間中心變異和半長變異之間, 並無表 (3.3) 般, 隨著區間中心或半長變異上升而有  $var(\hat{\beta}_{02})$  或  $var(\hat{\beta}_{12})$  明顯上升趨勢。此外, 與式 (3.13) 的變異數 0.02 相比, 以未編碼的隨機滑動因子估計之參數變異  $var(\hat{\beta}_{02})$  大於 0.02; 而  $var(\hat{\beta}_{12})$  則小於 0.02。對於斜率參數  $\beta_{12}$ , 以未編碼的滑動因子估計參數, 則參數估計的單位將會是  $y$  的單位除以原始的滑動因子之單位。而在式 (3.13) 或是前部分利用編碼的隨機滑動因子所估計的參數, 參數估計的單位則是  $y$  的單位除以編碼值的單位, 以式 (3.13) 的真實滑動因子為例, 實驗區間為  $[u, v]$ , 若採用  $-1, +1$  編碼, 則編碼值的單位代表  $\frac{v-u}{2}$  單位的滑動因子。故可知若採用未編碼策略, 實驗區間的變動不會使參數估計的單位變化, 因為採用未編碼的分析策略讓參數估計的單位保持一致。截距項參數  $\beta_{02}$  之變異數上升, 可由模型 (3.9) 的截距項參數估計式看出端倪

$$\hat{\beta}_{02} = \bar{Y} - \hat{\beta}_{12} \left( \frac{\sum W^*}{nk} \right)$$

其中  $k$  為滑動因子水平個數 2,  $n$  代表每個水平的樣本數 100,  $\frac{\sum W^*}{nk}$  代表隨機滑動因子之高低水平之平均。以未編碼的隨機滑動因子估計模型 (3.12) 的  $\beta_{02}$

，則隨機區間中心 $c^*$ 和隨機區間半長 $l^*$ 造成的誤差將會出現在 $W^*$ 之中，所以 $\hat{\beta}_{02}$ 的變異數將會較真實滑動因子所估計的 $\hat{\beta}_0$ 來的大。故可知，截距項參數的變異數上升，是因為區間中心和半長的變異所造成的。

2. 表 (3.5) 第四個欄位的 $cov(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 大約為 $-0.003$ ，第五個欄位的 $cor(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 則大約 $-0.92$ 。而在編碼的隨機滑動因子所估計的參數中，表 (3.2) 所呈現的 $cov(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$ 和 $cor(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$ 大約為 $0$ ，這樣的現象可將其視為 $-1, +1$ 編碼所帶來的直交性，使得編碼的隨機滑動因子估計之 $cov(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$ 為 $0$ 。未編碼的隨機滑動因子，截距項的效應與滑動因子的線性效應之間將會有共線性的問題。此外，由於區間隨機性的關係，使得參數估計之間存在共變異數。因此，未編碼的隨機滑動因子所估計的參數之 $cov(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 與 $cor(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 將會產生負值，並且 $cor(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 值很接近 $-1$ ，說明 $\hat{\beta}_{02}$ 與 $\hat{\beta}_{12}$ 之間有強烈的負相關。

### 3.2 模型二之模擬過程

模型二之模擬過程與本章3.1節所描述之方法相同，但真實的模型改為一個二次模型，即：

$$Y = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \beta_2 P_2(W) + \epsilon \quad (3.14)$$

其中

$$P_2(W) = 3 \left( \frac{W - c}{l} \right)^2 - 2$$

模型二之相關模擬設定，與模型一大部分相同，以下為兩者之間的不同處：

1. 模型 (3.14) 中的 $\beta_0$ 與 $\beta_1$ 設定依然為 $20$ 與 $4$ ， $\beta_2$ 設定為 $-2$ 。圖 3.4 展示真實實驗區間  $[20, 50]$  之內的反應曲面。
2. 每次模擬中，生成的數據大小依舊為 $k \times n$ 。但在模型二的設定下，為能估計隨機滑動因子之二階效應，所以對隨機滑動因子多取了一個中水平 $m^*$ ，其中 $m^* = \frac{u^* + v^*}{2}$ ，故水平個數 $k$ 變為 $3$ ，而 $n$ 保持為 $100$ ，因此每次的模擬都將會有 $300$ 筆隨機生成的數據。

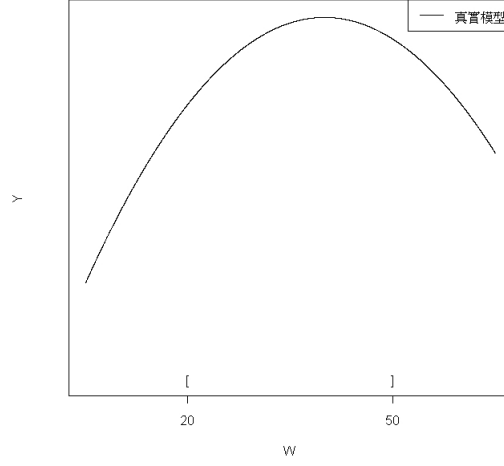


圖 3.4: 真實二次模型與實驗區間

3. 將隨機滑動因子編碼的正交多項式 $P_1^*(W)$ 與式 (3.10) 相同, $P_2^*(W)$ 為:

$$P_2^*(W) = 3 \left( \frac{W - c^*}{l^*} \right)^2 - 2 \quad (3.15)$$

其中 $c^*$ 與 $l^*$ 為隨機區間中心和半長。

4. 採用編碼的滑動因子所建立的模型為

$$Y = \beta_{03} + \beta_{13}P_1^*(W^*) + \beta_{23}P_2^*(W^*) + \epsilon \quad (3.16)$$

採用未編碼的滑動因子所建立的模型為

$$Y = \beta_{04} + \beta_{14}W^* + \beta_{24}(W^*)^2 + \epsilon \quad (3.17)$$

5. 做為對照, 我們將以真實滑動因子實驗區間計算模型 (3.14) 的參數估計之變異數, 如此一來將易於觀察隨機滑動因子對於參數估計所帶來的改變。首先, 以正交多項式 $P_1(W)$ 和 $P_2(W)$ 對真實滑動因子的低, 中, 高水平 $u, m, v$ 編

碼可得模型矩陣 $\mathbf{M}_3$ 為

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以, 利用真實滑動因子所得的參數估計之變異數矩陣為:

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_3' \mathbf{M}_3)^{-1} \sigma^2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{3n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma^2}{6n} \end{bmatrix}$$

將實驗誤差之變異數 $\sigma^2$ 代入4, $n$ 代入100, 可知變異數矩陣為:

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0133 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0067 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

以真實滑動因子所估計的參數, 截距項參數之變異數為0.0133, 斜率參數之變異數為0.02, 二次效應之參數則為0.0067, 且參數之間的共變異數為0。

### 3.2.1 模型二之模擬結果-編碼的分析策略

表 3.6: 編碼的隨機滑動因子之參數平均數

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$\hat{\beta}_{03}$	$\hat{\beta}_{13}$	$\hat{\beta}_{23}$
(1,1)	19.97791000	4.00279400	-1.99813150
(1,6)	19.88460000	4.00916100	-2.03850240
(1,10)	19.96392000	3.93493900	-2.00848469
(6,1)	19.79529000	4.09875100	-2.00157548
(6,6)	19.72343000	4.06713900	-2.05045144
(6,10)	19.68989000	4.02697000	-2.07586820
(10,1)	19.71066000	3.99540800	-1.99639217
(10,6)	19.73232000	3.99774400	-1.99775749
(10,10)	19.61221000	4.00953900	-2.05917796

表 (3.6) 中的數值計算方式與表 (3.2) 相同, 在給定任意 $(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$ 之設定下, 1000 組 $\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}$ 與 $\hat{\beta}_{23}$  的平均值大約為 20.4 以及 -2。與模型 (3.14) 所假設的幾乎相同, 故可知編碼的隨機滑動因子之參數估計應具有不偏或接近不偏的性質。

表 3.7: 編碼的隨機滑動因子之參數變異數

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$var(\hat{\beta}_{03})$	$var(\hat{\beta}_{13})$	$var(\hat{\beta}_{23})$
(1,1)	0.379300830	0.663792500	0.081522410
(1,6)	1.765369280	1.029593353	0.432416400
(1,10)	3.127509270	1.332873833	0.755161200
(6,1)	0.832942080	4.108961776	0.075586990
(6,6)	2.141476830	4.204083410	0.452568800
(6,10)	3.627020420	4.351183443	0.804462600
(10,1)	1.198187570	7.028003581	0.078750530
(10,6)	2.572082910	6.510587620	0.440588200
(10,10)	3.690892760	6.748167042	0.747667100



表 3.8: 編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13})$	$cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23})$	$cov(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23})$	$cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13})$	$cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23})$	$cor(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23})$
(1,1)	-0.33797039	0.15010220	-0.07388753	-0.67355116	0.85360442	-0.31762631
(1,6)	-1.00240252	0.84537710	-0.39930920	-0.74351802	0.96756827	-0.59844656
(1,10)	-1.66594954	1.51065700	-0.73282160	-0.81595840	0.98298464	-0.73043892
(6,1)	-1.53441211	0.13986701	-0.06685732	-0.82940866	0.55742234	-0.11996633
(6,6)	-1.93150030	0.86345704	-0.35930812	-0.64372804	0.87708512	-0.26048881
(6,10)	-2.55211658	1.58880404	-0.68665191	-0.64242408	0.93012733	-0.36701178
(10,1)	-2.38546422	0.13911330	-0.06034992	-0.82204296	0.45287621	-0.08112113
(10,6)	-2.90733500	0.87236459	-0.45308131	-0.71046469	0.81948143	-0.26751591
(10,10)	-3.28770403	1.46984500	-0.70005065	-0.65877042	0.88481340	-0.31166097

表 (3.7) 與 (3.8) 中的每一個樣本變異數, 樣本共變異數以及樣本相關係數的計算方式與表 (3.3) 中的相同。都是在給定一組  $(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$  設定值下, 透過模擬獲得 1000 隨機滑動因子之參數估計  $\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}$  和  $\hat{\beta}_{23}$ , 然後計算樣本變異數, 共變異數和相關係數。根據表 (3.7) 和 (3.8), 可獲得以下資訊:

1. 表 (3.7) 中,  $var(\hat{\beta}_{03})$  大約介於 0.37 至 3.69,  $var(\hat{\beta}_{13})$  大約介於 0.66 至 7,  $var(\hat{\beta}_{23})$  大約介於 0.75 至 0.8。與式 (3.18) 的真實滑動因子所估計之參數變異數相比,  $var(\hat{\beta}_0)$  為 0.0133,  $var(\hat{\beta}_1)$  為 0.02,  $var(\hat{\beta}_2)$  為 0.0067。故可知, 隨機滑動因子的三個參數估計之變異數, 都會大於真實滑動因子所估計的參數估計變異數。這又再次的說明, 參數若是由隨機滑動因子估計獲得, 則區間中心變異和半長變異將會使得參數估計的變異數上升。
2. 表 (3.7) 中, 若給定區間半長變異  $\sigma_l^2 = 1, \sigma_c^2$  為 1, 6 與 10 時,  $var(\hat{\beta}_{03})$  由 0.4 上升至 0.8 再上升為 1.2, 其變動範圍介於 0.4 至 1.2 之間; 若  $\sigma_l^2 = 6$ , 則  $var(\hat{\beta}_{03})$  之變動範圍介於 1.8 至 2.6 之間; 若  $\sigma_l^2 = 10$ , 則  $var(\hat{\beta}_{03})$  之變動範圍介於 3.1 至 3.7 之間。由模擬結果可知隨著區間中心上升,  $var(\hat{\beta}_{03})$  的變異數明顯呈現遞增的現象。圖 3.5 中, 展示三個區間半長相等但中心會變動的實驗區間 5, 6 與 7。而三實驗區間在真實模型上分別以粗黑線標示出三個扇型的區域, 其  $X$  分量代表滑動因子的變動,  $Y$  分量代表反應變數的變動。反應變數的期望值大小在三個不同的實驗區間各不相同, 可知  $var(\hat{\beta}_{03})$  受到  $\sigma_c^2$  影響。若給定區間半長的變異, 我們可想像區間中心的變異越大, 則隨機滑動因子實驗區間內的反應變數期望值大小變化會更劇烈, 因此  $\sigma_c^2$  變大, 則  $var(\hat{\beta}_{03})$  亦

將增大。

3. 若給定區間中心變異 $\sigma_l^2 = 1$ , 則 $\sigma_c^2$ 為1,6和10,  $var(\hat{\beta}_{13})$ 各為0.7, 4.1與7;  $\sigma_l^2 = 6$ , 則隨著 $\sigma_c^2$ 變化,  $var(\hat{\beta}_{13})$ 約為1, 4.2與6.5; 若 $\sigma_l^2 = 10$ , 隨著 $\sigma_c^2$ 變化,  $var(\hat{\beta}_{13})$ 為1.3, 4.3與6.7。給定區間半長變異, 我們觀察到隨著 $\sigma_c^2$ 上升,  $var(\hat{\beta}_{13})$ 呈現明顯遞增的狀態。圖 3.5 中, 若將三個實驗區間Y分量的變化除以X分量的變化可得到個別的斜率, 由三個實驗區間可知, 實驗區間5的斜率最大, 其次是實驗區間6的斜率, 實驗區間7的斜率為負是最小的。由二次模型所構成的反應曲面, 會受到二次效應的影響產生曲率的變化, 使得反應變數期望值隨著滑動因子變動而遞增或遞減之速率不同。圖 3.5 的實驗區間5, 其反應變數期望值遞增速率大於實驗區間6, 而兩者為等長的實驗區間, 故實驗區間5之斜率大於實驗區間6之斜率。而在實驗區間7裡, 反應變數之期望值隨著滑動因子遞增而遞減, 因此其斜率為負。故可知, 給定區間半長之變異, 若區間中心之變異 $\sigma_c^2$ 越大, 會使得隨機滑動因子實驗區間裡的斜率變化越大, 即 $var(\hat{\beta}_{13})$ 越大。
4. 若 $\sigma_l^2 = 1$ ,  $var(\hat{\beta}_{23})$ 大概是0.08, 幾乎不受 $\sigma_c^2$ 影響; 同樣地, 若 $\sigma_l^2 = 6$ ,  $var(\hat{\beta}_{23})$ 大概是0.44; 若 $\sigma_l^2 = 10$ ,  $var(\hat{\beta}_{23})$ 大概是0.77。第3點提到, 由於二次效應的關係使得二次模型之曲率會產生變化。由圖 3.5 的三個等長實驗區間, 實驗區間5和7線性效應較為顯著, 但是曲率很微小, 實驗區間6則是線性效應不顯著, 但曲率較實驗區間5與7稍為明顯。雖然三個實驗區間裡的曲率變化各不相同, 但由於半長相等的關係, 使得三個實驗區間內所觀察到的曲率差異很小。圖 3.6 展示3個區間中心相等但不等長的實驗區間, 實驗區間10半長最長的實驗區間, 依序為實驗區間9與實驗區間8。透過實驗區間10所觀察到的曲率較為明顯, 而在實驗區間8則幾乎觀察不到曲率的改變。因此我們看到模擬的結果顯示 $\sigma_c^2$ 的變動, 對於  $var(\hat{\beta}_{23})$ 產生的變化很微小。而 $var(\hat{\beta}_{23})$ 之所以會產生很大的變動, 則是因為區間半長的變異改變隨機滑動因子實驗區間半長, 因而影響隨機實驗區間內所觀察到的曲率明顯與否。所以 $var(\hat{\beta}_{23})$ 會有遞增的趨勢, 是因為 $\sigma_l^2$ 的影響。
5. 表 (3.7) 中, 若給定區間中心變異 $\sigma_c^2 = 1$ ,  $\sigma_l^2$ 為1, 6與10時,  $var(\hat{\beta}_{03})$ 分別為0.4, 1.8與3.1; 若 $\sigma_c^2 = 6$ ,  $\sigma_l^2$ 為1, 6與10時,  $var(\hat{\beta}_{03})$ 分別為0.8, 2.1與3.6;



若 $\sigma_c^2 = 10, \sigma_l^2$ 為1,6與10時, 則 $var(\hat{\beta}_{03})$ 分別為1.2, 2.6與3.7。圖3.5中的三個實驗區間, 只有區間半長改變, 區間中心保持固定。實驗區間8的反應變數期望值變動的範圍很小; 半長較長的實驗區間9的反應變數期望值之變動範圍較大; 區間最長的實驗區間10, 其反應變數期望值變動的範圍則最大。而三實驗區間內的反應變數期望值之最大值皆相等, 但由於半長的關係, 使得實驗區間10將有最小的反應變數期望值, 故實驗區間10所得的截距項參數將是最小的, 實驗區間8是最大的。故可想像, 給定區間中心變異的情況下, 區間半長的改變將會使得截距項參數估計有明顯的變化, 因此 $var(\hat{\beta}_{03})$ 將隨 $\sigma_l^2$ 上升而遞增。

6. 若給定區間中心變異 $\sigma_c^2 = 1$ , 則 $var(\hat{\beta}_{13})$ 大約介於0.7與1.3;  $\sigma_c^2 = 6, var(\hat{\beta}_{13})$ 約介於4.1與4.3; 若 $\sigma_c^2 = 10, var(\hat{\beta}_{13})$ 約在6.5與7之間。同第4點的描述, 圖3.5的實驗區間隨著區間半長增加, 其所觀察到的曲率趨於明顯, 而線性效應則相反, 隨著半長增加將變得稍微不明顯。因此, 當區間半長之變異遞增時, 除了影響到隨機滑動因子實驗區間內所觀察到的曲率, 亦影響到所觀察的線性效應, 所以當給定 $\sigma_c^2$ 時,  $\sigma_l^2$ 的上升將使 $var(\hat{\beta}_{13})$ 小幅度的上升。

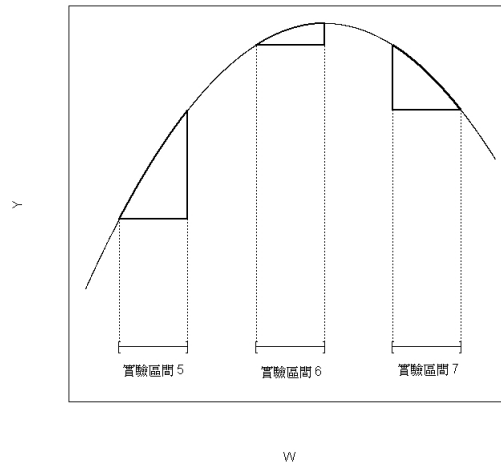


圖 3.5: 區間中心改變, 區間半長固定

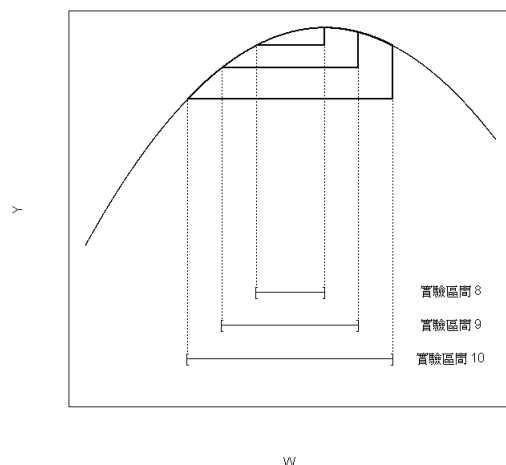


圖 3.6: 區間中心固定, 區間半長變動

7. 根據表 (3.8),  $cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13})$  大約介於  $-3.28$  至  $-0.33$  之間;  $cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23})$  則介於  $0.14$  至  $1.59$ ;  $cov(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23})$  介於  $-0.73$  至  $-0.06$ 。而  $cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13})$  介於  $-0.82$  和  $-0.64$  之間;  $cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23})$  則介於  $0.45$  至  $0.98$ ;  $cor(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23})$  大約介於  $-0.73$  至  $-0.08$  之間。前段文章提到, 二次效應模型所構成的反應曲面, 會受到曲率影響, 當曲率很明顯時, 線性效應會不顯著, 而二次效應會顯著; 若曲率完全不顯著, 則反應曲面會趨近於線性的, 故線性效應顯著, 而二次效應不顯著。因此,  $\hat{\beta}_{13}$  與  $\hat{\beta}_{23}$  之間呈現負相關。

模型 (3.14) 中, 我們將二次效應參數  $\beta_2$  設定為  $-2$ , 所以反應曲面的圖形將會呈現開口向下的曲線, 如圖 3.7; 若將  $\beta_2$  設定為正值, 則反應曲面將會是開口向上的曲線, 如圖 3.8。而在圖 3.7 中, 圖上方的圓點代表該二次曲線的最大值, 其投影在水平軸上有一個對應的值; 圖 3.8 下方的圓點則是該曲線的最小值, 其在水平軸上亦有對應值。不論是開口向下或向上的反應曲面, 我們都可發現當隨機滑動因子實驗區間逐漸遠離反應變數期望值產生最大值或最小值的區域時, 反應曲面的曲率會漸漸的消失變得不明顯, 即反應曲面逐漸趨近於線性的, 所以二次效應將會不顯著。另外, 使得反應曲面的曲率最明顯的實驗區間, 則落在反應變數期望值產生極大或極小的滑動因子值附近, 在此實驗區間裡, 二次效應將會顯著, 而線性效應將不顯著。根據圖 3.4,

在本次模擬的設定中，真實滑動因子實驗區間被設定為包含反應變數期望值之極大值，然後再將其隨機化使之偏離真實實驗區間。因此，在我們的模擬設定中 $\hat{\beta}_{13}$ 與 $\hat{\beta}_{23}$ 將會是負相關的。

此外，模型 (3.16) 中以編碼的隨機滑動因子估計 $\beta_{03}$ 之估計式可寫成：

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{03} &= \bar{Y} - \hat{\beta}_{13} \left( \frac{\sum P_1^*(W^*)}{nk} \right) - \hat{\beta}_{23} \left( \frac{\sum P_2^*(W^*)}{nk} \right) \\ &= \bar{Y}\end{aligned}\quad (3.19)$$

其中 $k$ 為因子水平個數3, $n$ 為每個滑動因子水平之樣本數100。 $\sum P_1^*(W^*)$ 將會等於0，因為編碼值為 $-1, 0, +1$ ； $\sum P_2^*(W^*)$ 亦將為0，因為編碼值為 $1, -2, 1$ 。在模型 (3.14) 所設定的情況，反應曲面之開口向下。經由前部分的介紹可知，滑動因子若逐漸遠離反應變數期望值產生最大值的區域時，則線性效應將顯著，在此同時，反應變數值亦將偏小，根據式 (3.19) 可知截距參數估計亦將會偏小。因此， $\hat{\beta}_{03}$ 與 $\hat{\beta}_{13}$ 之間呈現負相關。又根據前部分的文章介紹可知，當二次效應顯著時，隨機滑動因子所在的區域能讓對應的反應變數值趨近於最大值，根據式 (3.19)，較大的反應變數值可獲得較大的截距項參數估計，故 $\hat{\beta}_{03}$ 與 $\hat{\beta}_{23}$ 之間呈現正相關。

在模擬的設定中，如圖 3.4 所示，真實實驗區間設定在曲率極為明顯的區域裡。若我們將真實實驗區間設定在曲率非常不明顯的區域，如同圖 3.5 中的實驗區間 5 或 7。則當實驗區間以微小的幅度變動時，隨機實驗區間所觀察到的斜率，曲率與反應變數期望值的變動將不會太大，因此參數估計的變異也將不會太大。若隨機實驗區間變動的幅度很大時，亦即區間中心與區間半長變異數變大，則斜率與曲率等等都將有很大的變動，而參數估計的變異會有變大的現象。

而對於參數估計間的相關性，則與前述的相同，當斜率變化明顯時，曲率則否；曲率變化明顯，斜率則否，因此 $\hat{\beta}_{13}$ 與 $\hat{\beta}_{23}$ 將呈現負相關。而 $\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23}$ 兩者與 $\hat{\beta}_{03}$ 之相關則與反應變數期望值的大小有關，在開口向下的模型中，反應變數期望值大的區域其曲率較為明顯，因此 $\hat{\beta}_{23}$ 與 $\hat{\beta}_{03}$ 呈正相關；反應變數期望值小的區域其斜率變化較為明顯，因此 $\hat{\beta}_{13}$ 與 $\hat{\beta}_{03}$ 呈現負相關。

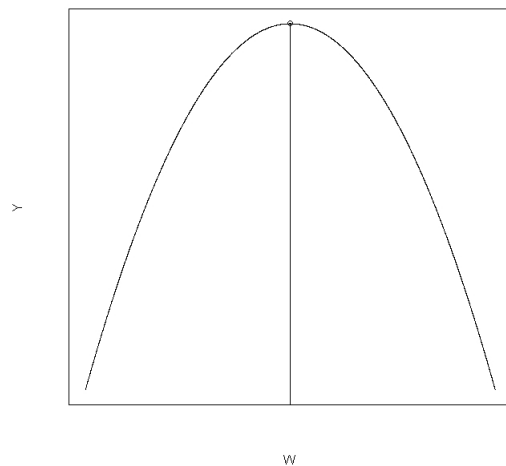


圖 3.7: 開口向下的二次曲線

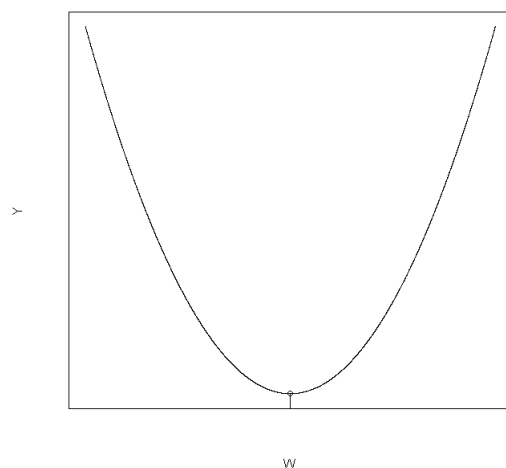


圖 3.8: 開口向上的二次曲線

### 3.2.2 模型二之模擬結果-未編碼的分析策略

表 (3.9) 中, 在任意的 $(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$ 設定值下, $\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14}$ 與 $\hat{\beta}_{24}$ 各約為 $-18, 2.13$ 與 $-0.026$ 。與真實模型參數 $20, 4, -2$ 之間存在很大的差異, 此為單位改變所造成的變化。以未編碼的隨機滑動因子估計參數, 則參數估計的單位是滑動因子的原始單位。以編碼的隨機滑動因子估計參數, 參數估計的單位將會是編碼值所代表的單位。

表 3.9: 未編碼的隨機滑動因子之參數平均數

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$\hat{\beta}_{04}$	$\hat{\beta}_{14}$	$\hat{\beta}_{24}$
(1,1)	-18.04594000	2.13638300	-0.02671252
(1,6)	-17.96276000	2.13081800	-0.02663003
(1,10)	-17.99585000	2.13322200	-0.02666443
(6,1)	-17.98914000	2.13209000	-0.02664218
(6,6)	-18.02144000	2.13427900	-0.02667119
(6,10)	-17.98577000	2.13272800	-0.02665966
(10,1)	-17.96212000	2.13088000	-0.02662999
(10,6)	-18.00139000	2.13343300	-0.02667069
(10,10)	-17.96101000	2.13110600	-0.02663968

表 3.10: 未編碼的隨機滑動因子之參數變異數

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$var(\hat{\beta}_{04})$	$var(\hat{\beta}_{14})$	$var(\hat{\beta}_{24})$
(1,1)	1.5689146200	0.0060757680	0.0000012130
(1,6)	1.9747699900	0.0075725090	0.0000015181
(1,10)	2.7283893400	0.0099541580	0.0000019756
(6,1)	1.5535723600	0.0058647660	0.0000011677
(6,6)	2.0363808300	0.0075813250	0.0000015255
(6,10)	2.7192173900	0.0097931340	0.0000019410
(10,1)	1.5994017400	0.0060922120	0.0000012342
(10,6)	2.3185225200	0.0082295320	0.0000016256
(10,10)	2.4937537900	0.0090761460	0.0000018208

表 3.11: 未編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$	$cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$	$cov(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24})$	$cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$	$cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$	$cor(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24})$
(1,1)	-0.09602317	0.00131804	-0.00008514	-0.98350324	0.95541180	-0.99169004
(1,6)	-0.12075653	0.00167361	-0.00010654	-0.98748948	0.96659227	-0.99370211
(1,10)	-0.16293450	0.00225051	-0.00013941	-0.98868422	0.96934531	-0.99415043
(6,1)	-0.09364690	0.00127383	-0.00008186	-0.98107524	0.94575160	-0.98919924
(6,6)	-0.12221575	0.00168207	-0.00010659	-0.98361491	0.95435676	-0.99117682
(6,10)	-0.16121394	0.00221784	-0.00013691	-0.98791545	0.96537095	-0.99302451
(10,1)	-0.09657218	0.00131810	-0.00008567	-0.97833081	0.93817046	-0.98803499
(10,6)	-0.13566780	0.00184011	-0.00011445	-0.98216297	0.94782077	-0.98953782
(10,10)	-0.14816277	0.00203510	-0.00012735	-0.98483069	0.95504754	-0.99062317

表 (3.10) 與 (3.11) 之數值計算法和前文所提相同, 故詳細之計算方式可參照前文所描述。經由 (3.10) 和 (3.11) 兩表, 我們可獲得以下資訊:

1. 表 (3.10) 中,  $var(\hat{\beta}_{04})$  約介於 1.55 和 2.72 之間;  $var(\hat{\beta}_{14})$  約介於 0.006 至 0.009;  $var(\hat{\beta}_{24})$  則大約介於 0.0000011 至 0.0000019 之間。而式 (3.18) 中, 以真實滑動因子估計所得的參數變異數,  $var(\hat{\beta}_0)$ ,  $var(\hat{\beta}_1)$  和  $var(\hat{\beta}_2)$  分別為 0.0133 與 0.02 以及 0.0067。我們可發現以隨機滑動因子所估計的參數, 只有截距項的參數估計之變異數 (介於 1.55 至 2.27) 大於真實滑動因子所估計的截距項參數之變異數 (0.0067)。若以未編碼的隨機滑動因子效應建模, 則模型 (3.17) 截距項參數的最小平方法之估計式可表達為

$$\hat{\beta}_{04} = \bar{Y} - \hat{\beta}_{14} \left( \frac{\sum W^*}{nk} \right) - \hat{\beta}_{24} \left( \frac{\sum (W^*)^2}{nk} \right) \quad (3.20)$$

其中  $k$  為因子水平個數 3,  $n$  為每個滑動因子水平之樣本數 100。  $\frac{\sum W^*}{nk}$  表示滑動因子的低中高水平之平均值, 其中低中高水分別為  $u^*$ ,  $m^*$  和  $v^*$ ;  $\frac{\sum (W^*)^2}{nk}$  則代表將三水平的值取平方後再取平均。而在式 (3.20) 中, 將實驗區間隨機化的隨機區間中心和隨機半長之變異將會透過  $W^*$  和  $(W^*)^2$  兩項對  $\hat{\beta}_{04}$  之變異數造成影響, 並使得變異數大於 0.0133, 即真實滑動因子所估計截距參數估計變異。此外, 線性效應之參數估計變異數和二次效應之參數估計變異數小於真實滑動因子所估計的參數變異數, 則是因為未編碼的隨機滑動因子所估計的參數, 其所代表的單位為  $y$  之單位除以滑動因子原始的單位, 而非編碼值所代表的單位, 所以  $\hat{\beta}_{04}$ ,  $\hat{\beta}_{14}$  與  $\hat{\beta}_{24}$  不論隨機滑動因子實驗區間如何變動, 都能有相同一致的單位。因此, 採用未編碼之參數估計的變異數, 其受到區間隨機性之影響, 將小於採用編碼策略之參數估計變異。

2. 給定  $\sigma_c^2 = 1$  時, 若  $\sigma_l^2$  等於 1, 6 與 10, 則  $var(\hat{\beta}_{04})$  分別為 1.6, 2 與 2.7;  $var(\hat{\beta}_{14})$  分別為 0.006, 0.008 與 0.01;  $var(\hat{\beta}_{24})$  分別為 0.0000012, 0.0000015 與 0.0000019, 而當  $\sigma_c^2$  等於 6 或 10 時,  $\sigma_l^2$  對參數估計之變異的影響略同。我們可看到隨著區間半長變異的上升,  $var(\hat{\beta}_{04})$ ,  $var(\hat{\beta}_{14})$  與  $var(\hat{\beta}_{24})$  皆有明顯遞增的現象, 其原因請參考 3.2.1 節第 4 點, 第 5 點以及第 6 點的敘述。除此之外, 區間中心的變異  $\sigma_c^2$  對於  $var(\hat{\beta}_{04})$ ,  $var(\hat{\beta}_{14})$  與  $var(\hat{\beta}_{24})$  的影響不如  $\sigma_l^2$  來的大, 其原因請參考 3.2.1 節中的第 4 點, 第 5 點和第 6 點。須注意的是, 表 (3.10) 的參數變異



幅度遠小於表 (3.7) 所展示的。採用編碼分析策略進行估計所得的參數之單位會隨著實驗區間的隨機性而有劇烈的改變, 而採用未編碼分析策略之參數估計, 由於單位的一致性使得參數估計對於實驗區間隨機化的影響較不敏感。

3. 表 (3.11) 中,  $cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$  約介於  $-0.16$  至  $-0.09$ ,  $cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$  約介於  $0.0013$  至  $0.0022$ ,  $cov(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24})$  介於  $-0.00008$  至  $-0.0001$ 。與表 (3.7) 相比, 表 (3.10) 裡所呈現的共變異數較低, 但相關係數卻呈現參數估計之間具有強烈的相關性。 $\hat{\beta}_{04}$  和  $\hat{\beta}_{14}$  間的相關係數  $cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$  約介於  $-0.98$  至  $-0.97$ ,  $cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$  介於  $0.93$  至  $0.96$ ,  $cor(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24})$  約介於  $-0.99$  至  $-0.98$ 。而關於截距項參數估計, 線性效應參數估計以及二次效應之參數估計之間的正負相關性, 請參見 3.2.1 節中關於第 7 點的解釋。除此之外, 參數估計間具有強烈的相關性, 這將會是未編碼滑動因子效應之間存在共線性以及區間隨機性的結果, 進而對估計參數造成的影響。



## 第 4 章

### 模擬結果的導證

在第三章，我們展示了利用經過編碼以及未經過編碼的隨機化滑動因子所產生的參數估計之變異數，共變異數以及參數估計之平均值。在第四章裡，我們將利用統計的手法對第三章的模擬結果進行導證。

#### 4.1 模型一

##### 4.1.1 編碼的隨機滑動因子

式(3.1) 假設真實的第二階段分析模型為

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$$

$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

$$\text{且 } cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \forall i \neq j$$

$W$ 為滑動因子，其真實實驗區間為 $[u, v]$ ,  $P_1(W)$ 為滑動因子的線性效應

$$P_1(W) = \frac{W - c}{l} \quad (4.1)$$

其中 $c$ 和 $l$ 表示真實滑動因子區間中心與半長。又根據模擬所產生的隨機滑動因子區間 $W^* = [u^*, v^*]$ 可知

$$c^* = \frac{u^* + v^*}{2} \sim N(c, \sigma_c^2)$$

$$l^* = \frac{v^* - u^*}{2} \sim LOGNOR(\mu_t, \sigma_t)$$

由於 $l^*$ 為對數常態分布, 故將其取對數可知其為常態分布。

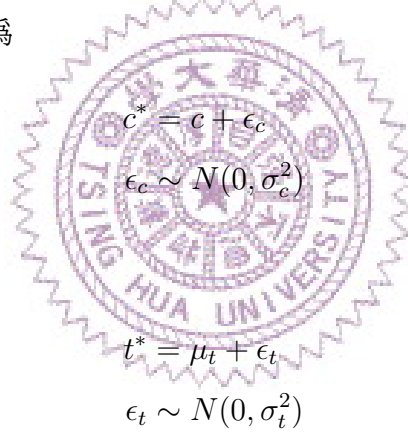
$$t^* = \log(l^*) \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$$

根據式 (3.4) 與 (3.5) 可知, $\mu_t, \sigma_t^2$ 為給定隨機區間半長 $l^*$ 期望值 $\mu_l$ 和變異數 $\sigma_l^2 = \text{var}(l^*)$ 所得的對數區間半長的期望值和變異數, 故

$$\sigma_t^2 = \log \left( \frac{\sigma_l^2}{\mu_l^2} + 1 \right)$$

$$\mu_t = \log(\mu_l) - 0.5 \times \log \left( \frac{\sigma_l^2}{\mu_l^2} + 1 \right)$$

而在第三章的模擬中, 生成隨機區間半長值的過程也是經由控制 $E(l^*)$ 和 $\text{var}(l^*)$ 完成的。此外, 為簡化推導過程中的符號表示我們將隨機滑動因子區間中心 $c^*$ 以及隨機對數區間半長 $t^*$ 表示為



$$c^* = c + \epsilon_c$$

$$\epsilon_c \sim N(0, \sigma_c^2)$$

$$t^* = \mu_t + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

以及

且隨機區間半長與隨機區間對數半長之間的關係為

$$l^* = \exp(t^*)$$

故隨機化的滑動因子區間上下界 $u^*$ 和 $v^*$ 為

$$u^* = c^* - l^* = c + \epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

$$v^* = c^* + l^* = c + \epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

則可知每次隨機生成的滑動因子區間上界 $u^*$ 以及下界 $v^*$ 所對應的反應變數值為

$$\begin{aligned} Y_{ui}^* &= \beta_0 + \beta_1 P_1(u^*) + \epsilon_{ui} = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{(c + \epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)) - c}{l} \right) + \epsilon_{ui} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{\epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)}{l} \right) + \epsilon_{ui} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} Y_{vi}^* &= \beta_0 + \beta_1 P_1(v^*) + \epsilon_{vi} = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{(c + \epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)) - c}{l} \right) + \epsilon_{vi} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{\epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)}{l} \right) + \epsilon_{vi}, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 $\epsilon_{ui}, \epsilon_{vi}$ 表實驗誤差, 且 $\epsilon_{ui}, \epsilon_{vi}$ 與區間中心與半長誤差 $\epsilon_c$ 以及 $\epsilon_t$ 之間假設為互相獨立。在第二章提到, 在配適第二階段模型的過程裡, 我們有兩種分析策略: 其一為將隨機生成的 $u^*$ 和 $v^*$ 利用隨機化的區間中心 $c^*$ 以及半長 $l^*$ 以正交多項式編碼, 因此有了正交多項式

$$P_1^*(W) = \frac{W - c^*}{l^*} \quad (4.4)$$

須注意, 式 (4.1) 的 $P_1(W)$ 與式 (4.4) 的 $P_1^*(W)$ 中, 用以編碼的分別是固定的 $c$ 與 $l$ 以及隨機的 $c^*$ 與 $l^*$ 。所以, 透過編碼的隨機滑動因子建立的模型為:

$$Y = \beta_{01} + \beta_{11} P_1^*(W) + \epsilon \quad (4.5)$$

利用 $P_1^*(W)$ 對 $u^*$ 和 $v^*$ 進行編碼, 可得模型矩陣 $\mathbf{M}_1$ :

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

其中 $\mathbf{M}_1$ 之維度為 $2n \times 2$ , 並將反應變數 $\mathbf{Y}$ 表為

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{u1}^* \\ \vdots \\ Y_{un}^* \\ Y_{v1}^* \\ \vdots \\ Y_{vn}^* \end{bmatrix}$$

則模型 (4.5) 中的參數之最小平方方法估計為

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\beta}_{11} \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_1' \mathbf{M}_1)^{-1} \mathbf{M}_1' \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \beta_0 + \frac{\beta_1}{l} \times \epsilon_c + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui})}{2n} \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \times e^{\epsilon_t} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

此即為編碼的隨機滑動因子所產生的參數估計。若將參數估計 $\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11}$ 取期望值可得

$$\begin{aligned} E \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\beta}_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_0 + \frac{\beta_1}{l} \times E(\epsilon_c) + E \left( \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui})}{2n} \right) \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \times E(e^{\epsilon_t}) + E \left( \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \times E(e^{\epsilon_t}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.7)$$

其中 $\approx$ 乃根據泰勒展式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.8)$$

所以在式 (4.7) 裡, 對 $e^{\epsilon_t}$ 展開至第1項並取期望值可得:

$$E(e^{\epsilon_t}) \approx E(1 + \epsilon_t) = 1$$

此外

$$l^* = e^{\mu_t + \epsilon_t} = e^{\mu_t} e^{\epsilon_t} \approx e^{\mu_t} \times (1 + \epsilon_t)$$

所以

$$E(l^*) \approx E(e^{\mu_t} \times (1 + \epsilon_t)) = e^{\mu_t}$$

即  $e^{\mu_t} \approx \mu_l$ , 故

$$E \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\beta}_{11} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \frac{\beta_1 \mu_l}{l} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

若  $\mu_l$  非常接近1或等於1, 即隨機區間半長之期望值  $\mu_l$  接近或等於真實區間半長, 則透過編碼的隨機滑動因子所得之參數估計期望值會與式 (3.1) 所假設的真實模型之參數  $\beta_0$  與  $\beta_1$  相當接近, 因此將具有接近不偏的性質。根據式 (3.1), 參數  $\beta_1$  代表每單位  $W$  編碼值的變動對於反應變數造成的改變, 而編碼值代表的滑動因子單位受區間半長影響, 當隨機區間半長差不多等於真實區間半長時, 則以隨機區間與真實區間估計  $\beta_1$ , 其單位不但相同, 且其所描述的反應變數變化亦相同, 因此將接近不偏估計。

接著, 將式 (4.6) 取變異數

$$\begin{aligned} cov \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\beta}_{11} \end{bmatrix} &= cov \begin{bmatrix} \beta_0 + \frac{\beta_1}{l} \times \epsilon_c + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui})}{2n} \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \times e^{\epsilon_t} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left( \frac{\beta_1}{l} \right)^2 \sigma_c^2 + \frac{\sigma^2}{2n} & 0 \\ 0 & \left( \frac{\beta_1 \exp(\mu_t)}{l} \right)^2 \sigma_t^2 + \frac{\sigma^2}{2n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中

$$\begin{aligned} var(\hat{\beta}_{11}) &= var\left(\frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \times e^{\epsilon_t} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n}\right) \\ &= \left(\frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l}\right)^2 var(e^{\epsilon_t}) + \frac{\sigma^2}{2n} \end{aligned}$$



利用式 (4.8) 對  $e^{\epsilon_t}$  展開至第 1 項並取期望值可得

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_{11}) &\approx \left( \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \right)^2 \text{var}(1 + \epsilon_t) + \frac{\sigma^2}{2n} \\ &= \left( \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \right)^2 \sigma_t^2 + \frac{\sigma^2}{2n} \end{aligned}$$

而  $\hat{\beta}_{01}$  與  $\hat{\beta}_{11}$  兩者之共變異數為

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= \text{cov}\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{l} \times \epsilon_c + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui})}{2n}, \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \times e^{\epsilon_t} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n}\right) \\ &= \text{cov}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui})}{2n}, \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n}\right) = 0 \end{aligned}$$

上式中結果的導出利用了各個誤差項之間所假設的獨立性質。

式 (4.10) 中, 我們可將共變異矩陣拆解為兩部分:

$$\begin{aligned} \text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{01} \\ \hat{\beta}_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left( \frac{\beta_1}{l} \right)^2 \sigma_c^2 + \frac{\sigma^2}{2n} & 0 \\ 0 & \left( \frac{\beta_1 \exp(\mu_t)}{l} \right)^2 \sigma_t^2 + \frac{\sigma^2}{2n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left( \frac{\beta_1}{l} \right)^2 \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & \left( \frac{\beta_1 \exp(\mu_t)}{l} \right)^2 \sigma_t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2n} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} \end{bmatrix} \quad (4.11) \end{aligned}$$

表示參數估計的變異主要是由滑動因子隨機化對於參數估計帶來的變異加上實驗誤差產生的參數估計之變異, 其中  $\sigma_t^2 = \log \left( \frac{\sigma_l^2}{\mu_l^2} + 1 \right)$ 。

若區間中心和半長的變異數  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_l^2$  皆等於 0,  $\sigma_t^2$  亦將等於 0。則式 (4.11) 中, 加號左方的矩陣將等於 0, 代表參數估計的變異數將只受到實驗誤差變異  $\sigma^2$  影響。此外, 當  $\sigma_c^2$ ,  $\sigma_l^2$  及  $\sigma_t^2$  皆為 0 時, 滑動因子實驗區間的隨機性已被去除, 此時滑動因子實驗區間即為真實的。

我們發現當真實滑動因子區間半長  $l$  增加時, 滑動因子隨機化對參數估計所造成的變異將會降低。想像我們有一個滑動因子區間, 而區間半長只有 5, 那麼當滑動因子隨機化, 開始以  $\sigma_c^2=1, \sigma_t^2=1$  的幅度在變動時, 其對應在模型 (3.1) 之反應區

面上的平均值相對於區間半長5將會產生大幅的變動。若假設區間半長為100, 那麼滑動因子以 $\sigma_c^2=1, \sigma_t^2=1$ 的幅度在變動時, 其平均值的變化則是有限的。因此, 在給定 $\sigma_c^2, \sigma_t^2$ 的狀況下, 區間半長 $l$ 越長, 則有利於降低參數估計之變異數。

由式 (4.9) 可知 $e^{\mu_t} \approx \mu_l$ , 即 $e^{\mu_t}$ 約可視為隨機區間半長的期望值 $\mu_l$ 。假設滑動因子 $W$ 有三個不同的隨機實驗區間, 其中心為固定值35, 而隨機區間半長則分別為5,15 以及 25, 所以三個隨機實驗區間為  $[30,40], [20,50]$ 和  $[10,60]$ 。此外, 假設一真實模型為

$$Y = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \epsilon$$

其中 $\beta_0 = 10, \beta_1 = 3, P_1(W)$ 為正交多項式。假設區間  $[30,40]$ 的反應變數期望值為9,11;  $[20,50]$ 的反應變數期望值為7,13;  $[10,60]$ 區間的反應變數期望值為5,15。採用編碼策略估計 $\beta_1$ , 則區間  $[30,40]$ 所得的參數估計 $\hat{\beta}_1$ 期望值為1; 區間  $[20,50]$ 所得 $\hat{\beta}_1$ 期望值為3; 區間  $[30,40]$ 所得之 $\hat{\beta}_1$ 期望值為5。在以上三種實驗區間裡, 當編碼值變動一單位時, 可知反應變數期望值將變動1,3,5單位。根據前文討論可知編碼值代表的單位受隨機區間半長影響, 在此例中, 三個實驗區間半長分別為5,15及25, 故可知, 若隨機實驗區間半長越長, 則編碼值所代表的滑動因子單位越大, 因此一單位編碼值的變動所描述的滑動因子變化越大, 其反應變數的變化也越大。因此可想像隨機區間半長越長, 則其估計出來的參數值會越大, 其變異的程度也會越大, 因此解釋 $e^{\mu_t}$ 對於 $var(\hat{\beta}_1)$ 之影響。

雖然真實區間半長 $l$ 對參數估計變異有如上的影響, 但真實區間中心 $c$ 卻未出現在式 (4.11) 裡。根據模型 (3.1), 滑動因子與反應變數之間的關係為一直線, 其斜率為 $\beta_1$ 。因此, 不論 $c$ 的值為何, 真實滑動因子區間或者隨機滑動因子區間裡所對應的反應區面之斜率都將保持不變。故可知真實區間中心 $c$ 不會對 $\hat{\beta}_1$ 之變異造成影響。但是, 當區間中心變化使隨機區間變動到反應變數值很高或很低的區域時, 將會使估計的截距項偏大或偏小。故可知, 區間中心變異的大小對截距項參數估計的變異有影響。

除了以上所提及的影響, 滑動因子的隨機性使得式 (3.1) 的真實模型之參數 $\beta_1$ 對參數估計變異數產生影響。並且當 $\beta_1$  越大或越小, 式 (4.11) 的變異數亦將會越大或越小。

#### 4.1.2 數值驗證-模型一之編碼策略

假設真實的模型為

$$Y = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \epsilon$$

其中 $\beta_0 = 20, \beta_1 = 4$ , 真實滑動因子實驗區間為 $[20, 50]$ , 故真實區間中心 $c = 35$ 及半長 $l = 15$ , 並且實驗誤差 $\epsilon$ 之變異數 $\sigma^2 = 4$ 。而 $\sigma_c^2, \sigma_l^2$ 之設定值如下:

表 4.1: 變異數 $\sigma_c^2$ 和 $\sigma_l^2$ 之設定

		$\sigma_l^2$		
		1	6	10
$\sigma_c^2$	1	(1,1)	(1,6)	(1,10)
	6	(6,1)	(6,6)	(6,10)
	10	(10,1)	(10,6)	(10,10)

且

$$\sigma_t^2 = \log\left(\frac{\sigma_l^2}{\mu_l^2} + 1\right)$$

$$\mu_t = \log(\mu_l) - 0.5 \times \log\left(\frac{\sigma_l^2}{\mu_l^2} + 1\right)$$

而 $\mu_l$ 表隨機滑動因子區間半長之期望值, 我們將其設定為15。因此, 將以上的設定值代入式 (4.7) 可得

表 4.2: 編碼的隨機滑動因子之參數期望值

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$E(\hat{\beta}_{01})$	$E(\hat{\beta}_{01})$
(1,1)	20	3.991141
(1,6)	20	3.947710
(1,10)	20	3.913968
(6,1)	20	3.991141
(6,6)	20	3.947710
(6,10)	20	3.913968
(10,1)	20	3.991141
(10,6)	20	3.947710
(10,10)	20	3.913968

與表 (3.2) 對照, 表 (4.2) 的  $E(\hat{\beta}_{01})$  與  $E(\hat{\beta}_{01})$  之理論值與模擬結果相符。此外, 式 (4.9) 指出, 若  $\frac{e^{\mu_t}}{l}$  很接近 1 的時候, 編碼的滑動因子所估計的參數將會有接近不偏的性質。而在我們的設定裡  $\sigma_l^2$  設定為 1, 6, 10,  $\mu_l$  設定為 15, 所以  $\mu_t$  趨近於  $\log(15)$ , 因此  $\frac{e^{\mu_t}}{l} \approx 1$ , 由於設定值滿足  $\frac{e^{\mu_t}}{l} \approx 1$  此條件之緣故, 故表 (4.2) 的  $E(\hat{\beta}_{01})$  與  $E(\hat{\beta}_{01})$  非常接近不偏。

將設定值代入式 (4.10) 可得

表 4.3: 編碼的隨機滑動因子之參數變異理論值

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$var(\hat{\beta}_{01})$	$var(\hat{\beta}_{11})$	$cov(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$	$cor(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$
(1,1)	0.09111111	0.0906396	0	0
(1,6)	0.09111111	0.4301399	0	0
(1,10)	0.09111111	0.6861549	0	0
(6,1)	0.44666670	0.0906396	0	0
(6,6)	0.44666670	0.4301399	0	0
(6,10)	0.44666670	0.6861549	0	0
(10,1)	0.73111110	0.0906396	0	0
(10,6)	0.73111110	0.4301399	0	0
(10,10)	0.73111110	0.6861549	0	0

由表 (4.3) 可觀察到  $var(\hat{\beta}_{01})$  隨著  $\sigma_c^2$  由 1 上升至 6 與 10, 分別為 0.09, 0.45, 以及 0.73;  $var(\hat{\beta}_{11})$  隨著  $\sigma_l^2$  由 1 上升至 6 與 10, 分別為 0.09, 0.43, 以及 0.68; 而共變異數及相關係數則為 0。與表 (3.3) 對照, 除了模擬造成的誤差外, 理論值  $var(\hat{\beta}_{01}), var(\hat{\beta}_{11}), cov(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$  與  $cor(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$  大致與模擬結果相符。

### 4.1.3 未編碼的隨機滑動因子

前小節4.1.1描述了編碼滑動因子分析策略對於參數估計之影響，本節將繼續另一個分析策略的討論與導證，即採用未編碼的滑動因子的分析策略。經由式 (3.1) 的模型可知

$$Y = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \epsilon$$

其中

$$P_1(W) = \frac{W - c}{l}$$

故

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{W - c}{l} \right) + \epsilon \\ &= \beta_0 - \frac{c}{l} \beta_1 + \frac{\beta_1}{l} W + \epsilon \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \beta_{02} &= \beta_0 - \frac{c}{l} \beta_1 \\ \beta_{12} &= \frac{\beta_1}{l} \end{aligned}$$

可得未編碼的滑動因子所建之模型為

$$Y = \beta_{02} + \beta_{12} W + \epsilon \quad (4.12)$$

欲估計模型 (4.12) 之參數，首先定義出模型矩陣 $\mathbf{M}_2$ ：

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & u^* \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u^* \\ 1 & v^* \\ \vdots & \vdots \\ 1 & v^* \end{bmatrix}$$

其中

$$u^* = c + \epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

$$v^* = c + \epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

故可得參數估計為:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} &= (\mathbf{M}_2' \mathbf{M}_2)^{-1} \mathbf{M}_2' \mathbf{Y} \\ &= \begin{bmatrix} \beta_0 - \frac{c}{l} \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{ui} + \epsilon_{vi})}{2n} - \frac{(c + \epsilon_c) \sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n \times e^{\mu_t + \epsilon_t}} \\ \frac{\beta_1}{l} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n \times e^{\mu_t + \epsilon_t}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

其中 $\mathbf{M}_2$ 之維度為 $2n \times 2$ ,  $\mathbf{Y}$ 值的定義如同式(4.2) 與 (4.3)。

對式 (4.13) 之參數估計取期望值可得:

$$\begin{aligned} E \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} &= EE \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) \\ &= E \begin{bmatrix} \beta_0 - \frac{c}{l} \beta_1 \\ \frac{\beta_1}{l} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta_0 - \frac{c}{l} \beta_1 \\ \frac{\beta_1}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{02} \\ \beta_{12} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

比較式 (4.14) 與式 (4.9) 兩式所得之期望值,(4.9) 中的估計量對於真實模型參數 $\beta_0$ 和 $\beta_1$ 是接近不偏的。由於解釋變數的單位改變, 使得參數估計之期望值產生變化, 因此式 (4.14) 中以未編碼策略估計而得的參數對於式 (4.12) 中的 $\beta_{02}$ 和 $\beta_{12}$ 是不偏的。須注意  $\beta_{02} = \beta_0 - \frac{c}{l} \beta_1$ 和 $\beta_{12} = \frac{\beta_1}{l}$ , 與真實模型參數 $\beta_0$ 和 $\beta_1$ 不同。在真實模型 (3.1) 中的設定裡, 若我們將滑動因子以 $P_1(W)$ 編碼之, 則滑動因子將被編碼為 $-1$ 與 $+1$ , 而一單位的編碼值的變化, 例如: 由 $-1$ 變為 $0$ , 其在滑動因子區間裡代表的是 $20$ 變為 $35$ , 即 $15$ 單位的滑動因子變化量, 而 $Y$ 之期望值將由 $16$ 變為



20, 即 $\beta_1$ 的變化。因此, 編碼分析策略所估計的參數, 其描述的是每單位編碼值的變化對於反應變數的影響。若分析者是以未編碼的滑動因子估計參數, 則其所代表的就是原始的滑動因子單位, 當滑動因子產生一單位的變化時, 反應變數之平均將改變 $\frac{\beta_1}{l}$ 。兩種參數估計之差異, 即由單位改變所造成。

對式 (4.9) 取變異數可得:

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} = \text{cov} E \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) + E \text{cov} \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right)$$

分別對上式中等號右方的兩部分求解, 則

$$\begin{aligned} \text{cov} E \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) &= \text{cov} \begin{bmatrix} \beta_0 - \frac{c}{l} \beta_1 \\ \frac{\beta_1}{l} \end{bmatrix} = 0 \\ E \text{cov} \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) &= E \left[ \begin{array}{cc} \frac{\sigma^2}{2n} + \frac{c^2 \sigma^2}{e^{2\mu_t + 2\epsilon_t} 2n} + \frac{\epsilon_c^2 \sigma^2}{e^{2\mu_t + 2\epsilon_t} 2n} & -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t + 2\epsilon_t} 2n} - \frac{\epsilon_c \sigma^2}{e^{2\mu_t + 2\epsilon_t} 2n} \\ -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t + 2\epsilon_t} 2n} - \frac{\epsilon_c \sigma^2}{e^{2\mu_t + 2\epsilon_t} 2n} & \frac{\sigma^2}{e^{2\mu_t + 2\epsilon_t} 2n} \end{array} \right] \\ &\approx \left[ \begin{array}{cc} \frac{\sigma^2}{2n} + \frac{c^2 \sigma^2}{e^{2\mu_t} 2n} + \frac{\sigma_c^2 \sigma^2}{e^{2\mu_t} 2n} & -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t} 2n} \\ -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t} 2n} & \frac{\sigma^2}{e^{2\mu_t} 2n} \end{array} \right] \end{aligned}$$

上式中 $\approx$ 的導出過程用到式 (4.8) 對 $e^{-2\epsilon_t}$ 展開至第一項:

$$\frac{1}{e^{2\epsilon_t}} = e^{-2\epsilon_t} \approx 1 - 2\epsilon_t$$

故

$$E(e^{-2\epsilon_t}) \approx 1 - 2E(\epsilon_t) = 1$$

所以

$$\begin{aligned}
\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{02} \\ \hat{\beta}_{12} \end{bmatrix} &\approx \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2n} + \frac{c^2\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} + \frac{\sigma_c^2\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} & -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} \\ -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} & \frac{\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2n} \left( 1 + \frac{c^2}{e^{2\mu_t}} + \frac{\sigma_c^2}{e^{2\mu_t}} \right) & -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} \\ -\frac{c\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} & \frac{\sigma^2}{e^{2\mu_t}2n} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\sigma^2}{2n} \begin{bmatrix} \left( 1 + \frac{c^2}{e^{2\mu_t}} + \frac{\sigma_c^2}{e^{2\mu_t}} \right) & -\frac{c}{e^{2\mu_t}} \\ -\frac{c}{e^{2\mu_t}} & \frac{1}{e^{2\mu_t}} \end{bmatrix} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

根據式 (4.9), 式 (4.15) 中的  $e^{\mu_t}$  大約可視為隨機滑動因子區間半長  $l^*$  之期望值  $\mu_l$ 。而共變異矩陣裡的變異數與共變異數值顯示, 當隨機區間半長之期望值遞增時, 參數估計的變異數與共變異數將會變小。

根據 2.2.3 節的描述可知, 參數估計的單位為反應變數  $Y$  的單位除以解釋變數的單位, 若採行未編碼的分析策略, 則解釋變數之單位即為滑動因子  $W$  的原始單位。所以利用未編碼的隨機滑動因子估計的參數其單位是固定的, 不隨著隨機實驗區間變動而有變化。因此, 當  $\mu_l$  增加時, 較能夠準確觀察  $\beta_{02}$  與  $\beta_{12}$  的變化, 進而降低參數估計之變異。而在式 (4.11) 中,  $e^{\mu_t}$  之影響則是相反的, 若隨機區間半長之期望值  $\mu_l$  越大, 參數估計的變異數越大, 此現象是因為式 (4.13) 中的參數估計代表每單位編碼值的變化對反應曲面造成的影響。若採用編碼分析策略, 則解釋變數之單位為編碼值的單位, 而編碼值的單位會隨著隨機滑動因子區間變動, 故可知式 (4.6) 中實際估計的參數  $\beta_{01}$  和  $\beta_{11}$  會隨著區間變動而改變, 而隨機性對於參數估計所造成的變異則展示在式 (4.11)。相較之下, 由於單位固定之緣故, 式 (4.13) 中欲估計的參數  $\beta_{02}$  和  $\beta_{12}$  不隨著區間變動而改變。

與式 (4.10) 相比, 式 (4.15) 不受真實模型參數  $\beta_1$  的影響, 而式 (4.10) 卻受到影響。此現象的成因, 與上一段所提到的單位變化相同, 每當隨機滑動因子區間變動時, 若以編碼的方式估計參數, 則參數的單位將隨滑動因子區間變動而變動。反之, 若以未編碼的方式估計參數, 則參數的單位將不會隨滑動因子區間變動。所以每單位編碼值的變動, 由於隨機性的關係, 對反應變數的影響不同。因此式 (4.10)

會受到真實模型參數的影響，而式 (4.15) 則否。

對於 $var(\hat{\beta}_{02})$ ，當區間中心之變異數和真實滑動因子區間中心值 $c$ 越小，則模型截距項之變異數將會越小。考慮模型 (4.12)，我們可將 $\beta_{02}$ 視為給定滑動因子 $W = 0$ 的反應變數期望值，而對於任意一個滑動因子實驗區間 $[u, v]$ ，若其上下界皆同時大於0或小於0，則可想像 $W = 0$ 對於實驗區間 $[u, v]$ 是一個外差點。圖 4.1 標示出 $W = 0$ 與其對應在模型 (4.12) 上的點，由圖可見，實驗區間 1 與實驗區間 2 皆不包含 $W = 0$ 的點，故該點為外差點。因此在給定隨機區間半長期望值 $e^{2\mu_t}$ 的情況下，截距項參數估計之變異數 $var(\hat{\beta}_{02})$ 將隨區間中心 $c$ 以及區間中心變異 $\sigma_c^2$ 增加而上升。

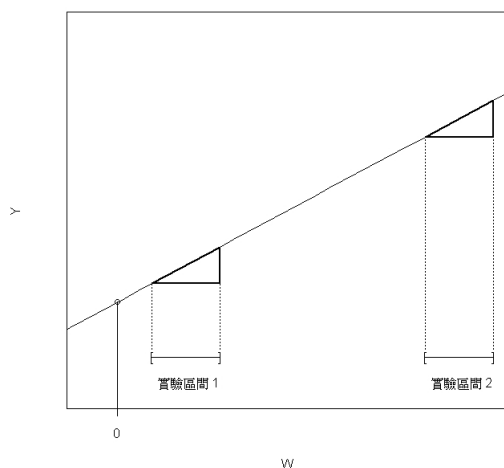


圖 4.1: 區間中心變動，區間半長固定

式 (4.15) 中, $cov(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 不等於0，但在式 (4.11) 中 $cov(\hat{\beta}_{01}, \hat{\beta}_{11})$ 為0。兩者的差異，則體現了兩種將滑動因子編碼以及未編碼的分析策略之不同，正交性使得 $\hat{\beta}_{01}$ 與 $\hat{\beta}_{11}$ 之間互不相關。

#### 4.1.4 數值驗證-模型一之未編碼策略

將4.1.2節中所列的設定值代入式 (4.14) 可得 $E(\hat{\beta}_{02}) = 10.6667, E(\hat{\beta}_{12}) = 0.2667$ , 將此兩值與表 (3.4) 比較可知模擬結果與參數估計期望值兩結果相符。

將設定值代入式 (4.15) 可得

表 4.4: 未編碼的隨機滑動因子之參數變異理論值

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$var(\hat{\beta}_{02})$	$var(\hat{\beta}_{12})$	$cov(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$	$cor(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$
(1,1)	0.1294621000	0.0000892840	-0.0031249380	-0.9191436342
(1,6)	0.1318839000	0.0000912593	-0.0031940740	-0.9206840331
(1,10)	0.1338212000	0.0000928395	-0.0032493830	-0.9218750211
(6,1)	0.1299085000	0.0000892840	-0.0031249380	-0.9175630647
(6,6)	0.1323401000	0.0000912593	-0.0031940740	-0.9190957819
(6,10)	0.1342854000	0.0000928395	-0.0032493830	-0.9202802653
(10,1)	0.1302657000	0.0000892840	-0.0031249380	-0.9163041819
(10,1)	0.1327052000	0.0000912593	-0.0031940740	-0.9178305979
(10,10)	0.1346568000	0.0000928395	-0.0032493830	-0.9190102660

與表 (3.5) 相比, 表 (4.4) 中的各項理論值 $var(\hat{\beta}_{02}), var(\hat{\beta}_{12}), cov(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 以及  $cor(\hat{\beta}_{02}, \hat{\beta}_{12})$ 與模擬結果相符。

## 4.2 模型二

### 4.2.1 編碼的隨機滑動因子

式(3.14) 中, 假設真實的二次效應模型:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \beta_2 P_2(W) + \epsilon$$

其中 $W$ 為真實滑動因子區間, $P_2(W)$ 為滑動因子所產生的二次效應, 且

$$P_1(W) = \frac{W - c}{l} \quad (4.16)$$

$$P_2(W) = 3 \left( \frac{W - c}{l} \right)^2 - 2 \quad (4.17)$$

利用模擬生成的隨機滑動因子區間 $W^*$ 的低, 中, 高三水平各為

$$u^* = c + \epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

$$m^* = c + \epsilon_c$$

$$v^* = c + \epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

故三水平所產生的反應變數值為

$$\begin{aligned} Y_{ui}^* &= \beta_0 + \beta_1 P_1(u^*) + \beta_2 P_2(u^*) + \epsilon_{ui} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{\epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)}{l} \right) + \beta_2 \left( 3 \left( \frac{\epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)}{l} \right)^2 - 2 \right) + \epsilon_{ui} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} Y_{mi}^* &= \beta_0 + \beta_1 P_1(m^*) + \beta_2 P_2(m^*) + \epsilon_{mi} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{\epsilon_c}{l} \right) + \beta_2 \left( 3 \left( \frac{\epsilon_c}{l} \right)^2 - 2 \right) + \epsilon_{mi} \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} Y_{vi}^* &= \beta_0 + \beta_1 P_1(v^*) + \beta_2 P_2(v^*) + \epsilon_{vi} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{\epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)}{l} \right) + \beta_2 \left( 3 \left( \frac{\epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)}{l} \right)^2 - 2 \right) + \epsilon_{vi} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$i = 1, \dots, n$$

與前文4.1.1節相同, 我們將採用編碼的策略, 以編碼的滑動因子建立模型, 即

$$Y = \beta_{03} + \beta_{13} P_1^*(W) + \beta_{23} P_2^*(W) + \epsilon \quad (4.21)$$

其中

$$P_1^*(W) = \frac{W - c^*}{l^*} \quad (4.22)$$

$$P_2^*(W) = 3 \left( \frac{W - c^*}{l^*} \right)^2 - 2 \quad (4.23)$$

為反應隨機滑動因子的線性效應及二次效應的變化, 式 (4.16) 和 (4.17) 是利用真實區間中心 $c$ 與半長 $l$ 進行編碼, 而式 (4.22) 與 (4.23) 是利用隨機區間中心 $c^*$ 與半

長 $l^*$ 進行編碼。以 $P_1^*(W)$  和 $P_2^*(W)$ 便可得模型 (4.21) 之模型矩陣 $\mathbf{M}_3$

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_3$ 之維度為 $3n \times 3$ , 反應變數矩陣 $\mathbf{Y}$ 則是利用式(4.18) 至 (4.20) 建立。所以, 模型 (4.21) 之參數估計式為:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} = (\mathbf{M}_3' \mathbf{M}_3)^{-1} \mathbf{M}_3' \mathbf{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_2 + \frac{2\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} e^{2\epsilon_t} + \frac{\beta_1 \epsilon_c}{l} + \frac{3\beta_2 \epsilon_c^2}{l^2} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{ui} + \epsilon_{mi} + \epsilon_{vi})}{3n} \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} e^{\epsilon_t} + \frac{6\beta_2 e^{\mu_t} \epsilon_c}{l^2} e^{\epsilon_t} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n} \\ \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} e^{2\epsilon_t} + \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui} - 2\epsilon_{mi})}{6n} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$



對式 (4.15) 取期望值

$$\begin{aligned}
E \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} &= E E \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) \\
&= E \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_2 + \frac{2\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} e^{2\epsilon_t} + \frac{\beta_1 \epsilon_c}{l} + \frac{3\beta_2 \epsilon_c^2}{l^2} \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} e^{\epsilon_t} + \frac{6\beta_2 e^{\mu_t} \epsilon_c}{l^2} e^{\epsilon_t} \\ \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} e^{2\epsilon_t} \end{bmatrix} \\
&\approx \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_2 + \frac{2\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} + \frac{3\beta_2 \sigma_c^2}{l^2} \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \\ \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

上式中,  $E(\epsilon_c^2) = \sigma_c^2$ , ” $\approx$ ” 乃根據式 (4.8) 的關係對  $e^{\epsilon_t}$  以及  $e^{2\epsilon_t}$  展開至第一項。由式 (4.9) 可知,  $e^{\mu_t}$  約可視為隨機區間半長  $l^*$  之期望值  $\mu_l$ , 而  $\mu_l$  根據第三章模擬的設定, 即等於真實區間半長  $l$ 。故若  $\frac{e^{\mu_t}}{l} \approx 1$ , 則式 (4.25) 可進一步化簡為

$$E \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \beta_0 + \frac{3\beta_2 \sigma_c^2}{l^2} \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

在以上推導中, 若  $\frac{e^{\mu_t}}{l} \approx 1$  則代表真實區間半長  $l$  與隨機區間半長之期望值  $e^{\mu_t}$  幾乎相等, 若再加上隨機區間中心  $c^*$  的期望值與真實區間中心  $c$  相等的條件, 則可知隨機實驗區間的平均與真實區間會差不多相等, 因此參數估計將很接近不偏。又根據前文可知, 以編碼策略估計的參數其單位受到隨機區間半長  $l^*$  影響, 若將  $l^*$  視為固定則其單位亦為固定的, 因此在 (4.26) 中,  $\hat{\beta}_{13}$  與  $\hat{\beta}_{23}$  趨近於不偏估計。

與式 (4.7) 相比, 在只具有線性效應的模型 (4.5) 中, 其參數估計期望值只受到真實區間半長 $l$ 或是隨機區間半長之期望值 $e^{\mu}$ 的影響, 但在具有二次效應的模型中, 參數估計值會受到反應曲面的切線斜率變化 $\beta_2$ 與區間中心變異 $\sigma_c^2$ 影響, 而 $\beta_2$ 的改變在線性效應模型裡是不存在的。因此參數估計值受到的影響在具有不同效應的模型中是不一樣的。

在式 (4.26) 中,  $\hat{\beta}_{13}$ 和 $\hat{\beta}_{23}$ 大致上可視為不偏估計量。 $\hat{\beta}_{03}$ 則不然, 我們可看到  $\hat{\beta}_{03}$ 之期望值中包含 $\beta_0$ 和 $\frac{3\beta_2\sigma_c^2}{l^2}$ 兩部分, 後者受到了真實滑動因子區間半長 $l$ 以及區間中心變異數 $\sigma_c^2$ 影響。當區間中心之變異數越小, 以及區間半長越長, 則 $\frac{3\beta_2\sigma_c^2}{l^2}$ 將會趨近於0, 使得 $\hat{\beta}_{03}$ 趨近於不偏估計量。對於 $\frac{3\beta_2\sigma_c^2}{l^2}$ , 我們可解釋為:

1.  $\sigma_c^2$ 之影響: 4.1.2小節提到, 估計截距參數可視為對滑動因子 $W$ 等於0進行反應變數的預測, 若採用未編碼的策略估計參數, 則由於區間 $[u, v]$ 不包含0點, 故等同對外插點進行預測。採行編碼策略估計參數, 以 $P_1^*(W)$ 和 $P_2^*(W)$ 將滑動因子編碼之, 故截距參數將變為對 $P_1^*(W)$ 為0的點進行反應變數的預測, 而 $P_1^*(W) = 0$ 即落在編碼實驗區間內, 故等同對內差點進行預測。

圖 4.2 中, 我們標示出實驗區間 5.6 和 7, 而圖中的曲線即為模型 (4.21)。須注意, 圖 4.2 與圖 3.5 完全相同, 但圖 4.2 中我們另外標示出實驗區間 5.6 與 7 的區間中心, 以及區間中心對應在模型上的點。根據前段所提, 採用編碼策略估計參數, 截距參數即預測 $P_1^*(W) = 0$ 之反應變數期望值, 欲使等式 $P_1^*(W) = 0$ 成立, 可知 $W$ 為區間中心。由圖 4.2 可知, 不同的區間其區間中心將會改變, 因此使得反應變數期望值產生變化。故式 (4.26) 中, 隨機區間中心變異 $\sigma_c^2$ 越小, 將使 $\hat{\beta}_{03}$ 越趨近不偏。

2. 真實區間半長 $l$ 之影響: 給定區間中心變異 $\sigma_c^2$ , 區間半長 $l$ 越長, 則代表實驗區間所涵蓋的範圍越長, 而較寬的實驗區間所觀察到的反應曲面範圍也較廣。考慮兩個真實滑動因子區間, 其區間半長等於 1 以及 100, 若區間中心產生變動, 則可預期半長為 1 的區間所觀察到的截距變化將會與原先的真實區間有很大的差異。但在半長為 100 的區間裡, 區間中心變動對於觀察到的截距變化所造成的影響將會較小, 因為隨機化的區間很有可能會與真實區間重疊。所以在較寬的滑動因子區間裡, 切線斜率的變化較能顯示反應曲面的變化。

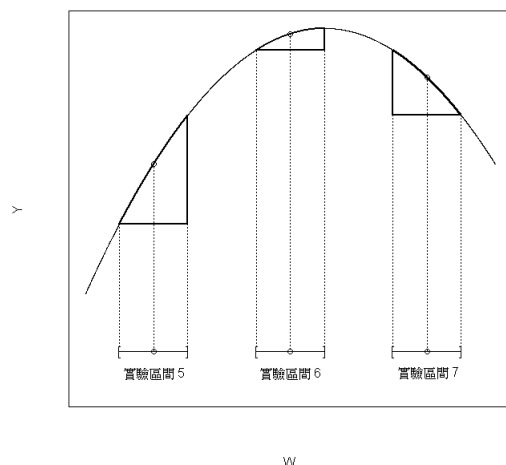


圖 4.2: 區間中心改變, 區間半長固定

3. 二次效應參數 $\beta_2$ 之影響: 圖 4.3 展示兩個模型, 圖中的實線表模型一:

$$Y = 20 + 4P_1(W) - 2P_2(W) + \epsilon$$

其二次效應設定為 $-2$ 。虛線表模型二:

$$Y = 20 + 4P_1(W) - 5P_2(W) + \epsilon$$

模型二的二次效應我們將其設定為 $-5$ , 相較於模型一的曲率變化, 模型二的曲率變化大於模型一。故可知, 當 $\beta_2$ 設定為負值時, 若 $\beta_2$ 越小, 則模型的曲率變化將越大, 使得滑動因子的細微變化對反應變數造成莫大的改變, 進而影響截距參數估計之變異; 反之, 若 $\beta_2$ 設定為正, 則曲率變化將隨 $\beta_2$ 值越大而越趨劇烈。因此在式 (4.26) 中, 當 $\beta_2$ 趨近於 $0$ 時, 曲率的影響將越來越小, 對反應變數的影響亦同, 因而使得截距參數估計趨近不偏。

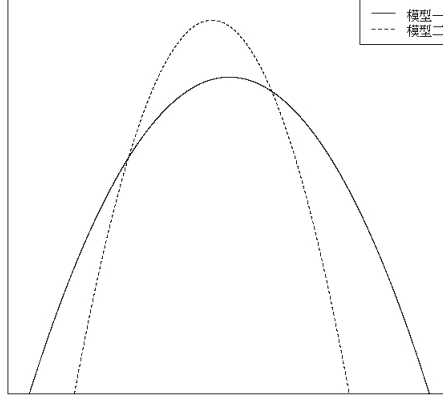


圖 4.3: 二次效應對模型之影響

對式 (4.24) 取變異數可得:

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} = \text{cov} E \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) + E \text{cov} \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right)$$

對等式右方的兩個部分求解得:

$$\begin{aligned} E \text{cov} \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) &= E \text{cov} \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{ui} + \epsilon_{mi} + \epsilon_{vi})}{3n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui} - 2\epsilon_{mi})}{6n} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{3n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma^2}{6n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
& cov E \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) \\
&= \begin{bmatrix} var(E(\hat{\beta}_{03}|\epsilon_c, \epsilon_t)) & cov(E(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}|\epsilon_c, \epsilon_t)) & cov(E(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23}|\epsilon_c, \epsilon_t)) \\ cov(E(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{03}|\epsilon_c, \epsilon_t)) & var(E(\hat{\beta}_{13}|\epsilon_c, \epsilon_t)) & cov(E(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23}|\epsilon_c, \epsilon_t)) \\ cov(E(\hat{\beta}_{23}, \hat{\beta}_{03}|\epsilon_c, \epsilon_t)) & cov(E(\hat{\beta}_{23}, \hat{\beta}_{13}|\epsilon_c, \epsilon_t)) & var(E(\hat{\beta}_{23}|\epsilon_c, \epsilon_t)) \end{bmatrix} \\
&= cov \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_2 + \frac{2\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} e^{2\epsilon_t} + \frac{\beta_1 \epsilon_c}{l} + \frac{3\beta_2 \epsilon_c^2}{l^2} \\ \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} e^{\epsilon_t} + \frac{6\beta_2 e^{\mu_t} \epsilon_c}{l^2} e^{\epsilon_t} \\ \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} e^{2\epsilon_t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

根據式 (4.8), 對  $e^{\mu_t}$  與  $e^{2\mu_t}$  展開至第二項, 可得

$$\begin{aligned}
var(E(\hat{\beta}_{03}|\epsilon_c, \epsilon_t)) &\approx 4 \left( \frac{2\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_t^2 + \left( \frac{\beta_1}{l} \right)^2 \sigma_c^2 + 2 \left( \frac{3\beta_2}{l^2} \right)^2 \sigma_c^4 \\
var(E(\hat{\beta}_{13}|\epsilon_c, \epsilon_t)) &\approx \left( \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \right)^2 \sigma_t^2 + \left( \frac{6\beta_2 e^{\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_c^2 \\
var(E(\hat{\beta}_{23}|\epsilon_c, \epsilon_t)) &\approx 4 \left( \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_t^2
\end{aligned}$$

接著, 共變異數為:

$$\begin{aligned}
cov(E(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}|\epsilon_c, \epsilon_t)) &= cov\left(\frac{2\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} e^{2\epsilon_t}, \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} e^{\epsilon_t}\right) + cov\left(\frac{\beta_1 \epsilon_c}{l}, \frac{6\beta_2 e^{\mu_t} \epsilon_c}{l^2} e^{\epsilon_t}\right) \\
&= \left( \frac{2\beta_1 \beta_2 e^{3\mu_t}}{l^3} \right) cov(e^{2\epsilon_t}, e^{\epsilon_t}) + \left( \frac{6\beta_1 \beta_2 e^{\mu_t}}{l^3} \right) cov(\epsilon_c, \epsilon_c e^{\epsilon_t}) \\
&= \left( \frac{2\beta_1 \beta_2 e^{3\mu_t}}{l^3} \right) (E(e^{3\epsilon_t}) - E(e^{\epsilon_t})E(e^{2\epsilon_t})) \\
&\quad + \left( \frac{6\beta_1 \beta_2 e^{\mu_t}}{l^3} \right) E(\epsilon_c^2 e^{\epsilon_t})
\end{aligned}$$

同樣地,  $\approx$  乃因式 (4.8) 對  $e^{\mu_t}$ ,  $e^{2\mu_t}$  和  $e^{3\mu_t}$  分別展開至第二項並取期望值, 可解出

$$\begin{aligned} cov(E(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13} | \epsilon_c, \epsilon_t)) &\approx \left( \frac{2\beta_1\beta_2 e^{3\mu_t}}{l^3} \right) \left[ \left( 1 + \frac{9\sigma_t^2}{2} \right) - \left( 1 + \frac{\sigma_t^2}{2} \right) (1 + 2\sigma_t^2) \right] \\ &\quad + \left( \frac{6\beta_1\beta_2 e^{\mu_t}}{l^3} \right) \sigma_c^2 \\ cov(E(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23} | \epsilon_c, \epsilon_t)) &= 2 \left( \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 var(e^{2\epsilon_t}) \approx 8 \left( \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_t^2 \\ cov(E(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23} | \epsilon_c, \epsilon_t)) &= \left( \frac{\beta_1\beta_2 e^{3\mu_t}}{l^3} \right) cov(e^{2\epsilon_t}, e^{\epsilon_t}) \\ &\approx \left( \frac{\beta_1\beta_2 e^{3\mu_t}}{l^3} \right) \left[ \left( 1 + \frac{9\sigma_t^2}{2} \right) - \left( 1 + \frac{\sigma_t^2}{2} \right) (1 + 2\sigma_t^2) \right] \end{aligned}$$

所以, 式 (4.15) 的參數估計之共變異數矩陣為

$$\begin{aligned} cov \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} var(\hat{\beta}_{03}) & cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}) & cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23}) \\ cov(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{03}) & var(\hat{\beta}_{13}) & cov(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23}) \\ cov(\hat{\beta}_{23}, \hat{\beta}_{03}) & cov(\hat{\beta}_{23}, \hat{\beta}_{13}) & var(\hat{\beta}_{23}) \end{bmatrix} \quad (4.27) \\ var(\hat{\beta}_{03}) &\approx 4 \left( \frac{2\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_t^2 + \left( \frac{\beta_1}{l} \right)^2 \sigma_c^2 + 2 \left( \frac{3\beta_2}{l^2} \right)^2 \sigma_c^4 + \frac{\sigma^2}{3n} \\ var(\hat{\beta}_{13}) &\approx \left( \frac{\beta_1 e^{\mu_t}}{l} \right)^2 \sigma_t^2 + \left( \frac{6\beta_2 e^{\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_c^2 + \frac{\sigma^2}{2n} \\ var(\hat{\beta}_{23}) &\approx 4 \left( \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_t^2 + \frac{\sigma^2}{6n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}) &\approx \left( \frac{2\beta_1\beta_2 e^{3\mu_t}}{l^3} \right) \left[ \left( 1 + \frac{9\sigma_t^2}{2} \right) - \left( 1 + \frac{\sigma_t^2}{2} \right) (1 + 2\sigma_t^2) \right] \\ &\quad + \left( \frac{6\beta_1\beta_2 e^{\mu_t}}{l^3} \right) \sigma_c^2 \\ cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23}) &= 2 \left( \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 var(e^{2\epsilon_t}) \approx 8 \left( \frac{\beta_2 e^{2\mu_t}}{l^2} \right)^2 \sigma_t^2 \\ cov(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23}) &\approx \left( \frac{\beta_1\beta_2 e^{3\mu_t}}{l^3} \right) \left[ \left( 1 + \frac{9\sigma_t^2}{2} \right) - \left( 1 + \frac{\sigma_t^2}{2} \right) (1 + 2\sigma_t^2) \right] \end{aligned}$$

式 (4.27) 中, 若將實驗區間視為固定的, 即去除  $\sigma_c^2$  與  $\sigma_l^2$  以及  $e^{\mu_t}$ , 則參數估計之變異將只受到實驗誤差的變異  $\sigma^2$  影響。即

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{03} \\ \hat{\beta}_{13} \\ \hat{\beta}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{3n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma^2}{2n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma^2}{6n} \end{bmatrix}$$

在式 (4.10) 中, 模型的參數之共變異數為 0, 但式 (4.27) 裡的三個共變異數則不為 0, 其原因在於模型中的二次效應, 每當滑動因子區間中心  $c^*$  或者是半長  $l^*$  產生變動, 使得滑動因子區間偏移真實區間, 區間變動所產生的改變都將透過滑動因子的二次效應對反應變數值造成變化。因為在不同的實驗區間裡所觀察到的曲率變化不盡相同, 因此將影響到線性效應以及二次效應, 所以在式 (4.24) 中, 由於區間隨機化的關係三個模型參數的估計式裡都包含了隨機區間中心和半長的所產生的誤差  $\epsilon_c$  和  $\epsilon_t$ , 而使得三個參數之間產生了共變異數。

觀察式 (4.27) 可發現, 變異數以及共變異數皆受到  $l$  和  $e^{\mu_t}$  影響。如同 4.1.1 所描述的, 若真實滑動因子實驗區間的區間半長  $l$  越長, 那麼滑動因子隨機化對於區間變動的影響將會越來越小。 $e^{\mu_t}$  約可視為隨機區間半長  $l^*$  之期望值  $\mu_l$ , 採用編碼策略下, 如同前文所述, 參數的單位受到區間半長影響, 故當隨機區間半長之期望值越大, 將使得參數的單位之變動範圍變大, 所以滑動因子隨機化對於區間變動造成的變異將會越來越大。

對於  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_t^2$  兩項, 在給定真實區間中心  $c$  和半長  $l$  下, 若滑動因子變動的幅度小, 即  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_t^2$  越小, 則隨機實驗區間內所觀察到的斜率  $\beta_1$  與曲率  $\beta_2$  將不會與真實實驗區間有太大的差距, 因此  $\text{var}(\hat{\beta}_{13})$  與  $\text{var}(\hat{\beta}_{23})$  亦將不會太大。反之, 若滑動因子變動的幅度越大, 即  $\sigma_c^2$  和  $\sigma_t^2$  越大, 則隨機區間所觀察到的斜率與曲率將與真實實驗區間所觀察到的有很大的差異, 故  $\text{var}(\hat{\beta}_{13})$  與  $\hat{\beta}_{23}$  將大增。

除了以上所提及的, 變異數矩陣還受到真實模型中的參數  $\beta_1$  以及  $\beta_2$  影響。當  $\beta_1$  以及  $\beta_2$  為不同的值時, 在實驗區間裡所觀察到的斜率與曲率的變化亦將會不同所以  $\hat{\beta}_{03}$ ,  $\hat{\beta}_{13}$ ,  $\hat{\beta}_{23}$  也將受到變化。其中  $\text{var}(\hat{\beta}_{23})$  受到  $\beta_2$  影響, 可解釋為真實模型之切線斜率將影響編碼滑動因子之模型的切線斜率。在二次模型裡, 我們可發現不論實驗區間設置於何處, 反應曲面的變化將受切線斜率變化量  $\beta_2$  的影響, 而不像式 (3.1) 的



一次模型所構成的反應曲面, 只是一條斜率為 $\beta_1$ 的直線, 反應曲面的變化不會受到切線斜率變化量影響。所以, $\hat{\beta}_{13}$ 之變異數, 除了受到 $\beta_1$ 影響, 還受到 $\beta_2$ 的影響。而相同的解釋, 對於 $\hat{\beta}_{03}$ 之變異數亦成立, 反應變數值在二次模型裡將同時受到 $\beta_1$ 以及 $\beta_2$ 影響, 所以 $\hat{\beta}_{03}$ 之變異亦將受到兩者影響。

#### 4.2.2 數值驗證-模型二之編碼策略

假設真實的模型為

$$Y = \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \beta_2 P_2(W) + \epsilon$$

其中 $\beta_0 = 20, \beta_1 = 4, \beta_2 = -2$ , 其餘設定值與模型一相同。將設定值代入式 (4.25) 可得

表 4.5: 編碼的隨機滑動因子之參數期望值

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$E(\hat{\beta}_{03})$	$E(\hat{\beta}_{13})$	$E(\hat{\beta}_{23})$
(1,1)	19.991030	3.991141	-1.991150
(1,6)	20.077230	3.947710	-1.948052
(1,10)	20.143550	3.913968	-1.914894
(6,1)	19.857700	3.991141	-1.991150
(6,6)	19.943900	3.947710	-1.948052
(6,10)	20.010210	3.913968	-1.914894
(10,1)	19.751030	3.991141	-1.991150
(10,6)	19.837230	3.947710	-1.948052
(10,10)	19.903550	3.913968	-1.914894

式 (4.26) 提到, 若 $\frac{e^{\mu t}}{T} \approx 1$ 且真實區間半長越長以及隨機區間中心變異越小, 則 $\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}$ 和 $\hat{\beta}_{23}$  將有接近不偏的性質, 而我們的設定值符合這些條件, 故表 (4.5) 中所展示的理论值 $E(\hat{\beta}_{03}), E(\hat{\beta}_{13})$ 與 $E(\hat{\beta}_{23})$ 非常接近不偏。此外, 表 (4.5) 的 $E(\hat{\beta}_{03}), E(\hat{\beta}_{13})$ 與 $E(\hat{\beta}_{23})$ 與表 (3.6) 大致相同。

將設定值代入式 (4.27) 可得

表 4.6: 編碼的隨機滑動因子之參數變異數理論值

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$var(\hat{\beta}_{03})$	$var(\hat{\beta}_{13})$	$var(\hat{\beta}_{23})$
(1,1)	0.3671748	0.7278077	0.0769937
(1,6)	1.6838140	1.0535160	0.4061536
(1,10)	2.6370980	1.2989210	0.6444746
(6,1)	0.7725081	3.9136480	0.0769937
(6,6)	2.0891480	4.1704000	0.4061536
(6,10)	3.0424320	4.3627510	0.6444746
(10,1)	1.1479750	6.4623210	0.0769937
(10,6)	2.4646140	6.6639060	0.4061536
(10,10)	3.4178980	6.8138140	0.6444746

表 4.7: 編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數理論值

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13})$	$cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23})$	$cov(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23})$	$cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13})$	$cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23})$	$cor(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23})$
(1,1)	-0.3535146	0.1406541	-0.07032686	-0.68385275	0.83654318	-0.29708813
(1,6)	-1.0094490	0.7989738	-0.39945200	-0.75790846	0.96614058	-0.61065916
(1,10)	-1.4840550	1.2756160	-0.63765490	-0.80185435	0.97848443	-0.69693364
(6,1)	-1.4178190	0.1406541	-0.07032686	-0.81541442	0.57673097	-0.12811581
(6,6)	-2.0621710	0.7989738	-0.39945200	-0.69863640	0.86736677	-0.30692381
(6,10)	-2.5277800	1.2756160	-0.63765490	-0.69382288	0.91097532	-0.38027921
(10,1)	-2.2692620	0.1406541	-0.07032686	-0.83315184	0.47310614	-0.09970096
(10,6)	-2.9043490	0.7989738	-0.39945200	-0.71665463	0.79856988	-0.24280354
(10,10)	-3.3627600	1.2756160	-0.63765490	-0.69682092	0.85948342	-0.30428998

表 (4.6) 的理論值  $var(\hat{\beta}_{03}), var(\hat{\beta}_{13})$  與  $var(\hat{\beta}_{23})$  與 (4.7) 之理論值  $cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}), cov(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23}), cov(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23}), cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{13}), cor(\hat{\beta}_{03}, \hat{\beta}_{23})$  與  $cor(\hat{\beta}_{13}, \hat{\beta}_{23})$ , 和表 (3.7) 和 (3.8) 的模擬結果大致相符。

### 4.2.3 未編碼的隨機滑動因子

採用未編碼的滑動因子分析策略，須先定義出模型。根據 (3.14)

$$\begin{aligned}
 Y &= \beta_0 + \beta_1 P_1(W) + \beta_2 P_2(W) + \epsilon \\
 &= \left( \beta_0 - 2\beta_2 - \frac{c\beta_1}{l} + \frac{3c^2\beta_2}{l^2} \right) + \left( \frac{\beta_1}{l} - \frac{6c\beta_2}{l^2} \right) W + \frac{3\beta_2}{l^2} W^2 + \epsilon
 \end{aligned}$$

令

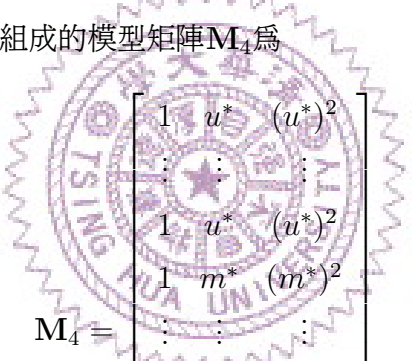
$$\begin{aligned}\beta_{04} &= \beta_0 - 2\beta_2 - \frac{c\beta_1}{l} + \frac{3c^2\beta_2}{l^2} \\ \beta_{14} &= \frac{\beta_1}{l} - \frac{6c\beta_2}{l^2} \\ \beta_{24} &= \frac{3\beta_2}{l^2}\end{aligned}$$

則

$$Y = \beta_{04} + \beta_{14}W + \beta_{24}W^2 + \epsilon \quad (4.28)$$

式 (4.28) 中的  $W$  表示未編碼的滑動因子。

未編碼的隨機滑動所組成的模型矩陣  $\mathbf{M}_4$  為



$$\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & u^* & (u^*)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & u^* & (u^*)^2 \\ 1 & m^* & (m^*)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & m^* & (m^*)^2 \\ 1 & v^* & (v^*)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & v^* & (v^*)^2 \end{bmatrix}$$

其中

$$u^* = c + \epsilon_c - \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

$$m^* = c + \epsilon_c$$

$$v^* = c + \epsilon_c + \exp(\mu_t + \epsilon_t)$$

反應變數矩陣則是由式 (4.18) 至 (4.20) 建立。因此, 式 (4.28) 之模型參數估計

爲

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{bmatrix} = (\mathbf{M}'_4 \mathbf{M}_4)^{-1} \mathbf{M}'_4 \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_2 - \frac{c\beta_1}{l} + \frac{3c^2\beta_2}{l^2} + \epsilon_1^* \\ \frac{\beta_1}{l} - \frac{6c\beta_2}{l^2} + \epsilon_2^* \\ \frac{3\beta_2}{l^2} + \epsilon_3^* \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

上式中的隨機變數 $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*$ 以及 $\epsilon_3^*$ 分別爲：

$$\epsilon_1^* = \frac{(c + \epsilon_c)^2}{2ne^{2\mu_t + 2\epsilon_t}} \sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui} - 2\epsilon_{mi}) - \frac{(c + \epsilon_c)}{2ne^{\mu_t + \epsilon_t}} \sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui}) + \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_{mi}}{n} \quad (4.30)$$

$$\epsilon_2^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} - \epsilon_{ui})}{2ne^{\mu_t + \epsilon_t}} - \frac{c + \epsilon_c}{ne^{2\mu_t + 2\epsilon_t}} \sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui} - 2\epsilon_{mi}) \quad (4.31)$$

$$\epsilon_3^* = \frac{\sum_{i=1}^n (\epsilon_{vi} + \epsilon_{ui} - 2\epsilon_{mi})}{2ne^{2\mu_t + 2\epsilon_t}} \quad (4.32)$$

對式 (4.29) 取期望值可得

$$\begin{aligned}
 E \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{bmatrix} &= EE \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) \\
 &= E \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_2 - \frac{c\beta_1}{l} + \frac{3c^2\beta_2}{l^2} \\ \frac{\beta_1}{l} - \frac{6c\beta_2}{l^2} \\ \frac{3\beta_2}{l^2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \beta_0 - 2\beta_2 - \frac{c\beta_1}{l} + \frac{3c^2\beta_2}{l^2} \\ \frac{\beta_1}{l} - \frac{6c\beta_2}{l^2} \\ \frac{3\beta_2}{l^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{04} \\ \beta_{14} \\ \beta_{24} \end{bmatrix} \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

由此可見，利用未編碼的滑動因子估計參數，其所估計的參數與真實模型式 (3.14) 所假設的真實參數不同。同 4.1.3 節文中所提，式 (4.29) 的參數估計之單位已經改變為每單位的滑動因子對於反應變數值所造成的增量，故可知，式 (4.29) 所估計的參數為式 (4.28) 中的  $\beta_{04}$ 、 $\beta_{14}$  和  $\beta_{24}$ ，而非真實模型參數  $\beta_0$ 、 $\beta_1$  與  $\beta_2$ 。以編碼的滑動因子估計參數，4.2.1 節中我們提到在給定一些條件下，其參數估計將趨近於不偏的。而式 (4.29) 中，直接以未編碼的隨機滑動因子所得的參數估計對於  $\beta_{04}$ 、 $\beta_{14}$  和  $\beta_{24}$  將是不偏的

對式 (4.29) 取變異數可得：

$$cov \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{bmatrix} = cov E \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) + E cov \left( \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{bmatrix} \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right)$$

上式中

$$\begin{aligned}
covE \left( \left[ \begin{array}{c} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{array} \right] \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) &= cov \left[ \begin{array}{c} \beta_0 - 2\beta_2 - \frac{c\beta_1}{l} + \frac{3c^2\beta_2}{l^2} \\ \frac{\beta_1}{l} - \frac{6c\beta_2}{l^2} \\ \frac{3\beta_2}{l^2} \end{array} \right] = 0 \\
\\
Ecov \left( \left[ \begin{array}{c} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{array} \right] \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right) \\
&= \left[ \begin{array}{ccc} Evar(\hat{\beta}_{04}|\epsilon_c, \epsilon_t) & Ecov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14}|\epsilon_c, \epsilon_t) & Ecov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24}|\epsilon_c, \epsilon_t) \\ Ecov(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{04}|\epsilon_c, \epsilon_t) & Evar(\hat{\beta}_{14}|\epsilon_c, \epsilon_t) & Ecov(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24}|\epsilon_c, \epsilon_t) \\ Ecov(\hat{\beta}_{24}, \hat{\beta}_{04}|\epsilon_c, \epsilon_t) & Ecov(\hat{\beta}_{24}, \hat{\beta}_{14}|\epsilon_c, \epsilon_t) & Evar(\hat{\beta}_{24}|\epsilon_c, \epsilon_t) \end{array} \right] \\
&= Ecov \left( \left[ \begin{array}{c} \beta_0 - 2\beta_2 - \frac{c\beta_1}{l} + \frac{3c^2\beta_2}{l^2} + \epsilon_1^* \\ \frac{\beta_1}{l} - \frac{6c\beta_2}{l^2} + \epsilon_2^* \\ \frac{3\beta_2}{l^2} + \epsilon_3^* \end{array} \right] \middle| \epsilon_c, \epsilon_t \right)
\end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*, \epsilon_3^*$ 定義在式 (4.30) 至 (4.32)。須注意，對以上矩陣求解之過程，利用到式 (4.8) 之性質對  $e^{\mu_t}$  與  $e^{2\mu_t}$  展開至第二項。

$$\begin{aligned}
Evar(\hat{\beta}_{04}|\epsilon_c, \epsilon_t) &\approx \frac{\sigma^2}{n} + \frac{3(c^4 + 6c^2\sigma_c^2 + 3\sigma_c^4)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{4\mu_t}} - \frac{(c^2 + \sigma_c^2)(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{2\mu_t}} \\
Evar(\hat{\beta}_{14}|\epsilon_c, \epsilon_t) &\approx \frac{(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{2\mu_t}} + \frac{6(c^2 + \sigma_c^2)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{4\mu_t}} \\
Evar(\hat{\beta}_{24}|\epsilon_c, \epsilon_t) &\approx \frac{3(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{4\mu_t}} \\
Ecov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14}|\epsilon_c, \epsilon_t) &\approx -\frac{3(c^3 + 3c\sigma_c^2)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{4\mu_t}} - \frac{c(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{2\mu_t}} + \frac{2c(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{2\mu_t}} \\
Ecov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24}|\epsilon_c, \epsilon_t) &\approx \frac{3(c^2 + \sigma_c^2)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{4\mu_t}} - \frac{(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{2\mu_t}} \\
Ecov(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24}|\epsilon_c, \epsilon_t) &\approx -\frac{3c(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{4\mu_t}}
\end{aligned}$$

所以, 參數估計之變異數矩陣爲

$$\text{cov} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{04} \\ \hat{\beta}_{14} \\ \hat{\beta}_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{\beta}_{04}) & \text{cov}(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14}) & \text{cov}(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24}) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{04}) & \text{var}(\hat{\beta}_{14}) & \text{cov}(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24}) \\ \text{cov}(\hat{\beta}_{24}, \hat{\beta}_{04}) & \text{cov}(\hat{\beta}_{24}, \hat{\beta}_{14}) & \text{var}(\hat{\beta}_{24}) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

其中

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}_{04}) &\approx \frac{\sigma^2}{n} + \frac{3(c^4 + 6c^2\sigma_c^2 + 3\sigma_c^4)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{4\mu_t}} - \frac{(c^2 + \sigma_c^2)(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{2\mu_t}} \\ \text{var}(\hat{\beta}_{14}) &\approx \frac{(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{2\mu_t}} + \frac{6(c^2 + \sigma_c^2)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{4\mu_t}} \\ \text{var}(\hat{\beta}_{24}) &\approx \frac{3(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{4\mu_t}} \\ \text{cov}(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14}) &\approx -\frac{3(c^3 + 3c\sigma_c^2)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{4\mu_t}} - \frac{c(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{2\mu_t}} + \frac{2c(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{2\mu_t}} \\ \text{cov}(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24}) &\approx \frac{3(c^2 + \sigma_c^2)(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{2ne^{4\mu_t}} - \frac{(1 + 2\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{2\mu_t}} \\ \text{cov}(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24}) &\approx -\frac{3c(1 + 8\sigma_t^2)\sigma^2}{ne^{4\mu_t}} \end{aligned}$$

比較式 (4.27) 編碼滑動因子的參數估計變異數以及式 (4.34) 未編碼滑動因子的參數估計變異數, 兩者之間很明顯的可看出式 (4.27) 會受到真實模型的參數 $\beta_1$ 與 $\beta_2$ 影響, 但式 (4.34) 則否。在真實二次模型裡, 若利用編碼隨機滑動因子的策略建模, 則一單位的編碼值其對應在滑動因子上的單位將隨著隨機滑動因子區間改變而改變, 如前文描述, 每單位編碼值的變化對反應變數的影響也會因而改變, 因此真實模型的參數將對參數估計的變異數造成影響。若採用未編碼隨機滑動因子的策略建模, 則不論隨機滑動因子區間如何變動, 參數估計之變異將不受真實模型參數影響, 因為參數之意義爲每單位原始的滑動因子的變化對於反應曲面所造成的改變, 此與4.1.3節中模型 (4.12) 的參數意義相同。

式 (4.34) 中的 $e^{\mu_t}$ 之解釋與4.1.3節中的式 (4.15) 相同。未編碼的隨機滑動因子估計的參數之單位是固定的, 所以隨機區間半長 $l^*$ 期望值增加, 較能夠準確觀察反應曲面的變化, 便有助於降低參數估計之變異。

由於反應曲面是二次的, 故當隨機區間中心變動到不同地方時, 所觀察到的反應曲面之斜率與曲率將會改變, 因而影響參數估計值。所以真實區間中心 $c$ 和區間中心變異 $\sigma_c^2$  將對參數估計造成影響。而在給定區間半長的情況下, 若區間變動的



幅度越大, 即 $\sigma_t^2$ 越大, 則區間隨機化對參數估計的影響將會越大。故參數估計的變異數將和  $c, \sigma_c^2$  以及  $\sigma_t^2$  成正比。此外, 式 (4.34) 中的參數之間的共變異數皆不等於 0。與 4.2.1 小節的式 (4.27) 相比, 其共變異數產生之來源不同, 4.2.1 小節採用編碼策略所得到的模型矩陣為正交矩陣, 故其共變異來源為滑動因子實驗區間之隨機性, 此外, 當真實區間半長  $l$  變大, 如前文所述, 參數估計之變異將越來越不受到實驗區間之隨機性影響, 故其共變異數將趨近於 0。4.2.3 小節採用未編碼策略所得的模型矩陣並非正交的, 又加上實驗區間具隨機性的緣故, 使得參數之間必產生共變異數。因此, 未將滑動因子產生的效應編碼, 其參數估計之間將會是相關的。

#### 4.2.4 模型二之驗證-模型二之未編碼策略

若將設定值代入式(4.33), 可得 $E(\hat{\beta}_{04}) = -18, E(\hat{\beta}_{14}) = 2.1333$ 以及 $E(\hat{\beta}_{24}) = -0.0267$ , 與表 (3.9) 相比, 模擬結果與參數估計期望值相符。

將設定值代入式 (4.34) 可得

表 4.8: 未編碼的隨機滑動因子之參數變異數理論值

$(\sigma_c^2, \sigma_t^2)$	$var(\hat{\beta}_{04})$	$var(\hat{\beta}_{14})$	$var(\hat{\beta}_{24})$
(1,1)	1.796692	0.0061620360	0.0000012382
(1,6)	2.202668	0.0075121390	0.0000015123
(1,10)	2.544147	0.0086468350	0.0000017426
(6,1)	1.841874	0.0061867990	0.0000012382
(6,6)	2.257921	0.0075423840	0.0000015123
(6,10)	2.607868	0.0086816880	0.0000017426
(10,1)	1.878154	0.0062066100	0.0000012382
(10,6)	2.302288	0.0075665800	0.0000015123
(10,10)	2.659032	0.0087095700	0.0000017426

表 4.9: 未編碼的隨機滑動因子之參數共變異數與相關係數理論值

$(\sigma_c^2, \sigma_l^2)$	$cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$	$cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$	$cov(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24})$	$cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$	$cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$	$cor(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24})$
(1,1)	-0.09697468	0.00133784	-0.00008667	-0.92163598	0.89696903	-0.99225909
(1,6)	-0.11990650	0.00166189	-0.00010586	-0.93215127	0.91057768	-0.99318015
(1,10)	-0.13920160	0.00193465	-0.00012199	-0.93852218	0.91881435	-0.99374197
(6,1)	-0.09827475	0.00134403	-0.00008667	-0.92061699	0.88999880	-0.99027131
(6,6)	-0.12149430	0.00166946	-0.00010586	-0.93099471	0.90345921	-0.99118682
(6,10)	-0.14103140	0.00194337	-0.00012199	-0.93728340	0.91160686	-0.99174525
(10,1)	-0.09931480	0.00134898	-0.00008667	-0.91985875	0.88460888	-0.98868962
(10,6)	-0.12276460	0.00167550	-0.00010586	-0.93012970	0.89795350	-0.98960077
(10,10)	-0.14249520	0.00195034	-0.00012199	-0.93635406	0.90603227	-0.99015654

比較表 (3.10) 與 (3.11) 之模擬結果和表 (4.8) 與 (4.9) 之理論值  $var(\hat{\beta}_{04}), var(\hat{\beta}_{14}), var(\hat{\beta}_{24}), cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14}), cov(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24}), cov(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24}), cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14}), cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$  與  $cor(\hat{\beta}_{14}, \hat{\beta}_{24})$  可發現,  $cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$  之模擬值大約介於  $-0.98$  至  $-0.97$  間, 理論值介於  $-0.93$  至  $-0.91$  間;  $cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$  模擬結果介於  $0.94$  至  $0.96$ , 理論值介於  $0.88$  至  $0.91$ 。我們推測模擬的結果由於模擬誤差的關係, 造成  $var(\hat{\beta}_0)$  之數值偏小, 使得  $cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{14})$  和  $cor(\hat{\beta}_{04}, \hat{\beta}_{24})$  兩值被高估, 因此推斷模擬誤差的結果與理論值之間存在些許差異, 除此之外, 其他模擬的結果與表 (4.8) 與 (4.9) 之理論值相符。

## 第 5 章

### 結論與未來展望

在一般的迴歸模型

$$Y_i = \gamma_0 + \gamma_1 x_i + \epsilon_i$$
$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2), i = 1, \dots, n$$

其中 $\epsilon_i$ 為獨立且分布相同。對於檢定 $H_0: \gamma_1 = 0$ ，我們可用 $T$ 檢定，其檢定統計量為

$$T = \frac{\hat{\gamma}_1}{se(\hat{\gamma}_1)} \quad (5.1)$$

我們拒絕 $H_0: \gamma_1 = 0$ ，並接受 $H_1: \gamma_1 \neq 0$ 之拒絕域為

$$|T| > T_{1-\alpha/2, n-2}$$

固定 $\hat{\gamma}_1$ 的值可知，當 $se(\hat{\gamma}_1)$ 很小的時候，式 (5.1) 的 $T$ 值較大，因此分析者將得到 $H_1: \gamma_1 \neq 0$ 或是 $\gamma_1$ 為顯著的結論。反之，若 $se(\hat{\gamma}_1)$ 很大，則 $T$ 值將變小，故分析者將得到 $\gamma_1$ 不顯著的結論。

在本文的二階段實驗裡，分析者在第一階段實驗建立了滑動因子實驗的實驗區間，基於實驗誤差或者是配適模型造成的誤差，將使得實驗區間帶有隨機性。因此，在第二階段的實驗裡，具有隨機性的實驗區間將會讓參數估計的變異數產生變化，若採用編碼的隨機滑動因子分析策略，如同 4.1.1 與 4.2.1 兩小節所提，參數估計的變異數將會變大，但因為直交性的關係，使得估計參數的過程方便許多；若採用未編碼的隨機滑動因子分析策略，則 4.1.3 與 4.2.3 兩小節展示參數估計的變異數亦將會變大，但經由此方法所估計的參數，其意義為每單位原始滑動因子對於反應變

數造成的增量, 其為固定且不受實驗區間隨機性影響。若分析者忽略滑動因子實驗區間的隨機性, 即把具有隨機性之實驗區間所獲得的實驗數據, 以傳統非隨機實驗區間的手法進行數據分析, 便可能忽略實驗區間之隨機性所帶來的變異, 因而低估參數估計之變異, 進而做出錯誤的統計分析將不顯著的效應誤判為顯著的效應。

經由全文的討論可知, 具有隨機性的實驗區間對於參數估計之變異的影響。接著, 一般統計分析裡對於參數的估計, 效應顯著性的假設檢定與模型選取變成待解決的問題。在實驗區間具隨機性的架構下, 參數應可利用最大概似估計而得, 而參數的檢定與模型選取的準則應可透過參數估計的抽樣分配導出而解決。



## 參考文獻

- Chang, M.C. (2008), “Prediction and Model Selection for Interval Response”, M.S. Thesis. Institute of Statistics, National Tsing Hua University.
- Hamada, M. and Wu, C.F.J. (1995), “The Treatment of Related Experimental Factors by Sliding Levels”, *Journal of Quality Technology*, 27, 45–55, .
- Li, W., Cheng, S.W., Hu, S.J., and Shriver, J. (2001), “Statistical Investigation on Resistance Spot Welding Quality Using a Two-Stage Sliding Level Experiment”, *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 123, 513–520.