＊作答前,請先核對試題、答案卷（試卷）與准考證上之所組別與考試科目是否相符!!

這份試卷有 9 大題， 共計 100 分。
下列問題不是依照難易度排列， 不必依序作題。但請詳細提供所有過程!

1. $\boxed{5分}$ 試給一組滿足下列兩條件的 3×3 方陣 P 及 Q。

(i) $P\begin{pmatrix}2&2&4\\4&6&8\\6&4&8\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$。

(ii) P 及 Q 的行列式都是 1。

2. $\boxed{5分}$ 令 $\mathbb{F}_5=\{0,1,2,3,4\}$ 是一 5 元素的有限體。試求五元一次方程組

$$\begin{cases} x+y+z+w+v &=0\\ 2x+y+z+w+v &=0\end{cases}$$

佈於 $\mathbb{F}_5$ 解 (x,y,z,w,v) 的個數。

3. $\boxed{8分}$ 令 $A=\begin{pmatrix}7&15\\-2&-4\end{pmatrix}$，請找一個實方陣 B 使得 $B^{-1}AB$ 是對角方陣〈亦即除對角線外均爲 0 的方陣〉。

4. $\boxed{12分}$ 請問下列方陣中那些是相似(similar)的？

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&5\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}。$$

5. (a) $\boxed{7分}$ 設 V_1,V_2 爲向量空間 V 的子空間，請證明或反證：

$$V=V_1\oplus V_2\Leftrightarrow \dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)=\dim V。$$

(b) $\boxed{7分}$ 設 V_1,V_2 爲向量空間 V 的子空間，請證明或反證：

$$V_1\cup V_2 \text{ 爲 } V \text{的子空間} \Leftrightarrow V_1\subset V_2 \text{ 或 } V_2\subset V_1。$$

6. (a) $\boxed{5分}$ 試求 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$ 的反矩陣 A^{-1}。

(b) $\boxed{5分}$ 試求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 的反矩陣。

7. 試判斷以下敘述的對錯，並證明你認爲對的敘述，或給錯誤敘述舉一反例。

(a) $\boxed{5分}$ 任兩對稱 $n\times n$ 矩陣 A, B，其乘積 AB 也必是一對稱 $n\times n$ 矩陣。

(b) $\boxed{5分}$ 如果 P 是 $\mathbb{R}^2$ 上佈於 $\mathbb{R}$ 的線性變換(linear transformation)，並滿足 $P^2(u) = P(u)$，所有 $u\in\mathbb{R}^2$，則對任意與 P 的值域垂直的向量 v (即 $v\in(f(\mathbb{R}^2))^{\perp}$)，必定 $f(v)=0$。

(c) $\boxed{5分}$ 特徵多項式(characteristic polynomial) 爲 x^2-1 的 2×2 矩陣必可逆(invertible)。

(d) $\boxed{5分}$ 任意向量空間上的一對一(injective)線性變換必是映成(surjective)。

8. $\boxed{12分}$ 令 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$。請證明所有的實方陣 B 使得 $AB=BA$ 一定可寫成 $sI+tA$ 的型式，這裡 $s,t\in\mathbb{R}$。

9. (a) $\boxed{7分}$ 試求每一位置都是 1 的 $n\times n$ 矩陣 $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 的所有特徵值及其重覆度(multiplicity)。

(b) $\boxed{7分}$ 求 $J-I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ 的所有特徵值及其重覆度。