43.

X : 5 個訊號中，訊號轉換錯誤的個數 $\sim Bin(n=5, p=0.2)$ $\qquad x = 0,1,\cdots,5$

$$P(Message\ will\ be\ wrong) = P(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{5} \binom{5}{x} (0.2)^x (0.8)^{n-x}$$

$Assumption$: 每個訊號的轉換皆為獨立進行。

50.

X : 丟 10 次硬幣中，硬幣出現正面的個數 $\sim Bin(n=10, p)$ $\qquad x = 0,1,\cdots,10$

(a)

$$P(h,t,t \mid x=6) = \frac{P(h,t,t\ and\ x=6)}{P(x=6)} = \frac{P(x=6 \mid h,t,t) \cdot P(h,t,t)}{P(x=6)}$$

$$= \frac{\binom{7}{5} p^5 (1-p)^2 \times p(1-p)^2}{\binom{10}{6} p^6 (1-p)^4} = \frac{1}{10}$$

(b)

$$P(t,h,t \mid x=6) = \frac{P(t,h,t\ and\ x=6)}{P(x=6)} = \frac{P(x=6 \mid t,h,t) \cdot P(t,h,t)}{P(x=6)}$$

$$= \frac{\binom{7}{5} p^5 (1-p)^2 \times p(1-p)^2}{\binom{10}{6} p^6 (1-p)^4} = \frac{1}{10}$$

53.

(a)

X : 80,000 對新人皆在 4 月30出生的對數 $\sim Bin\left(n = 80{,}000, p = \left(\frac{1}{365}\right)^2\right)$ $\qquad x = 0,1,2,\cdots,80{,}000$

則因為 $n = 80{,}000 > 20$ 且 $p = \left(\frac{1}{365}\right)^2 < 0.05$，所以可用 $Poisson$ 逼近。

$Hence,\ X \sim Poi(\lambda = np \approx 0.6)$

$$\Rightarrow P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{e^{-0.6} \cdot (0.6)^0}{0!} = 1 - e^{-0.6} \approx 0.4512$$

(b)

Y : 80,000 對新人在同一天慶生的對數 $\sim Bin\left(n = 80{,}000, p = \frac{1}{365}\right)$ $\qquad y = 0,1,2,\cdots,80{,}000$

則因為 $n = 80{,}000 > 20$ 且 $p = \frac{1}{365} < 0.05$，所以可用 $Poisson$ 逼近。

$Hence,\ Y \sim Poi(\lambda = np \approx 219.18)$

$$\Rightarrow P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \frac{e^{-219.18} \cdot (219.18)^0}{0!} = 1 - e^{-219.18} \approx 1$$

64.

依題意可知，某地區每月每100,000 人平均有1人自殺，

則每400,000人平均有 4 人自殺。

X : 每400,000人中自殺的人數 $\sim Poi(\lambda = 4)$ $\qquad x = 0,1,2,\cdots,\infty$

(a)

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - \sum_{x=0}^{7} \frac{e^{-4} \cdot 4^x}{x!} \equiv p_1$$

(b)

Y : 一年內，自殺人數在 8 人以上的月數 $\sim Bin(n = 12, p_1)$ $\qquad y = 0,1,2,\cdots,12$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1)$$
$$= 1 - (1 - p_1)^{12} - 12 \cdot p_1 \cdot (1 - p_1)^{11}$$

(c)

I : 直到發生第一次自殺人數在8人以上所經過的月數 $\sim Geo(p_1)$ $\qquad i = 1,2,\cdots,\infty$

$$P(I = i) = (1 - p_1)^{i-1} \cdot p_1$$

$Assumption$: 每個月自殺人數在 8 人以上皆爲獨立發生。

74.

(a)

X : 5 人中能參加面試的人數 $\sim Bin(n = 5, p = \frac{2}{3})$ $\qquad x = 0,1,\cdots,5$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

(b)

Y : 8 人中能參加面試的人數 $\sim Bin(n = 8, p = \frac{2}{3})$ $\qquad y = 0,1,\cdots,8$

$$P(Y \geq 5) = \sum_{y=5}^{8} \binom{8}{y}\left(\frac{2}{3}\right)^y\left(\frac{1}{3}\right)^{8-y}$$

(c)

U : 在必須與 6 位談到話的情況下，願意來面試的有5位之事件。

$$P(U) = P\{\text{第 6 位談話的人恰爲第 5 位願意來面試的人}\}$$

$$= \underbrace{\left[\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)\right]}_{\text{前5位中，取4位願意來面試}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{第6位，爲第5位願意面試的人}}$$

$$= \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)$$

(d)

V : 在必須與 7 位談到話的情況下，願意來面試的有5位之事件。

$P(V) = P\{$第 7位談話的人恰爲第 5 位願意來面試的人$\}$

$$= \underbrace{\left[\binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]}_{\text{前6位中，取4位願意來面試}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{第7位，爲第5位願意面試的人}}$$

$$= \binom{6}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

78.

$$P(\text{取到 2 白球與 2 黑球}) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} \equiv p_2$$

X : 直到取到 2 白球與 2 黑球，所需的試行次數 $\sim Geo(p_2) \qquad x = 1,2,\cdots,\infty$

$$P(X = n) = (1 - p_2)^{n-1} \cdot p_2$$

Theoretical Exercises

10.

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \sum_{x=0}^{n} \frac{1}{x+1}\cdot\binom{n}{x}\cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$\left(\because \frac{1}{x+1}\cdot\binom{n}{x} = \frac{1}{x+1}\cdot\frac{n!}{(n-x)!x!}\cdot\frac{n+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n-x)!(x+1)!}\cdot\frac{1}{n+1} = \binom{n+1}{x+1}\cdot\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\binom{n+1}{x+1}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

$$= \frac{1}{p(n+1)}\cdot\sum_{y=1}^{n+1}\binom{n+1}{y}\cdot p^y\cdot(1-p)^{n+1-y} \qquad (Let\ \ y = x+1)$$

$$= \frac{1}{p(n+1)}\cdot\left\{\sum_{y=0}^{n+1}\left[\binom{n+1}{y}\cdot p^y\cdot(1-p)^{n+1-y}\right] - (1-p)^{n+1}\right\} \qquad \left(\because \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x} = 1\right)$$

$$= \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

16.

$X \sim Poi(\lambda)$

$$\frac{P(X=i)}{P(X=i-1)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{i}}{i!}}{\dfrac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{i-1}}{(i-1)!}} = \frac{\lambda}{i}$$

$Case1: 1 \le i \le [\lambda]$

$$\frac{P(X=i)}{P(X=i-1)} = \frac{\lambda}{i} > 1 \quad \Rightarrow P(X=i) > P(X=i-1) \quad \Rightarrow P(X=i) \ \textit{increases monotonically}$$

$Case2: [\lambda] < i$

$$\frac{P(X=i)}{P(X=i-1)} = \frac{\lambda}{i} < 1 \quad \Rightarrow P(X=i) > P(X=i-1) \quad \Rightarrow P(X=i) \ \text{decreases} \ \textit{monotonically}$$

$By\ case1\ \&\ case2$

$\Rightarrow P(X=i)$ *reaches its maximum when i is the largest integer not exceeding* λ.