

第三章

線型永磁馬達之定結構滑模定位控制器

3.1 前言

由於線型永磁馬達的控制器需用到許多的馬達參數，在馬達移動的過程中其操作性能容易受到溫度、雜訊、磁飽和及負載等環境干擾而變動。因此為了能使線型永磁馬達驅動系統性能較不易受到參數變動的影響而維持良好的強健性，強健的控制系統是不可或缺的。另一方面定結構滑模控制的概念最初於西元 1994 年由本實驗室所研發出來並成功地應用於感應馬達之速率控制[18]，以及後續之應用於位置控制[22][26]、三相昇壓型主動式整流器[21]上，此控制法則不僅可以保留傳統滑模控制的優點，並能消除傳統滑模控制所產生的切跳現象，具有實作簡單、應用廣泛等優點。為了達成控制系統的強健性，吾人於線型永磁馬達驅動系統的設計上欲採用定結構滑模控制(Fixed Structure Sliding Mode Control)法則。

為了完整起見，本章一開始先探討傳統變結構滑模控制理論，然後再簡單介紹定結構滑模控制理論，接著並將其應用於設計本論文所使用之線型永磁馬達定位控制器。為了更進一步強化定結構滑模控制之動態響應，第五節加入一負載推力擾動估測器，使其前饋至定結構滑模定位控制器，增加控制器動態響應特性。最後一節並提供一些控制器之模擬結果，以顯示該控制器策略之可行性。

3.2 變結構滑模控制原理

茲考慮下列一個定控制值(即 u 為常數)之二階線性非時變系統 [27] :

$$\ddot{x} - \xi \dot{x} + ux = 0, \quad \xi > 0, \quad u \text{ 為常數} \quad (3.1)$$

上式由於具有負阻尼項 $\xi \dot{x}$ 的存在，因此為一開迴路不穩定系統，此時若使用變結構滑模控制，則可達成系統穩定的要求。應用方式可說明如下。茲假設以 $\xi = 3$ ， $u = -4$ 與 $u = 6$ 為例，則分別可以得到兩個線性系統：

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 4x = 0, \quad u = -4 \quad (3.2)$$

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 6x = 0, \quad u = +6 \quad (3.3)$$

分別觀察其在 xy 相平面 (其中 $y = \dot{x}$) 上之系統運動軌跡，當 $u = -4$ 時，不同的初始值所得之相平面上的軌跡如圖 3.1 所示，其中箭頭係表示隨時間增加時之軌跡移動方向，而圖中兩條虛直線則為其漸近線；當 $u = 6$ 時，不同初始值之運動軌跡則如圖 3.2 所示。因此如果能選取適當的切換平面，例如：

$$\sigma = \dot{x} + 0.5x = 0 \quad (3.4)$$

與適當的切換函數

$$u = \begin{cases} 6 & , x\sigma > 0 \\ -4 & , x\sigma < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

即可綜合擷取兩種控制結構之收斂區域，以得到一穩定的變結構控制系統。視 x 與 σ 之正負值，可區分如下四個區域，即：

區域 I : $x > 0$, $\sigma > 0$

區域 II : $x < 0$, $\sigma > 0$

區域 III : $x < 0$, $\sigma < 0$

區域 IV : $x > 0$, $\sigma < 0$

圖 3.3 所示即為 xy 相平面上四個區域圖。假若系統之狀態位於區域 I 及 III 時， $x\sigma > 0$ ，吾人選擇 $u=6$ 之控制；而當系統狀態位於區域 II 及 IV 時， $x\sigma < 0$ ，選擇 $u=-4$ 之控制。則由圖 3.1 及圖 3.2 選擇其對應之運動軌跡綜合在圖 3.3 個別區域內，則可獲得如圖 3.4 所示之一個全域穩定的控制系統，圖中直線為 $\sigma=0$ ，而虛線 AB 為圖 3.1 中之漸近線。由圖 3.4 可以觀察到由此二維平面任一點出發之系統運動軌跡，經由此切換函數作切換控制後，皆可收斂到如 (3.4) 式所示之切換平面上，並沿此平面逼近至目標原點。

為了方便觀察，吾人將相平面的範圍縮小至 $|x| \leq 1$ ， $|y| \leq 1$ 區域。

以下取四組分別位於不同區域的初始條件為例，以單位計算時間(step size)0.01 秒進行模擬，可以分別得到其於相平面的運動軌跡圖如圖 3.5 及圖 3.6 所示。圖 3.5 選定兩組初始值 $(x_0, y_0) = (0.6, 0.6)$ 、 $(-0.6, -0.6)$ 依序分別位於區域 I 及區域 III，可看出此兩組系統運動軌跡，均會沿著順滑面 $\dot{x} + 0.5x = 0$ 收斂至目標原點；而圖 3.6 則選定另兩組初始值進行模擬： $(x_0, y_0) = (-0.1, 0.4)$ 及 $(0.2, -0.3)$ 依序分別位於區域 II 及區域 IV，觀察圖 3.6 可知由 $(-0.1, 0.4)$ 出發之系統軌跡，會自區域 II 通過 x 軸至區域 I，而此時的控制就由原本的 $u=6$ 切換成 $u=-4$ ，並以此結構收斂至順滑面；而由 $(0.2, -0.3)$ 出發的系統運動軌跡則由區域 IV 通過 x 軸至區域 III，而其控制就由原本的 $u=6$ 切換成 $u=-4$ 而收斂至

順滑面。

由此處模擬吾人可觀之，透過不同的控制切換可將原本兩個不穩定的系統整合成一穩定的變結構控制系統，使得由不同初始值出發之系統運動軌跡皆能收斂至順滑面；而當系統運動軌跡處於順滑面上時，系統的響應就由此順滑面決定，而與系統本身的參數無關，故能降低系統參數變化的影響，達成強健控制。此外，由模擬圖亦可觀察到變結構控制系統軌跡在順滑面上因切換控制所產生的切跳現象，此現象亦會激發出系統其它高頻之模態，造成不良之影響。

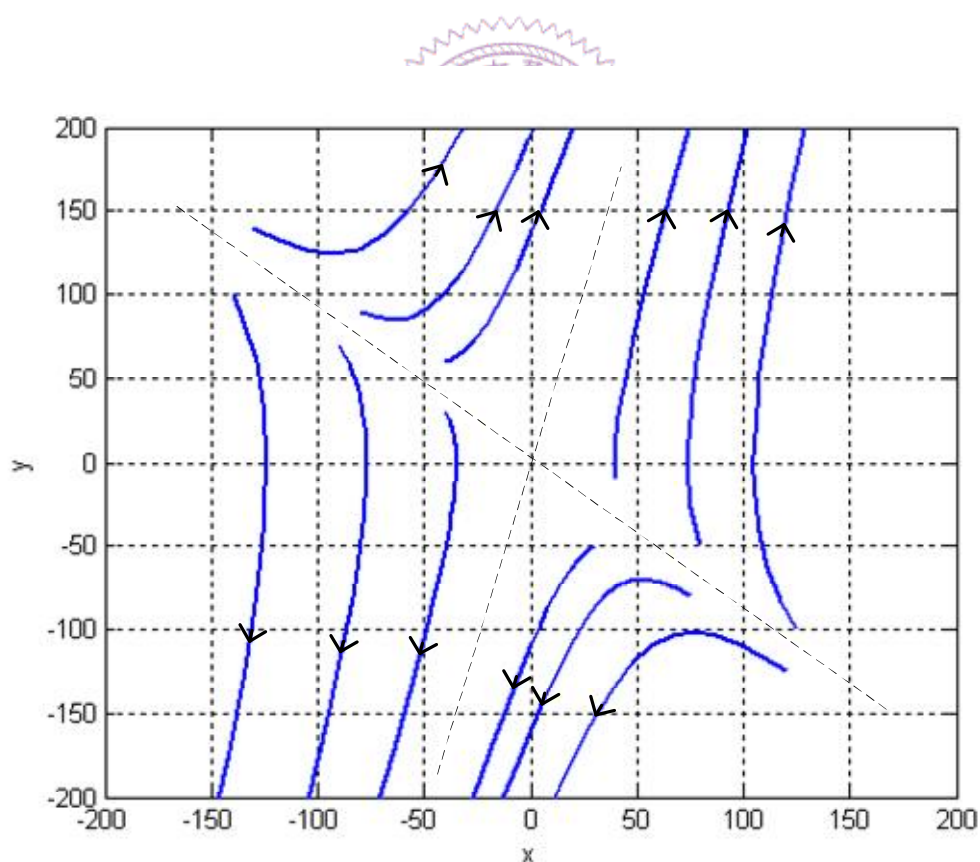


圖 3.1 式(3.2)在不同初始值下所得之運動軌跡($u = -4$)

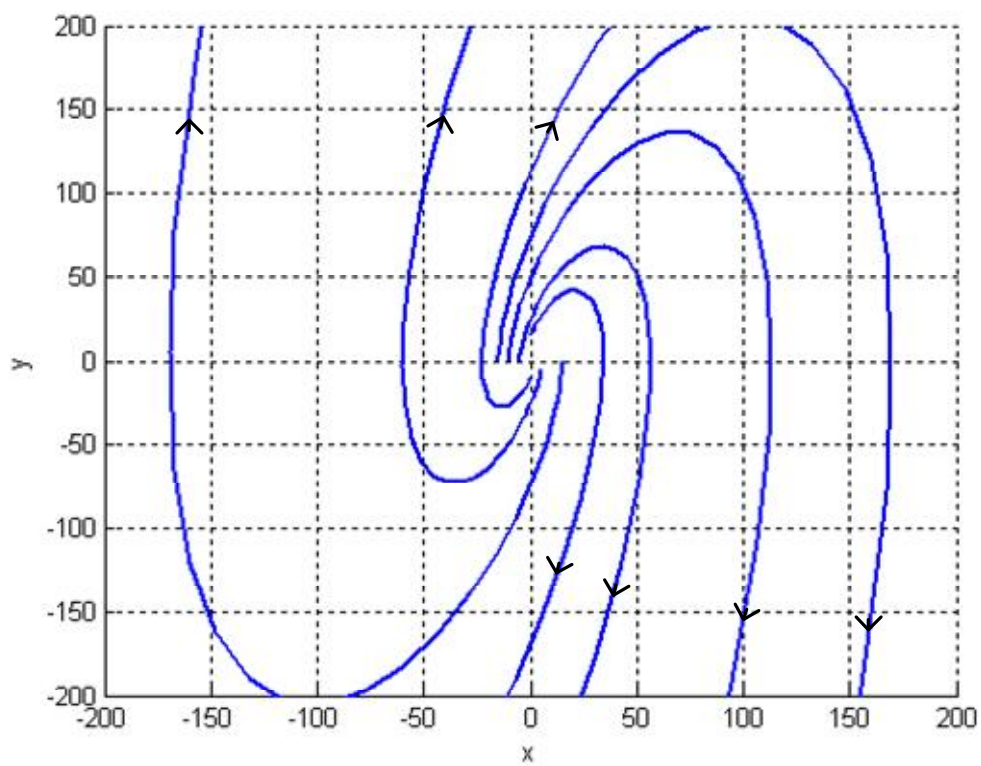


圖 3.2 式(3.3)在不同初始值下所得之運動軌跡($u=6$)

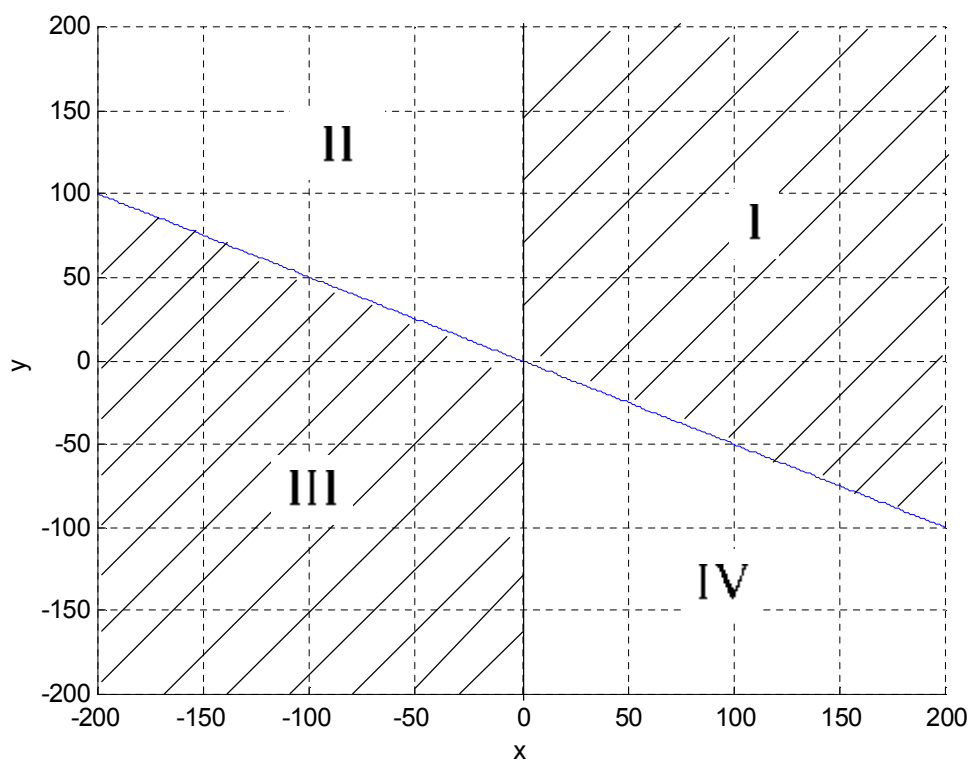


圖 3.3 xy 相平面上的四個區域圖

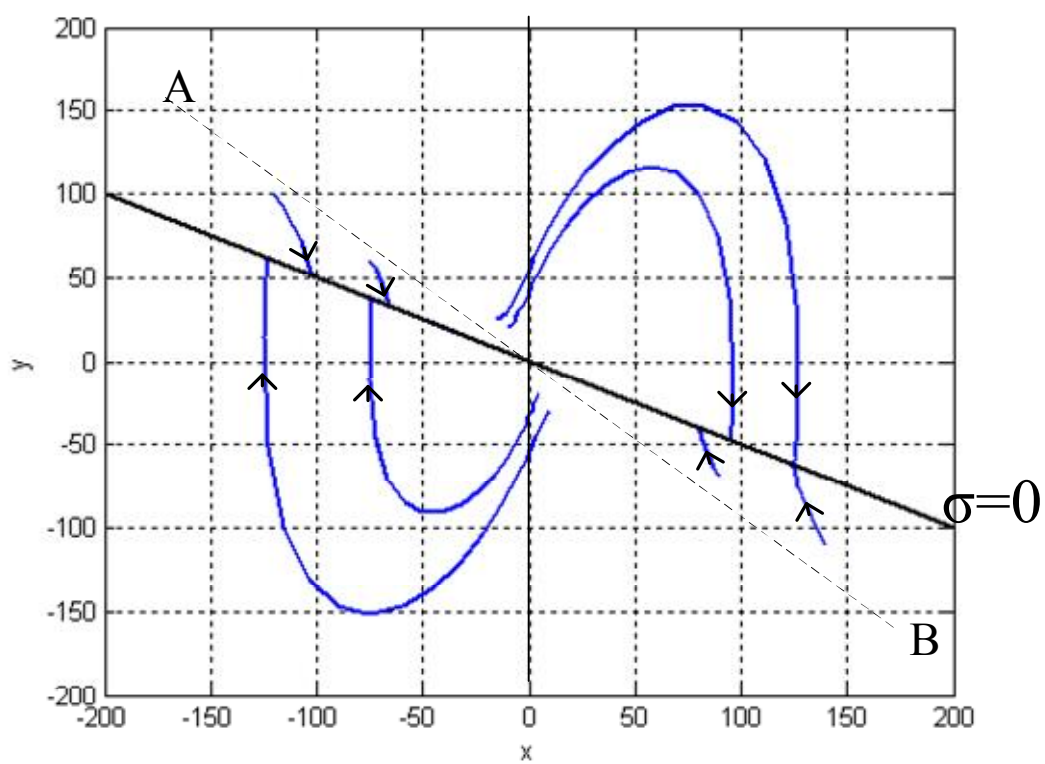


圖 3.4 經切換函數劃分後系統之相軌跡

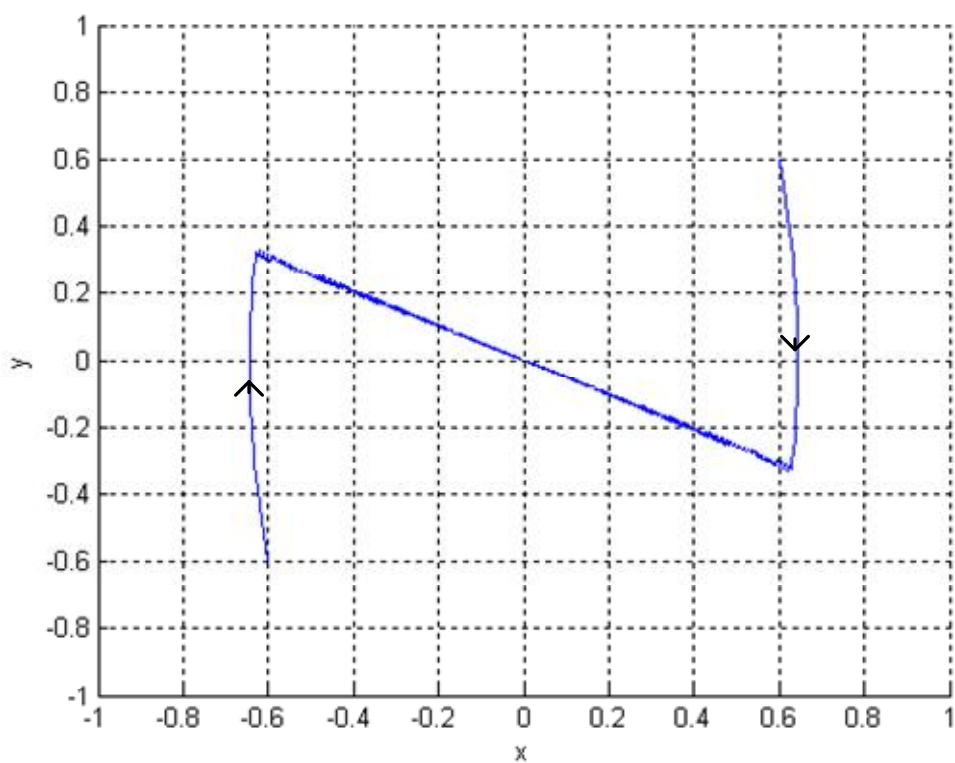


圖 3.5 在不同初始值下變結構控制之系統運動軌跡圖 I

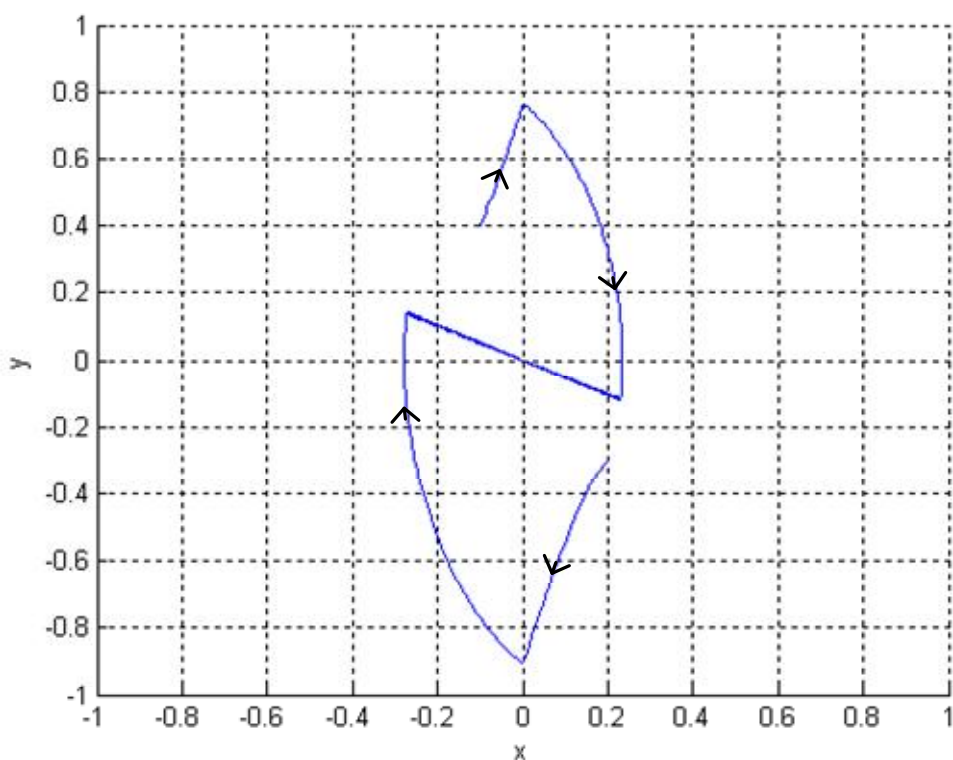


圖 3.6 在不同初始值下變結構控制之系統運動軌跡圖 II

由[28]、[29]等文獻整理出傳統變結構滑模控制應用有以下三要點：

(1)選擇適當的順滑模態區

首先選擇一個包含原點且維數小於系統維數的區域作順滑面： $\mathfrak{R} = \{x | \sigma(x) = 0\}$ ，使得在特定的控制(稱為順滑控制)的作用下，由順滑面內某點出發的相軌跡，會在順滑面上漸近趨近目標原點。這樣的區域稱作順滑模態區。

(2)在迫近模態區下必須滿足兩個條件

當系統狀態於要點(1)所述之順滑平面，經由適當控制 u 之

切換，可沿著順滑平面收斂至目標原點。然而當系統狀態由於受到外部擾動或其他原因而偏離順滑平面上時，為保證系統能獲得全域穩定，必須滿足以下兩個條件，俾使順滑模態區外任一點狀態出發之軌跡經由適當控制(稱為迫近控制)均能在有限的時間內到達順滑面：

$$\text{條件一： } \sigma(x)\dot{\sigma}(x) < 0 \quad (3.6)$$

條件二：在所考慮之狀態空間內僅能包含原點一個平衡點。

條件一可由 Lyapunov 定理證明如下。首先選擇一連續可微分之正定函數 $V(\sigma)$ 作為李亞普諾夫函數(Lyapunov Function)：

$$V(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (3.7)$$

接著對此函數微分可得：

$$\dot{V}(\sigma) = \sigma\dot{\sigma} \quad (3.8)$$



由 Lyapunov 定理可知，只要 Lyapunov 函數之微分小於零，即可確定此系統是全區漸近穩定，亦即條件一： $\sigma(x)\dot{\sigma}(x) < 0$ 必須成立。而條件二能保證在迫近模態區中任意點於任意時間出發的軌跡於時間 t 內到達順滑面($\sigma(x) = 0$)， $t < \infty$ 。

(3)選擇一個可以減輕切跳影響之合適方法

由以上簡介可知，傳統變結構控制藉由選擇一合適的順滑面，同時經由切換不同控制以適當地選擇兩個具不同軌跡收斂特性(或兩個以上)的結構以獲得全域穩定控制。然而實際應用上卻由於系統在

順滑模態時，需要以相當高的切換頻率不停的作變結構切換，產生了切跳現象(Chattering Phenomenon)，如圖 3.5 所示。切跳現象意味著在系統中疊加難以掌握的小振幅的震動，常造成許多非預期的雜訊。這些雜訊很可能會造成不必要的干擾，輕則影響系統的性能，重則導致系統的不穩定，是變結構滑模控制在早期工程應用上的受限之處。

3.3 定結構滑模控制原理

吾人為了能利用變結構滑模控制強健性之優點並且避免產生切跳現象，故本章的控制器設計改採以定結構滑模控制為基礎。定結構滑模控制是根據變結構滑模控制原理，由本(電力電子)實驗室針對線性非時變系統所自行發展出之新型控制法則[18]，除了保留傳統變結構滑模控制設計時的基本條件外，更針對變結構控制切換時的缺點，加入新的限制式，以消除傳統變結構所產生的切跳現象，使系統性能更為穩定。其主要概念可描述如下。首先考慮下列線性非時變系統：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (3.9)$$

其中

$\mathbf{x}: n \times 1$ 狀態變數向量

$\mathbf{A}: n \times n$ 系統矩陣

$\mathbf{B}: n \times m$ 輸入矩陣

$\mathbf{u}: m \times 1$ 輸入向量

接著定義一順滑函數(Sliding Function) $S(x)$ 如下：

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{Gx} \quad (3.10)$$

其中

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{為 } m \times n \text{ 的常數矩陣}$$

而順滑面(Sliding Surface)為 $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ，此順滑面必須包含所要的目標原點，且根據前節所述之變結構控制要點，順滑面 \mathbf{S} 除了目標原點外不能包含有其他的漸近穩定平衡點。定義了順滑面之後，我們希望系統狀態能由起始點於有限的時間內進入順滑面，並在順滑面上朝著目標原點逼進。因此接下來的設計可由以下兩個控制模式設計。其示意圖如圖 3.7 所示。

1. 順滑模式控制：系統軌跡進入此一順滑平面後，必須沿此順滑平面朝目標點前進並收斂於目標點，則此一控制模式稱為順滑模式控制(Sliding Mode Control)，或簡稱滑模控制。

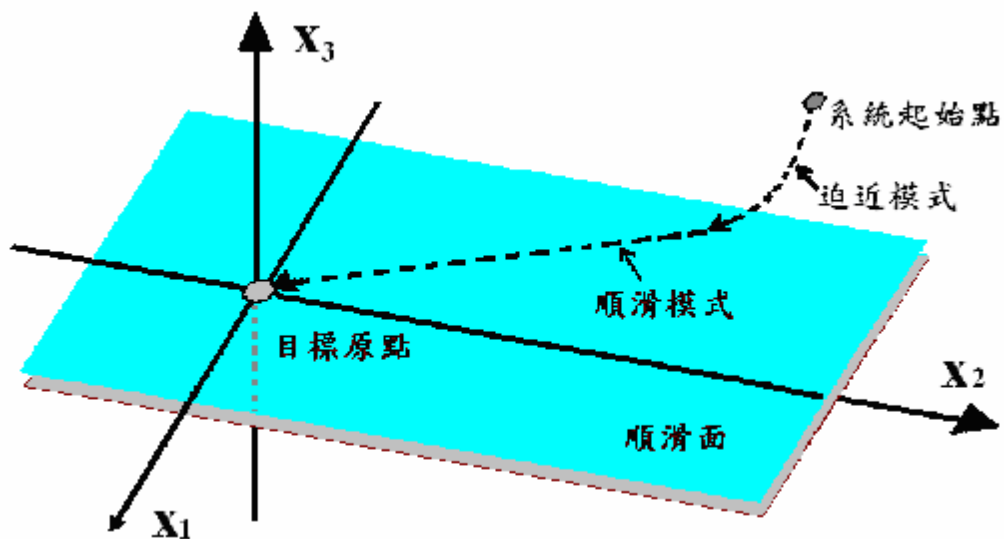


圖 3.7 定結構滑模控制示意圖

2. 迫近模式控制：當系統軌跡偏離順滑平面 $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 時，為確保其能於有限時間內收斂至順滑平面所需稱為迫近模式控制(Reaching Mode Control)。

首先考慮順滑模式控制，在此模式中假設系統的狀態已經落在順滑面上，為了確定軌跡能沿著順滑面 \mathbf{S} 趨近原點，必須施加一個滑模控制 \mathbf{u}_s 以滿足下式：

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}[\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}_s] = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

由(3.11)式可求得順滑模式之控制 \mathbf{u}_s ：

$$\mathbf{u}_s = -(\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{GAx} \quad (3.12)$$

當系統狀態偏離順滑面上時，則屬於迫近模式。在此模式中，需增加一額外的控制力 \mathbf{u}_r ，稱為迫近模式控制，以確保系統狀態能收斂至順滑面 ($\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$) 上。另外，為了避免傳統變結構滑模控制中的切跳現象對系統造成干擾或穩定性的問題，尚需要對此外加兩個限制條件分別如下：

$$\tau \mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} > -\mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{S}} < 0 \quad (3.14)$$

其中定義 τ 為一個非常小的正實數，其物理概念乃象徵一小段時間。 τ 的選擇在使用數位訊號處理器(DSP)數位化實現的時候可以信號的取樣週期考慮之。由於 τ 相對於系統狀態軌跡的變化速度而言是為一個甚小的值，因此限制式(3.13)的意義可藉由泰勒級數展開之一階近似法推導得知，用以確保目前系統狀態與下一瞬間的系統狀態都處於順滑面的同一側，即：

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^T(t_k)\mathbf{S}(t_k + \tau) &> \mathbf{0} \\
\Rightarrow \mathbf{S}^T(t_k)(\mathbf{S}(t_k) + \tau\dot{\mathbf{S}}(t_k)) &> \mathbf{0} \\
\Rightarrow \mathbf{S}^T(t_k)\mathbf{S}(t_k) + \tau\mathbf{S}^T(t_k)\dot{\mathbf{S}}(t_k) &> \mathbf{0} \\
\Rightarrow \tau\mathbf{S}^T(t_k)\dot{\mathbf{S}}(t_k) &> -\mathbf{S}^T(t_k)\mathbf{S}(t_k)
\end{aligned}$$

如此即可免除變結構控制所產生的切跳現象。而滿足限制(3.14)則可保證狀態軌跡收斂到順滑面，也就是前述之(3.6)式條件一。此時，令

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_r \quad (3.15)$$

並將 (3.9)、(3.10)、(3.12)、(3.15)式分別代入限制式(3.13)、(3.14)中，將可得以下兩式：

$$\mathbf{S}^T[\tau\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x} + \tau\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{u}_s + \tau\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{u}_r] > -\mathbf{S}^T\mathbf{S} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{S}^T[\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{u}_s + \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{u}_r] < \mathbf{0} \quad (3.17)$$

再引入一實變數 p ，俾使(3.16)、(3.17)兩不等式可以巧妙地同時滿足：

$$\tau\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x} + \tau\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{u}_s + \tau\mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{u}_r = -p\mathbf{S} \quad (3.18)$$

其中 $0 < p < 1$ 。將 (3.12)式代入(3.18)式中消去 \mathbf{u}_s 項，可以求出迫近模式控制 \mathbf{u}_r 為：

$$\mathbf{u}_r = -\frac{p}{\tau}(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{G}\mathbf{x} \quad (3.19)$$

因而由 (3.12)、(3.19)式可得到最後的總和控制項 \mathbf{u} ：

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_r = -(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{G}\left(\mathbf{A} + \frac{p}{\tau}\mathbf{I}\right)\mathbf{x}, \quad 0 < p < 1 \quad (3.20)$$

具有此定結構滑模控制法則的控制輸入式，即可針對不同的系統設計其所專屬的定結構滑模控制器。吾人將以此為基礎，運用定結構滑模控制於線型永磁馬達之機械控制迴路，以達到定位控制目的。

3.4 線型馬達之定結構滑模定位控制器

本節乃利用上述定結構滑模控制之理論，配合線型永磁馬達數學模型，設計定位控制器。首先定義位置誤差、速度誤差及二者積分項之和，依序分別為狀態變數 y_1 、 y_2 與 y_3 ：

$$y_1 \quad \varepsilon_x = x^* - x \quad (3.21)$$

$$y_2 \quad \varepsilon_v = v^* - v \quad (3.22)$$

$$y_3 \quad \int (D_x \varepsilon_x + D_v \varepsilon_v) dt \quad (3.23)$$

其中定義積分項之和為狀態變數 y_3 ，目的是為了消除系統的穩態誤差。 D_x 為 ε_x 積分項之係數，而 D_v 為 ε_v 積分項之係數，二者皆待最後極點配置時調整。接著根據線型馬達機械推力對速度特性可寫出如下關係：

$$\varepsilon_v = v^* - v = v^* - \frac{A}{Ms + B} (F - F_L) \quad (3.24)$$

其中 M 為此線型馬達動子的質量， B 為其摩擦係數， A 為驅動器之係數，其數值可以系統鑑別方式求得， F 為線型馬達機械推力及 F_L 為其負載，而以 s 表示對時間微分之運算子。相對於機械系統，電氣系統動態響應非常快速(本論文中所討論之系統設計約為十倍左右)，因而此處可將變頻器視為一增益為 K_i 之功率放大器以進行滑模控制器之外迴路設計。於是上式之機械推力 F ，可近似理想地寫成電磁推力

命令 F_e^* 乘上 K_t 倍：

$$\varepsilon_v = v^* - \frac{A}{M_S + B}(K_t F_e^* - F_L) \quad (3.25)$$

上式移項整理後可求出描述速度誤差之微分方程式如下：

$$\dot{\varepsilon}_v = -\frac{B}{M}\varepsilon_v - \frac{A}{M}(K_t F_e^* - F_L) + \frac{B}{M}v^* + \dot{v}^* \quad (3.26)$$

其位置誤差微分方程式為：

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{d}{dt}x^* - \frac{d}{dt}x = v^* - v = \varepsilon_v \quad (3.27)$$

吾人可將(3.23)、(3.26)與(3.27)式化為下列矩陣表示式：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M} & 0 \\ D_x & D_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{M} \\ 0 \end{bmatrix} (K_t F_e^* - F_L) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{B}{M}v^* + \dot{v}^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

並對輸入項作一些整理，如下：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M} & 0 \\ D_x & D_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \left(K_t F_e^* - F_L - \frac{B}{A}v^* - \frac{M}{A}\dot{v}^* \right) \quad (3.29)$$

Ay + Bu

其中

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M} & 0 \\ D_x & D_v & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u = K_t F_e^* - F_L - \frac{B}{A} v^* - \frac{M}{A} \dot{v}^* \quad (3.30)$$

一旦上述控制 u 求得後，吾人可由(3.30)式獲得所需之 F_e^* 命令：

$$F_e^* = \frac{1}{K_t} \left(u + F_L + \frac{B}{A} v^* + \frac{M}{A} \dot{v}^* \right) \quad (3.31)$$

基於上述機械系統之狀態方程式，吾人可據以設計一定結構滑模定位控制器。首先定義一順滑面 \mathbf{S} ，令此線型馬達機械系統之動態響應軌跡沿著此順滑面收斂至目標原點， \mathbf{S} 定義如下：

$$\mathbf{S} = \mathbf{G}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.32)$$

接著同樣分兩步驟來推導控制輸入項：

1. 滑模控制：為使系統軌跡沿順滑面滑動，利用(3.29)、(3.32)式及(3.12)

式可得在順滑模式下之控制項 u_s ：

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}u_s) = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{G}\mathbf{B}u_s = 0 \quad (3.33)$$

因此由(3.33)式可求得滑模控制如下：

$$\begin{aligned}
u_s &= -(\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{GA} \mathbf{y} \\
&= - \left(\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M} & 0 \\ D_x & D_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{M}{Ag_2} \left(g_3 D_x y_1 + \left(g_1 - g_2 \frac{B}{M} + g_3 D_v \right) y_2 \right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

2. 迫近模式控制：其中 τ 為相對此機械系統動態特性作滑模控制的一個微小的正實數。

$$-\mathbf{S}^2 < \tau \mathbf{S} \dot{\mathbf{S}} < 0 \tag{3.35}$$

吾人可令：

$$\tau \dot{\mathbf{S}} = -p \mathbf{S}, \quad 0 < p < 1 \tag{3.36}$$



則可以同時滿足(3.35)式中兩個不等式條件。將(3.29)及(3.32)式代入式(3.36)中，求得迫近模式之控制輸入 u_r ：

$$\begin{aligned}
u_r &= -\frac{p}{\tau} (\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{y} \\
&= -\frac{p}{\tau} \cdot \left(\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{p}{\tau} \frac{M}{Ag_2} (g_1 y_1 + g_2 y_2 + g_3 y_3)
\end{aligned}$$

$$= \frac{p}{\tau} \frac{Mg_1}{Ag_2} y_1 + \frac{p}{\tau} \frac{M}{A} y_2 + \frac{p}{\tau} \frac{Mg_3}{Ag_2} y_3 \quad (3.37)$$

由(3.34)、(3.37)式得到總和的定結構滑模定位控制輸入項 u ：

$$\begin{aligned} u &= u_s + u_r \\ &= \left(\frac{p}{\tau} \frac{Mg_1}{Ag_2} + \frac{Mg_3}{Ag_2} D_x \right) y_1 + \left(\frac{p}{\tau} \frac{M}{A} + \frac{M}{Ag_2} \left(g_1 - g_2 \frac{B}{M} + g_3 D_v \right) \right) y_2 \\ &\quad + \left(\frac{p}{\tau} \frac{Mg_3}{Ag_2} \right) y_3 \\ &= \frac{M}{A} \left[\left(\frac{p}{\tau} \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_3}{g_2} D_x \right) y_1 + \left(\frac{p}{\tau} + \frac{g_1}{g_2} - \frac{B}{M} + \frac{g_3}{g_2} D_v \right) y_2 + \frac{p}{\tau} \frac{g_3}{g_2} y_3 \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

有關順滑面方程式 $\mathbf{G}(\mathbf{y})$ 、逼近控制係數 p 、正實數 τ 以及係數 D_x 、 D_v ，可由其閉迴路系統之極點設定位置決定之。將(3.38)式控制輸入項代入動態系統方程式(3.29)，並加入(3.32)限制式，可化簡得：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{M} & 0 \\ D_x & D_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{M}{A} \left[\left(\frac{p}{\tau} \frac{g_1}{g_2} + \frac{g_3}{g_2} D_x \right) y_1 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p}{\tau} + \frac{g_1}{g_2} - \frac{B}{M} + \frac{g_3}{g_2} D_v \right) y_2 + \frac{p}{\tau} \frac{g_3}{g_2} y_3 \right] \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g_3}{g_2}D_x & -\frac{g_1}{g_2} - \frac{g_3}{g_2}D_v & 0 \\ D_x & D_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_{cl} \mathbf{y} \quad (3.39)$$

上式中 \mathbf{A}_{cl} 定義如下：

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g_3}{g_2}D_x & -\frac{g_1}{g_2} - \frac{g_3}{g_2}D_v & 0 \\ D_x & D_v & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

其閉迴路極點 λ 可由下列行列式求得：

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -\frac{g_3}{g_2}D_x & -\frac{g_1}{g_2} - \frac{g_3}{g_2}D_v - \lambda & 0 \\ D_x & D_v & -\lambda \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (3.41)$$

式(3.41)展開可得特徵方程式，如下：

$$\lambda \left[\lambda^2 + \left(\frac{g_1}{g_2} + \frac{g_3}{g_2}D_v \right) \lambda + \frac{g_3}{g_2}D_x \right] = 0 \quad (3.42)$$

由上式(3.42)得到此機械系統的一個極點落在 0，乃為積分控制項，而另外二極點可由比較係數的方法任意配置。由此可知，有了此極點之解析式，吾人甚容易藉此設計系統參數，即可輕易地將極點配置於 s 左半平面之適當位置，而得到一個穩定且能符合規格要求的動態響應。

圖 3.8 所示即為此線型永磁馬達定位控制系統之方塊圖。其中將電氣系統推力控制之內迴路以 K_t 表示；線型永磁馬達轉移函數以一階系統 $\frac{A}{Ms+B}$ 近似；回授馬達位移 x 與位移命令 x^* ，兩者相減產生位移誤差 y_1 ，回授馬達移動速度 v 與速度命令 v^* ，兩者相減產生速度誤差 y_2 ， y_1 與 y_2 相加個別乘增益 D_x 、 D_v ，之後再積分產生 y_3 ；此外分別前饋速度命令 v^* 與速度命令的微分項 \dot{v}^* 至定結構滑模控制器 (FSSMC) 以此加快系統轉速之動態響應，並具備位移追蹤(Tracking)的功能。

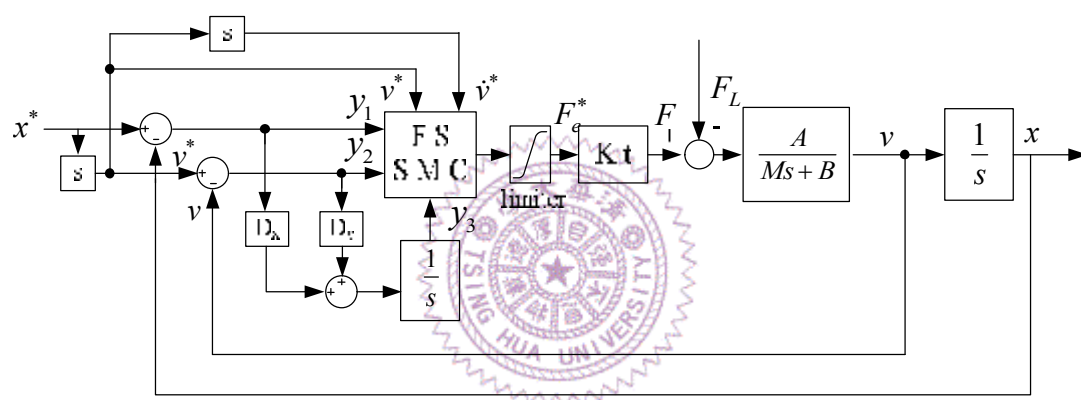


圖 3.8 線型永磁馬達定位控制系統方塊圖

3.5 負載推力擾動估測器

觀察(3.31)式與圖 3.8 之架構圖比較，其速度命令 v^* 與速度命令的微分項 \dot{v}^* 都有前饋至定結構滑模控制器，唯獨負載推力 F_L 在實際的應用中無法以感測器 (Sensor) 量得。故吾人設計一估測器 (Estimator)，將 F_L 的資訊前饋至定結構滑模定位控制器內，俾增加此控制器之動態響應速度。

於此，吾人使用降階估測器 (Reduced-order Estimator) [30]，其優點在於可減少待測訊號的感測器數目，降低估測系統的階數，減少雜

訊對估測訊號之影響。

為了完整起見，吾人先討論一般狀況案例，再針對本論文所需做設計。考慮一需要估測的系統如下[30]：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} u \quad \mathbf{F} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \mathbf{G}u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

其中 x_a :可由感測器直接量測訊號之狀態變數

x_b :需要估測訊號之狀態變數

u :輸入

y :輸出

\mathbf{F}, \mathbf{G} :為已知常數矩陣

將(3.43)式展開，則需估測狀態 x_b 之方程式為：

$$\dot{x}_b = F_{bb}x_b + F_{ba}x_a + G_b u \quad (3.44)$$

定義 \hat{x}_b 為 x_b 之估測值，且令

$$\tilde{x}_b = x_b - \hat{x}_b \quad (3.45)$$

對(3.45)式兩邊微分：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}_b &= \dot{x}_b - \dot{\hat{x}}_b \\ &= F_{bb}x_b + F_{ba}x_a + G_b u - \dot{\hat{x}}_b \\ &\quad (F_{bb} - lF_{ab}) \tilde{x}_b \end{aligned} \quad (3.46)$$

其中 $F_{bb} - lF_{ab}$ 之特徵值，可由設計 l 值而使其均在左半平面，使得 t 趨

近於無窮大時， \tilde{x}_b 趨近於零，意即 $\hat{x}_b \approx x_b$ ，則吾人可得有效之估測

值 \hat{x}_b 。

將(3.44)式代入(3.46)式：

$$F_{bb}x_b + F_{ba}x_a + G_b u - \dot{\hat{x}}_b = (F_{bb} - lF_{ab})(x_b - \hat{x}_b) \quad (3.47)$$

式(3.47)經整理後可得：

$$\dot{\hat{x}}_b = F_{bb}\hat{x}_b + F_{ba}y + G_b u + l(\dot{y} - F_{aa}y - G_a u - F_{ab}\hat{x}_b) \quad (3.48)$$

式(3.48)又可改寫為：

$$\dot{\hat{x}}_b = (F_{bb} - lF_{ab})\hat{x}_b + (F_{ba} - lF_{aa})y + (G_b - lG_a)u + l\dot{y} \quad (3.49)$$

式(3.49)中由於含有 \dot{y} 微分項，實作時會因為微分器誤差放大而雜訊過高，無法準確估測 \hat{x}_b ，所以吾人定義一新的狀態 x_c ，令其為：

$$x_c = \hat{x}_b - ly \quad (3.50)$$

將(3.50)代入(3.49)式中，則由新狀態變數 x_c 所實現之降階估測器為：

$$\dot{x}_c = (F_{bb} - lF_{ab})\hat{x}_b + (F_{ba} - lF_{aa})y + (G_b - lG_a)u \quad (3.51)$$

觀察(3.51)式， \dot{y} 已不復見，吾人亦可得最後降階估測器之結果，其方塊圖如圖 3.9 所示。

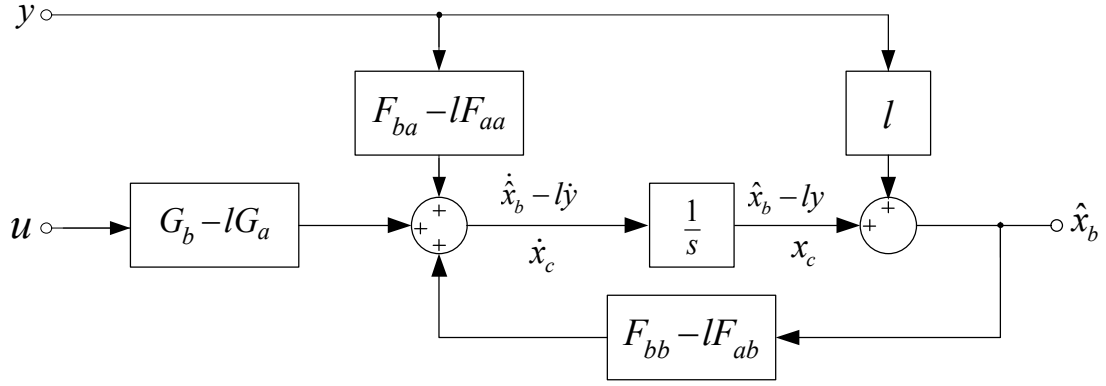


圖 3.9 降階估測器方塊圖

接著吾人將推導本論文實際使用之估測器。由電磁推力方程式 (2.62) 式：

$$F_e^* = M \frac{dv}{dt} + Bv + F_L \quad (3.52)$$

其中： F_e^* 為定結構滑模定位控制器所輸出之電磁推力命令， M 為線型馬達動子質量， B 為摩擦黏滯係數， F_L 為負載推力。若考慮不確定項(Uncertainty)，則(3.52)式可改寫為：

$$F_e^* = (M_0 + \Delta M) \frac{dv}{dt} + (B_0 + \Delta B)v + F_L \quad (3.53)$$

其中 M_0, B_0 為標稱值(Nominal Value)
 $\Delta M, \Delta B$ 為變動量

由(3.53)式，吾人可得：

$$\frac{dv}{dt} = -av - bF_e^* - bw \quad (3.54)$$

其中

$$a = \frac{B_0}{M_0}$$

$$b = -\frac{1}{M_0}$$

$$w = F_L + \Delta M \frac{dv}{dt} + \Delta B v \quad (\text{不確定項之總和})$$

在不確定項總和 w 中，由於 ΔM 與 ΔB 之變動都不大，所以 F_L 主導 w 之變動，又因為 F_L 的變動不會在瞬間變化，於是吾人可假設其在很短暫的取樣時間內為常數。由以上之假設，吾人便可將欲估測之 w 與可量測之 v 代入(3.43)式：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} F_e^* \\ y = v &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.55)$$

將(3.55)式代入(3.48)式，可得閉回路估測器為：

$$\dot{\hat{w}} = 0 + l(\dot{y} + ay + bF_e^* + b\hat{w}) \quad (3.56)$$

其中 l 為閉回路增益

\hat{w} 表示 w 之估測狀態

吾人定義 w 之估測誤差 \tilde{w} 為：

$$\tilde{w} = w - \hat{w} \quad (3.57)$$

由於先前的討論，與數位控制器的取樣頻率相比， w 變化算是相當緩慢，其微分為零，因此吾人可得此估測誤差之動態方程式為：

$$\frac{d}{dt}\tilde{w} = -\frac{d}{dt}\hat{w} = -l(\dot{y} + ay + bF_e^* + b\hat{w}) \quad (3.58)$$

將(3.54)式代入(3.58)式，得：

$$\frac{d}{dt}\tilde{w} = lb\tilde{w} \quad (3.59)$$

吾人可由：

$$(s - lb) = 0 \quad (3.60)$$

視需要配置極點，求得 l 。此 l 值必須審慎擇之，若取太大時，雖然可使快速收斂，其估測訊號 \hat{w} 也會引入雜訊；若太小，則降低收斂速度。在實作時，可視系統狀況而做調整。式(3.58)中由於 \dot{y} 是微分項，實作時會因為微分器誤差放大而雜訊過高，無法準確估測 \hat{w} ，所以吾人定義一新的控制器狀態 x_d ，令其為：

$$x_d = \hat{w} - ly \quad (3.61)$$

則(3.58)式可改寫為：

$$\dot{x}_d = l(ay + bF_e^* + b\hat{w}) \quad (3.62)$$

其方塊圖如圖 3.10 所示。

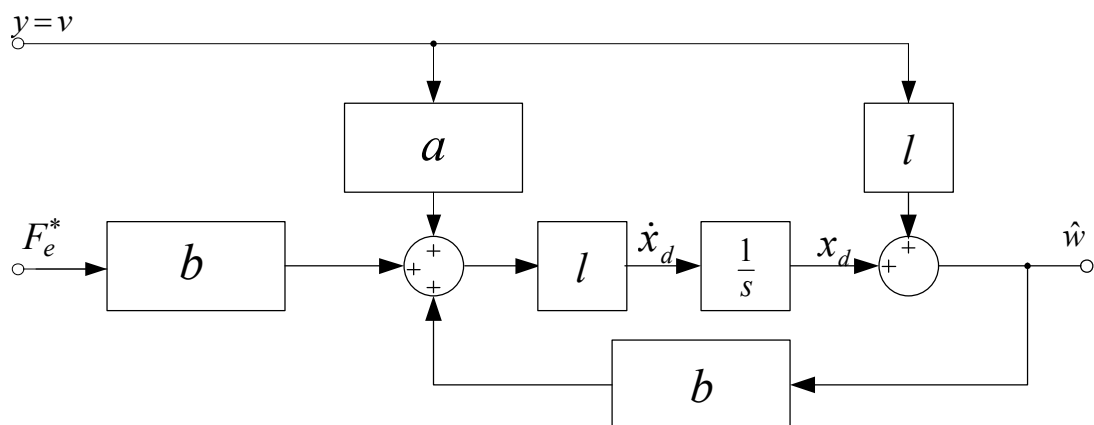


圖 3.10 本論文使用之負載推力估測器方塊圖

上述之負載推力估測器，吾人於實作之作法乃將其估測器用轉移函數方式實現，並直接與定結構滑模定位控制器結合，詳細說明如下：由梅森增益公式(Mason's Gain Formula)，圖 3.10 之方塊圖可寫為：

$$\hat{w}(s) = \frac{l + \frac{la}{s}}{1 - \frac{lb}{s}} v(s) + \frac{\frac{lb}{s}}{1 - \frac{lb}{s}} F_e^*(s) \quad (3.62)$$

接著吾人於數位控制器實作時將(3.62)式中之積分項($\frac{1}{s}$)以後向(Backward)近似法，即：

$$\frac{1}{s} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} T_s \quad (3.63)$$

其中 T_s 為數位控制器之取樣周期

將(3.63)式代入(3.62)式，經整理後可得差分方程式如下：

$$\hat{w}(k) = (1 + lbT_s) \hat{w}(k-1) + (l - laT_s) v(k-1) + lbT_s F_e^*(k-1) \quad (3.64)$$

式(3.64)在數位訊號處理器相當容易實現。接下來吾人將(3.31)式拆成兩項：

$$F_e^* = \frac{1}{K_t} \left(u + \frac{B}{A} v^* + \frac{M}{A} \dot{v}^* \right) + \frac{1}{K_t} F_L \quad (3.65)$$

$$F_{eo}^* + \Delta F_e^*$$

其中 $F_{eo}^* = \frac{1}{K_t} \left(u + \frac{B}{A} v^* + \frac{M}{A} \dot{v}^* \right)$, $\Delta F_e^* = \frac{1}{K_t} F_L$

接著將(3.64)式估測結果 \hat{w} 代入(3.65)式之 F_L ，則原本無法掌控之 F_L 可完全由已知參數取代。至此，負載推力擾動估測器與定結構滑模定位控制器已完美結合。



3.6 模擬結果

為了驗證本論文所提之線型永磁馬達定結構滑模定位控制器的可行性，本節將以數學軟體 MATLAB 模擬之。吾人針對 3.4 節中所推導設計的定結構滑模定位控制系統進行模擬。在 3.4 節之系統控制器最初的設計過程中，將其電氣子系統內迴路假設為一增益為 K_t 之功率放大器，其理由在於吾人所設計之電流內迴路頻寬為機械外迴路之十倍，故可將此電氣內迴路取代為 K_t ，整合至線型永磁馬達之機械系統同時進行模擬，以增加模擬的正確性，並驗證此定結構滑模定位控制器之設計。首先訂定此機械系統於定位步級響應之規格：

1. 定位響應之最大超越量百分比 $mo\%$ 為零。
2. 定位之安定時間 t_s 小於 125ms

3. 定位之上升時間 t_r 小於 105ms

4. 定位穩態誤差為 2%以內。

其中最大超越量百分比， $mo\%$ ，定義如下式所示：

$$mo\% = \frac{x_{\max} - x_{ss}}{x_{ss}} \times 100\% \quad (3.63)$$

其中 x_{\max} 與 x_{ss} 分別為系統狀態變數響應之最大值與穩態值；安定時間 t_s 則定義為系統動態響應衰減且停留在最終值誤差 5%以內所需的時間；而上升時間 t_r 為系統步級響應中，由穩態值 10%到 90%所需的時間。模擬使用的線型永磁馬達參數如表 3.1 所示。

接著根據 3.4 節所推導出的特徵方程式(3.42)式設計此機械系統之控制器參數 $G(y)$ 、 p 、時間常數 τ 以及係數 D_x 與 D_v 。其中

表 3.1 線型馬達參數表

輸出功率	240W
連續推力	108N
額定電壓	120V
額定電流	2A
反電動勢常數	29.3V _{rms} /(m/s)
M	0.58kg
R _s	6.7Ω
L _s	4.4mH

$\tau = 1ms$ 。模擬位置變化由 0 cm 至 1 cm 的步階響應，波形如圖 3.11 所示，可知線型永磁馬達定位之步階響應為： $mo\% = 0$ ； $t_s = 85ms$ ； $t_r = 75ms$ ，符合規格要求，其中位置命令有一明顯斜率，乃由於為了配合實際加速狀況。而此時順滑面 $G(y)$ 與其微分 $\dot{G}(y)$ 之關係圖如圖 3.12 所示。軌跡 I 為加速狀況，軌跡 II 為減速狀況，由圖 3.12 可知，兩者最後皆收斂至原點。

至此為了驗證此定結構滑模定位控制器之強健性，吾人考慮機械系統中質量 M 值的變動所造成之影響，設計使線型永磁馬達之 M 值正負變化 50% 時之定位步級響應，模擬如圖 3.13 所示。由圖 3.13 可知，當質量減少為 $0.5M$ 時轉速響應加快；當質量值上升為 $1.5M$ 時轉速響應較緩，但仍能符合規格要求。

最後吾人驗證 3.5 節中的負載推力擾動估測器。首先吾人驗證開迴路時估測器之準確度。在時間 1.5 秒時加入一負載為 10 牛頓之推力，由圖 3.14 可觀察估測器開迴路時估測結果相當準確，也證明其可行性，接著吾人將估測器估測之結果前饋至定結構滑模定位控制器，其結果如圖 3.15 所示。由圖 3.15 可觀察出具前饋控制之效果相當顯著。

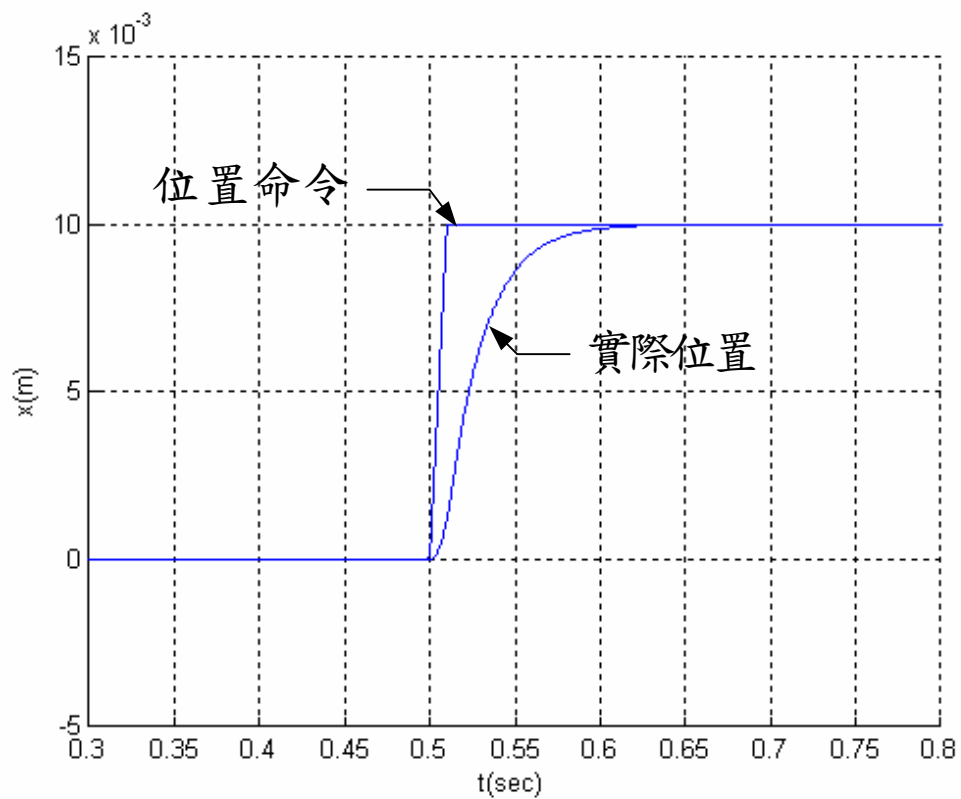


圖 3.11 定結構滑模定位控制器之定位步階響應

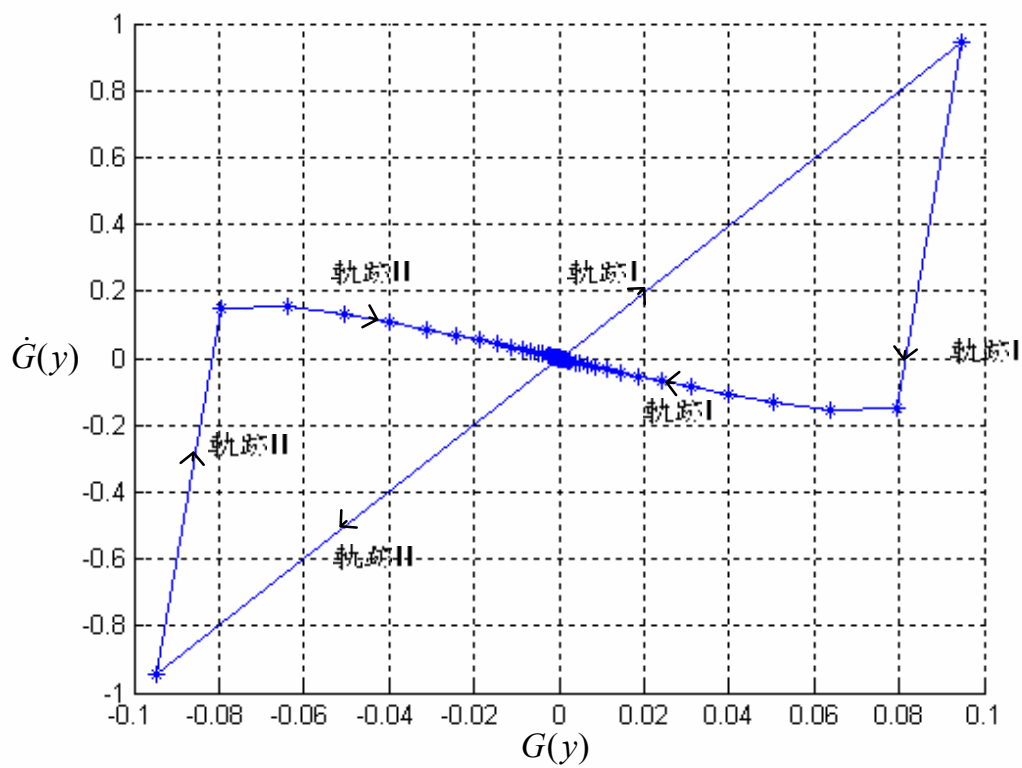


圖 3.12 順滑函數 $G(y)$ 及其微分 $\dot{G}(y)$ 之關係圖

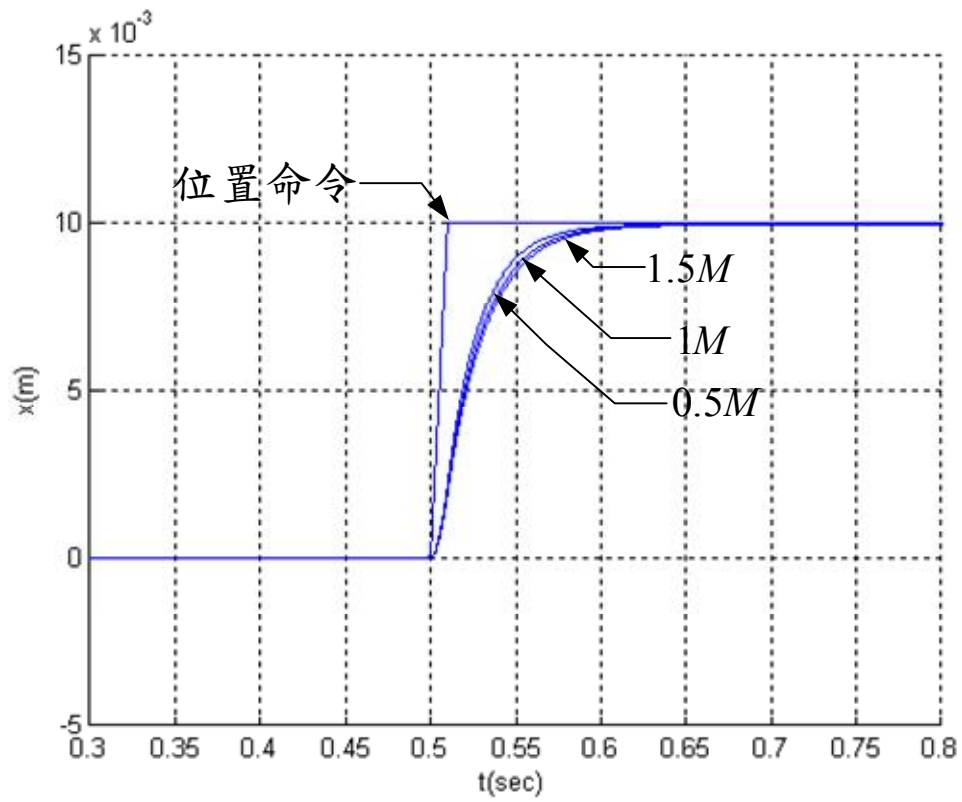


圖 3.13 動子質量 M 值改變時線型永磁馬達之定位步階響應

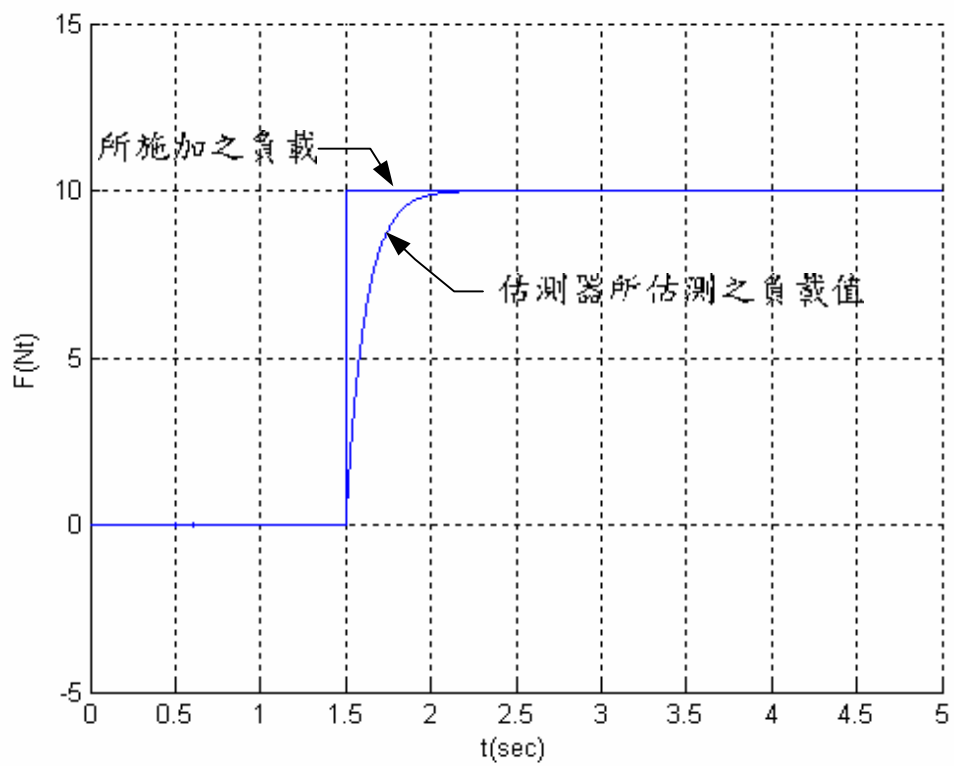


圖 3.14 負載擾動估測器之估測結果

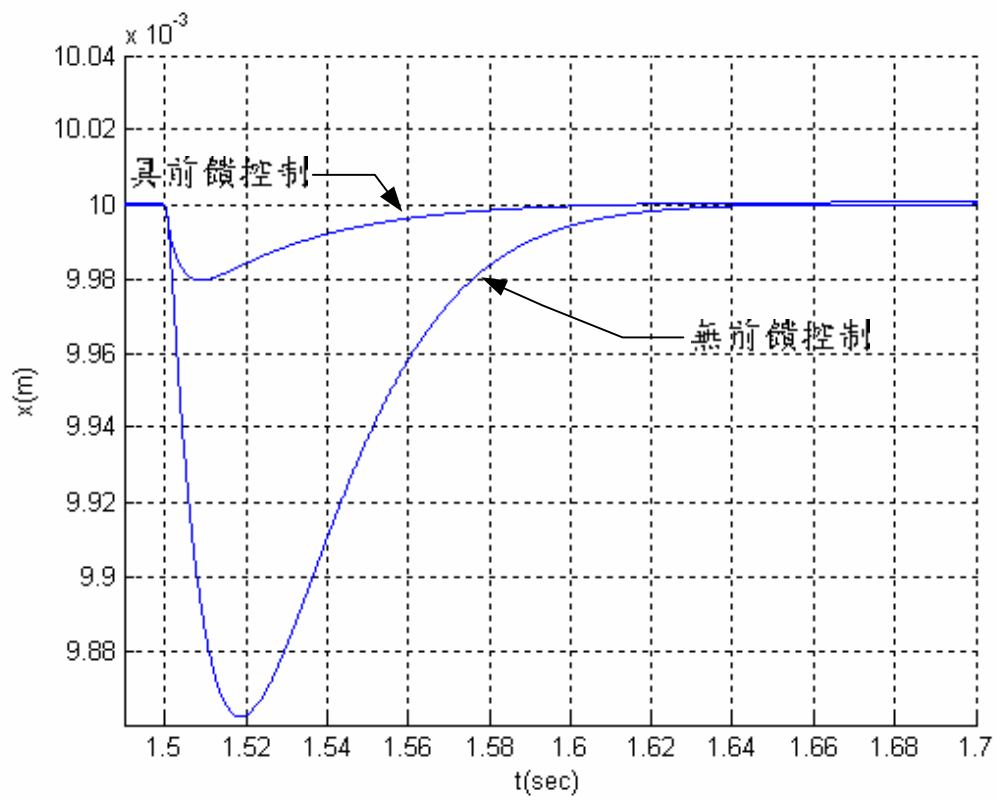


圖 3.15 前饋控制器之效果模擬

