

國立交通大學八十九學年度碩士班入學考試試題

科目名稱：線性代數(261)(271)

考試日期：89年4月23日 第1節

系所班別：應用數學學系 組別：甲組/乙組

第 / 頁, 共 / 頁

\*作答前, 請先核對試題、答案卷(試卷)與准考證上之所組別與考試科目是否相符!!

這份試卷有 7 大題，共計 100 分。  
下列問題不是依照難易度排列，不必依序作題。但請詳細提供所有過程!

- 令  $V$  是所有  $n \times n$  的實方陣所構成的向量空間，其中向量的加法為一般方陣的加法，而常數與向量的乘法是一般常數與方陣的乘法。假設  $A \in V$ 。
  - 5分 請問向量  $v_1, \dots, v_k$  是線性獨立(linearly independent)的定義為何？
  - 5分 請問  $V$  的維數(dimension)是多少？
  - 5分 請說明  $A, A^2, \dots, A^{n-1}$  是線性相依(linearly dependent)的理由。
- 令  $A, B$  為  $n \times n$  實方陣。
  - 5分 試證  $\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$ 。
  - 10分 試證  $n - \text{rank}(A) \geq \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$ 。
- 令  $A$  是一個  $n \times n$  對稱實方陣(real symmetric matrix)。
  - 5分 試證  $A$  的零空間(nullspace)與值空間(range)互相垂直。
  - 5分 請利用上題說明  $A$  的零空間(nullspace)與值空間(range)生成(span)  $n$  維向量空間。
  - 10分 試證下列(i)-(ii)兩敘述等價。
    - $Ax = e_p$  有解，其中  $x, e_p$  是行向量(column vectors)，而  $e_p$  的第  $p$  位置為 1，其它位置為 0。
    - 如果  $Ax = 0$ ，則  $x$  的第  $p$  位置為 0。
- 令  $A$  是一  $3 \times 3$  實方陣使得  $A^3 = I$  且  $A \neq I$ 。
  - 7分 請問  $A$  的特徵值(eigenvalue)是甚麼？
  - 7分 請給一個這種方陣的例子。
- 10分 令  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。請以  $A$  的實係數多項式表達  $A^{-1}$ 。
- 14分 令  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  和  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 。請問  $A$  和  $B$  相似(similar)嗎？
- 12分 令  $A$  是一實係數  $3 \times 3$  的對稱方陣(symmetric matrix)，而且  $\alpha, \beta$  和  $\gamma$  是它的特徵值。請證明下列二敘述是等價的：
  - Trace  $A$  不是  $A$  的特徵值。
  - $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) \neq 0$ 。