第四章 有限元素分析法

本章說明有限元素分析法的基本原理，如何運用有限元素分析法求解靜電場方程式，以及本論文採用的 COMSOL 套裝程式的使用流程。

4.1 有限元素基本原理

如同字面上的意義，有限元素法是將物體視為由有限數量的元素（Element）所構成的，這些構成物包括一次元的邊界、二次元的三角形或四方形以及三次元的立體實物，這些元素組成網格（Mesh），而有限元素法就是將次元數縮小，以提高計算效率，但若過度簡化導致網格數過少，會使結果失真。

常見的網格簡化法係將三次元的立體依據不同特性，簡化為二次元模型後，再進行分析，以下為主要的網格構成法[13]。

（1）二次元場

若電場僅在 X、Y 軸變化而 Z 軸不變且無限延伸之長柱型物體，適用此法。以兩條無限長且平行的帶電導線為例，如圖 4.1-1(a)，原本三次元的平行導線問題可以簡化成為圖 4.1-1(b)的二次元模型。

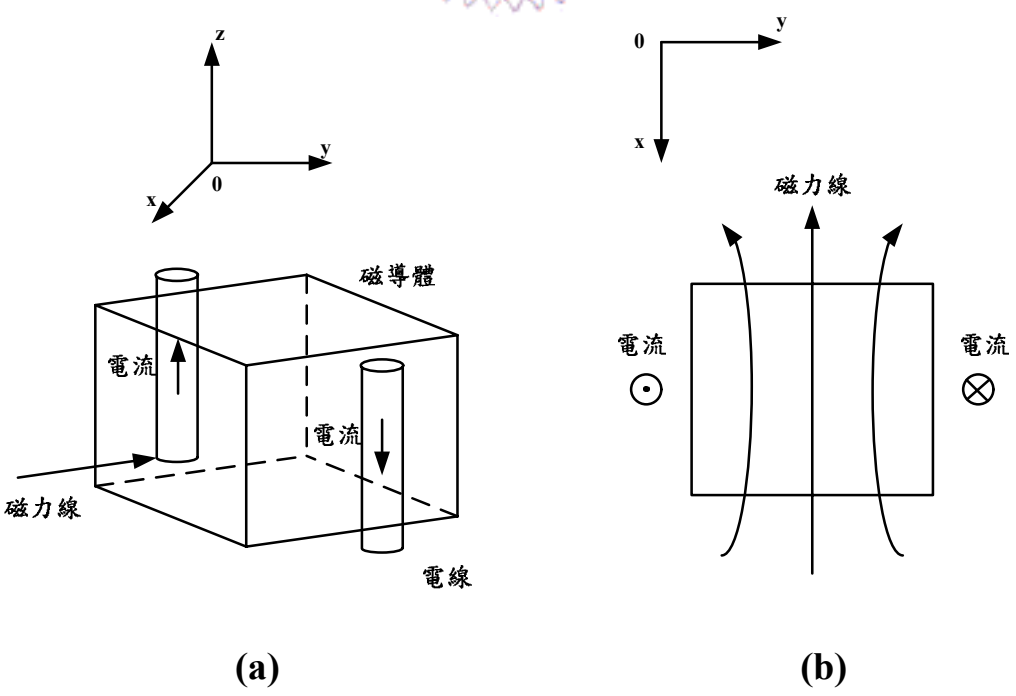

圖 4.1-1 二次元場示意圖

（2）軸對稱場

若電場僅在γ、Z 軸變化而θ軸不變之圓柱型座標，適用本法。茲以圓環形帶電導線為例，如圖 4.1-2(a)，原本三次元的圓環形帶電導線問題可以簡化成為圖 4.1-2(b)的二次元模型。

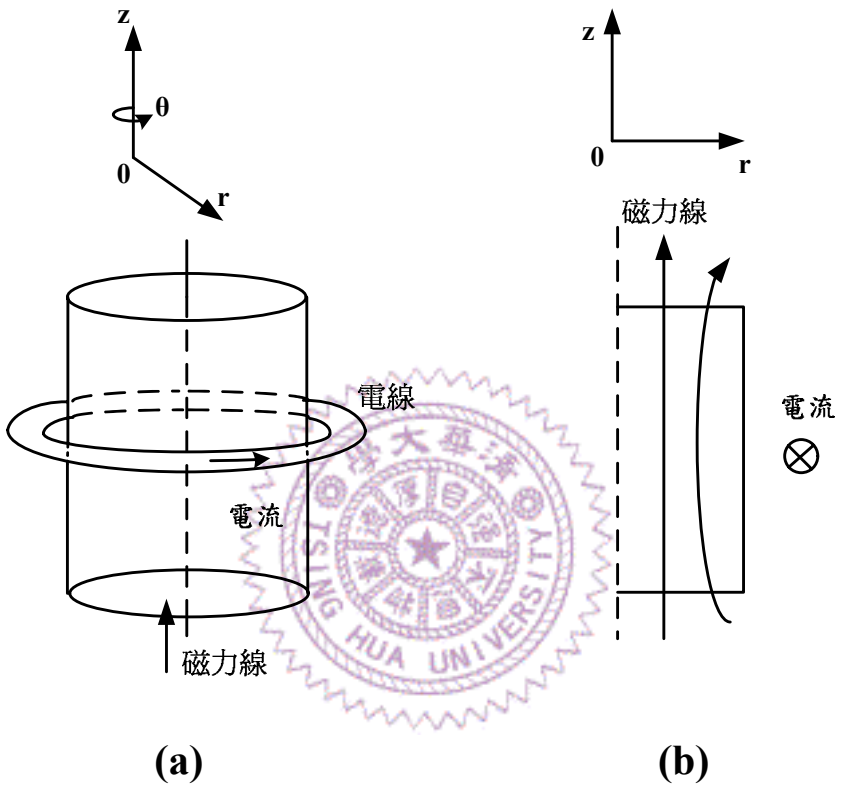

圖 4.1-2 軸對稱場示意圖

（3）三次元場

當對象物缺少上述兩種特性時，才使用三次元場，包括：無對稱特性的物體，例如汽車衝擊模擬時之汽車模型；若物體有對稱特性，盡量使用前兩類模型，以減少計算量。

4.2 馬克斯威爾方程式

馬克斯威爾（Maxwell）方程式的積分形式如下：

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\bullet d\vec{l} \tag{4.2-1}$$

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} + \iint_S \vec{J}\bullet d\vec{s} \tag{4.2-2}$$

$$\oiint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = \iiint_V \rho dv \tag{4.2-3}$$

$$\oiint_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = 0 \tag{4.2-4}$$

其中 B 為磁通量密度（Magnetic Flux Density，T）、H 為磁場強度（Magnetic Field，A/m）、D 為電通密度（Electric Displacement Field，C/ m^2）、E 為電場強度（Electric Field，V/m）、J 為自由電流密度（Free Current Density，A/m^2）、ρ 為自由電荷體密度（Free Electric Charge Density，C/ m^3），公式 4.2-1~4.2-2 當中的 S 指開放平面（Open Surface）係以封閉輪廓 C 作為界線，公式 4.2-3~4.2-4 當中的 S 則為封閉平面（Closed Surface）係由體積 V 包圍。以上五個積分公式適用於任何的體積分、面積分和線積分。

其中 B、H、D、E、J 的關係為

$$\vec{B} = \mu\vec{H} + \vec{B}_r \tag{4.2-5}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} + \vec{D}_r \tag{4.2-6}$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} + \vec{J}^e \tag{4.2-7}$$

公式中，μ 為導磁率（Magnetic Conductivity，H/m），ε 為介電係數（Permittivity，F/m），σ 為導電率（Conductivity，S/m），B_r 為剩餘磁通量（T），D_r 為剩餘電通密度（C/ m^2），J^e 為外部產生的電流面密度（A/m^2）。

上述的而馬克斯威爾方程式可針對空間的任一點表示為：

$$\nabla\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{4.2-8}$$

$$\nabla\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \tag{4.2-9}$$

$$\nabla\bullet\vec{D} = \rho \tag{4.2-10}$$

$$\nabla\bullet\vec{B} = 0 \tag{4.2-11}$$

$$\nabla\bullet\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{4.2-12}$$

4.3 有限元素邊界條件

有限元素法的邊界分為兩類：固定邊界與未知邊界。固定邊界為在模型建立時就指定的邊界，像電位能、電屏蔽、接地等，可設定指定的電壓、電流或零電位等，稱為固定邊界條件（Specified Boundary Condition）；而未知邊界條件（Unknown Equipotential Boundary Condition）指的其電場、電流、電位等數值要經過計算才可得知，此類邊界無法預先進行設定。

在不同材質介面的固定邊界，其向量須遵守以下的連續條件：

$$\hat{n}\bullet(\vec{B}_2-\vec{B}_1)=0 \tag{4.3-1}$$

$$\hat{n}\bullet(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=\vec{K}_s \tag{4.3-2}$$

$$\hat{n}\bullet(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\rho_s \tag{4.3-3}$$

$$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)=0 \tag{4.3-4}$$

其中 $\hat{n}$ 為兩材質介面之間的單位法線向量、$\vec{K}_s$ 為面電流密度、ρ_s 為面電荷密度

4.4 靜電場支配方程式（Governing Equations）

靜電場是馬克斯威爾公式當中的特例，由於為非時變場，因此公式 4.2-8 當中的微分項為零，成為：

$$\nabla\times\vec{E}=0 \tag{4.4-1}$$

由 4.3-4 式以及 $\nabla\times\nabla\phi=0$ 得知：$\vec{E}$ 可從純量 ϕ 推導為：

$$\vec{E}=-\nabla\phi \tag{4.4-2}$$

由公式 4.2-6、4.2-10 及 4.4-2 可得：

$$\nabla\bullet(\varepsilon\nabla\phi)=-\rho \tag{4.4-3}$$

電通密度 D 在介電係數 ε 為張量（Tensor）形式時，公式 4.2-6 的電場與電通密度可以改寫為：

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{4.4-4}$$

若材料為等方向性(Isotropic)，則公式 4.4-4 中介電係數的非對角線均為零，成為下式：

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{4.4-5}$$

則靜電場的三維直角座標支配方程式為：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) = -\rho \tag{4.4-6}$$

在二次元場中，由於 Z 軸方向假設為無限長，因此 Z 軸方向各向量場並無變化因此二次元場的支配方程式為：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) = -\rho \tag{4.4-7}$$

若是在軸對稱場則由於

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} a_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} a_\theta + \frac{\partial \phi}{\partial z} a_z \tag{4.4-8}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \tag{4.4-9}$$

其中 a_r、a_θ、a_z 分別為 r、θ、z 方向的單位向量，則為將公式 4.4-8 帶入至公式 4.4-2，可得 $E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$、$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}$、$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$

而電場與電通密度的關係成為：

$$\begin{bmatrix} D_{rr} \\ D_{\theta\theta} \\ D_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{zr} & \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} \tag{4.4-10}$$

若材料為等方向性（Isotropic），則公式 4.4-10 中介電係數的非對角線均為零，成為下式：

$$\begin{bmatrix} D_{rr} \\ D_{\theta\theta} \\ D_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{bmatrix} \tag{4.4-11}$$

靜電場之軸對稱座標支配方程式為：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) = -\rho \tag{4.4-12}$$

4.5 靜電場的有限元素方程式

靜電場各項數據主要根據前節所推導的支配方程式進行計算。為說明有限元素法，茲以圖 4.5-1 的三角形元素為例，平面上任一點電位可以寫成

$$\phi = a + bx + cy = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{4.5-1}$$

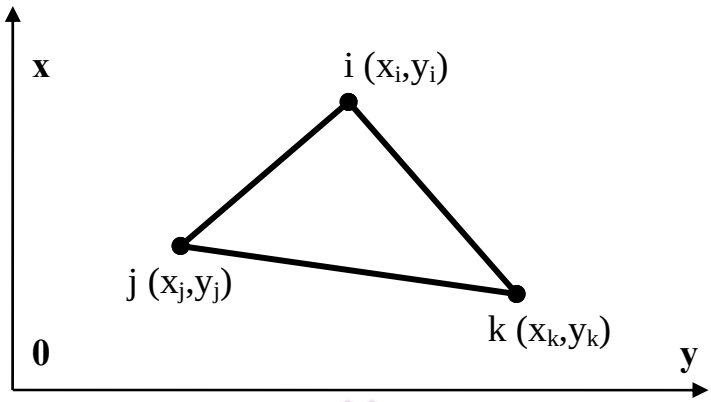

圖 4.5-1 有限元素法的三角形元素

三角形元素的三個頂點 i、j、k 之值 ϕ_i、ϕ_y、ϕ_z 代入至 4.5.1 式可得：

$$\phi = \frac{1}{2\triangle} \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_z \end{bmatrix} \tag{4.5-2}$$

其中，$\triangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$ 為三角形元素的面積，此時電位可表示為：

$$[K]\{\phi\} = \{F\} \tag{4.5-2}$$

其中，

$$K_{ij} = \frac{1}{4\triangle}(\varepsilon_x b_i b_j + \varepsilon_y c_i c_j) \tag{4.5-3}$$

$$F_i = \frac{\rho\triangle}{3} \tag{4.5-4}$$

其中 ε_x、ε_y 為介電係數，藉由上述公式解出電位 ϕ 後即可利用公式 4.4-2 計算電場強度 E

$$E = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{a}_x - \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{a}_y \tag{4.5-6}$$

將公式 4.5-2 帶入至公式 4.5-6，可得電場強度 E 的 x 和 y 方向的分量

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{1}{2\triangle}(b_i\phi_i + b_j\phi_j + b_k\phi_k) \tag{4.5-7}$$

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{2\triangle}(c_i\phi_i + c_j\phi_j + c_k\phi_k) \tag{4.5-8}$$

4.6 COMSOL 使用流程

本論文所採用的有限元素分析軟體為 COMSOL，使用 JAVA 引擎設計圖形化介面（GUI），便於使用。且可以先用此軟體求解，將得到的數據輸出至 MATLAB，利用 MATLAB 作進一步的處理，而整體模擬流程如圖 4.5-1。

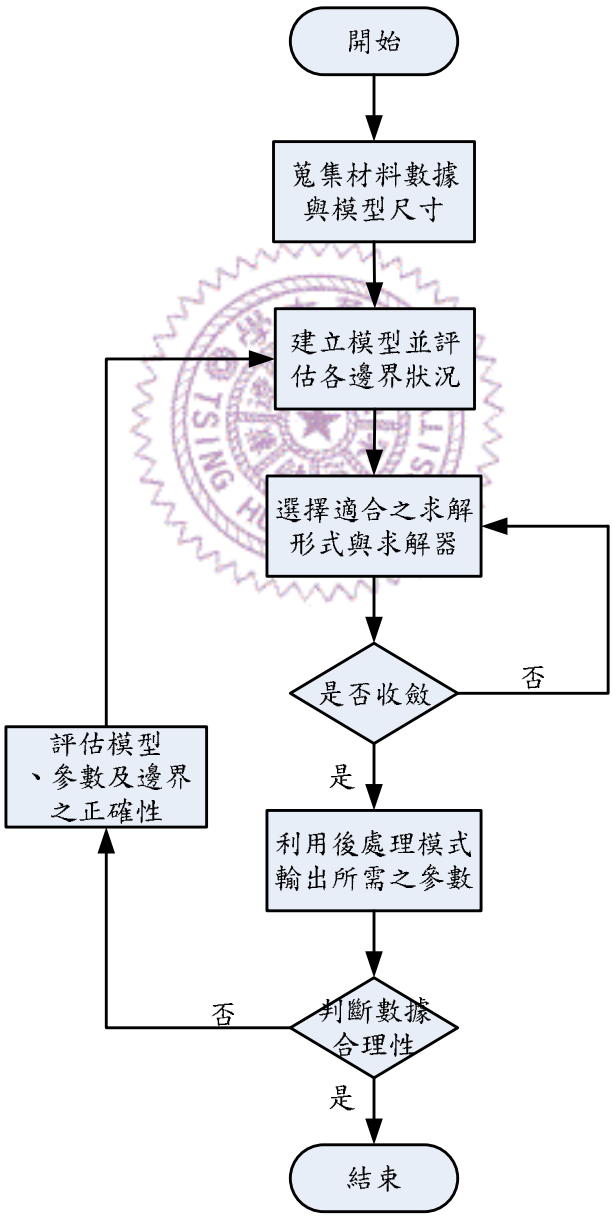

圖 4.6-1 COMSOL 模擬流程

在建立模型並輸入材質特性參數以及邊界條件後，就可以直接利用求解器求解，而 COMSOL 的求解器是以求解偏微分方程式（Partial Differential Equation）為基礎建立的，可以依需求選擇求解模式，如表 4.6-1：

表 4.6-1 COMSOL 的不同求解模式與適用對象

求解模式	適用對象
穩態線性	線性偏微分方程式
穩態非線性	非線性偏微分方程式
暫態	時間相依偏微分方程式（線性或非線性）
特徵值	特徵值偏微分方程式
參數線性	參數求解線性偏微分方程式
參數非線性	參數求解非線性偏微分方程式

各個求解模式須依個案的需求不同選擇最適用的求解模式。求解時，大部分的時間消耗線性系統的求解上，由於聯立方程式為數龐大，因此針對問題挑選適當的線性系統求解器可以有效提升運算效率，各型求解器適用的問題如表 4.6-2。

表 4.6-2 COMSOL 線性系統求解器種分類與適用對象

求解器種類	適用之線性系統
直接（UMFPACK）	對於直接求解非對稱系統效率較高
直接（SPOOLES）	適用於直接求解對稱與非對稱系統，但效能較 UMFPACK 低
Cholesky（TAUCS）	適用於直接求解對稱正定系統
GMRES	適用於反覆求解之非對稱問題
共軛梯度	適用於反覆求解之對稱正定問題
幾何多網格法	適用於反覆求解之橢圓與拋物線問題