四．理論基礎

4.1 可靠度理論

4.1.1 失效機率密度函數

在討論可靠度問題時，隨機變數通常是代表產品的壽命時間或失效時間t (正確地說應該是失效發生前的操作或工作時間)，因此在可靠度領域，通常是以$f_g(?)$ 表示機率密度函數，有時稱之為失效機率密度函數，失效機率密度函數的物理意義為單位時間的失效機率，亦即發生在時刻t 與t+△t 之間的失效機率為$f_g(?)\triangle t$ ，以數學式表示如式(4.1)[23]：

$$f_g\ (x)\ \Delta t = \Pr\{t \le x \le t+\Delta t\} \tag{4.1}$$

4.1.2 失效累積分佈函數

失效時間之累積分佈函數，則常以$F_g(?)$ 表示。由於時間的領域範圍為[0,＋∞]，因此，失效機率函數為式(4.2)：

$$F_g(x)=\Pr\{x \le t\}=\int_0^{\infty} f_g(x)dx \tag{4.2}$$

$F_g(?)$的物理意義為失效發生時間(或簡稱失效時間)小於或等於t的機率，亦即物品操作使用時間累積到t時，失效數目相對於全體總數的比率，因此稱為不可靠度函數(unreliability function)或失效機率函數(failure probability function)。除了上述兩項直接由機率理論特性所定義的函數之外，另外還有兩個由於時間本身的特質所衍生定義的函數：可靠度函數與失效率函數，其介紹於下一小節。

4.1.3 可靠度函數

可靠度所討論的是物品的時間績效(performance over time)，常以失效時間g表示隨機變數，一般是以可靠度函數(reliability function)說明物品不失效的時間特性，亦即失效時間大於t的機率，記為R(t) 。可靠度函數與失效機率函數互為共軛關係，因此，可靠度函數可由失效時間的失效密度函數fg(?)，或失效機率函數Fg(?)求得，如式(4.3)：

$$R(t) = 1-F_g(x) = 1-\int_0^t f_g(x)dx = \int_t^\infty f_g(x)dx \tag{4.3}$$

4.1.4 韋伯分佈函數(weibull distribution)

1939年由W.Weubull提出表示最弱環模式之分配。最弱環模式是指由數個個環所構成的連鎖，在兩端施加應力時，在最弱的環上發生破壞而使鎖切斷之現象所表示之模式者如圖4.1。自從進入1960年代起，韋式分配作為表示電子零件的壽命等之分配受到注目。

韋氏分配依形狀母數β之值，可以把故障模式以一個分配來表示。其總共分成三種故障模式DFR(decreasing failure rate)、CFR(constant failure rate)以及IFR(increase failure rate) ，對應下一節的浴缸曲線(bathtub curve) 圖可以得到明顯的對照[23,24,25]。

4.1.5浴缸曲線(bathtub curve)

韋伯在1951年發表文獻來描述，故障發生累積與時間的關係如同浴缸曲線(bathtub curve)，如圖4.2，分成三階段，早期破壞(early failure 或者infant mortality)故障原因來自於設計或製造的缺陷，其破壞率會快速下降到穩定期(normal life 或 constant failure) 故障率最低且相當穩定，在此階段韋伯分布函數可以簡化成指數的型式(exponential distribution)，最後元件使用進入損耗期(wear out 或fatigue)，元件因使用磨耗至接近自然壽命，破壞率又開始升高[23,24]。

4.1.6 雙參數-韋伯分布函數

雙參數-韋伯分布函數(two-parameter Weibull distribution) （β，η）其模式如式(4.4)[23,24,25]：

$$F(x)=1\text{-}e^{-(\frac{x}{h})^{b}} \tag{4.4}$$

韋伯(Weibull)可靠度函數（Weibull reliability function）如式(4.5)：其意義表示至某時刻為止並未發生故障，仍然維持作動之機率。

$$R(x)=1-F(x)=e^{-(\frac{x}{h})^{b}} \tag{4.5}$$

其中x為隨機變數(random variable); β為形態因子(shape parameter)；η為特徵壽命(characteristic life)。把(4.5)式取自然對數兩次得式(4.6):

$$\ln\ln\frac{1}{1-F(x)}=b\ln x-b\ln h \tag{4.6}$$

*F(x)*在一開始的過程中，是由中位數排列法給定如式(4.6.1):

$$F(x)=\frac{(i-0.3)}{(N+0.4)} \tag{4.6.1}$$

把實驗所得到的壽命值(cycle)由小排到到大，i 代表第 i 個試片，N 代表總試片數。

把4.6式看成Y=β X+b 其中，Y軸是 $\ln\ln\frac{1}{1-F(x)}$ ，X軸是lnx，然而此直線的斜率即為β（形態因子），再由和X軸交點求得b值。如此一來就可解到所有的參數。把所有參數帶回建立出$F(x)$的函數，把壽命值(cycle)帶回可以得到新的$F(x)$分布，此即所要得到的分布函數曲線。

而平均毀壞時間(mean time to failure，MTTF)定義為試片失效的期望值如式(4.7)：

$$MTTF = h \bullet \Gamma(1+\frac{1}{b}) \tag{4.7}$$

韋伯雙參數分布的物理意義為：β為型態因子；用來決定數據分布的狀況可由以下準則來判別該批產品是屬於哪種故障型態。β因子的物理意義為：

β＜1 為早夭期或初期故障期；

β＝1 為正常期或隨機故障期；

β＞1 為損耗期或磨耗故障期

η為尺度函數，表示數據分佈的窄寬。又稱為特徵壽命，是指到達該壽命值時，該批產品約有63.2%已經損壞。本篇論文將彎曲循環測試後的各試體之故障壽命紀錄繪製成韋伯分佈曲線圖，取其MTTF 的預測期望值當作其平均壽命週期，再根據其型態因子β判別屬於哪種失效型態。

4.2 擴散理論及金屬間化合物(IMC)

固態擴散是指原子在材料中的運動現象，此一現象可消除成份不均匀性而得到均匀的成份分佈，或更嚴謹地說，可消除原子化學位能(chemical potential)的不均匀而得到均匀分佈。雖然如此，即使在成份均匀或化學位能均匀的情況下，原子仍然具有運動的現象，只不過其淨流動為零[26,27]。

Fick 第一定律及第二定律可用來解析所有的擴散現象。Fick 第一定律說明原子流 J 與濃度梯度間成正比關係，但方向相反，如式(4.8)

$$J = -D\frac{dc}{dx} \tag{4.8}$$

J 為單位時間內通過單位面積的原子數目，D 為擴散係數(diffusion coefficient)，c 為原子面的溶質濃度，$\frac{dc}{dx}$ 為濃度梯度。式(4.9)的擴散係數為：

$$D = D_0\, e^{-\frac{Q}{RT}} \tag{4.9}$$

其中 D_0 稱為頻率因子，與原子由原先所在平面跳入另一平面的頻率有關。Q 為致動能(或活化能, activation energy)，其物理意義為當原子欲由原先穩定平衡的位置(stable equilibrium position)移動到其他位置所需克服的能障(energy barrier)。

Fick 第一定律可用來描述穩定狀態(steady state)也就是濃度不隨時間改變的擴散現象，並進而預測原子流。但對於不穩定狀態(nonsteady state)的擴散現象則不足以描述，此時須配合第二定律的使用。Fick 第二定律說明任兩平行平面之原子流不相等時，在兩平面間將有原子累積的現象發生而使局部濃度提高，換言之，即原子累積速率與濃度變化速率

應相等，如式下式

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{dJ}{dx} \tag{4.10}$$

為了解析擴散現象常將第一定律及第二定律合併而得到式(4.11)之微分方程式：

$$\frac{dc}{dt}=\frac{d}{dx}(D\frac{dc}{dx}) \tag{4.11}$$

若 D 不隨濃度而改變，則 D 與位置無關，上式更可簡化為：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \tag{4.12}$$

而上式的通解為：

$$c(x,t)=A+Berf\,(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}) \tag{4.13}$$

其中 erf 為 Gaussian error function，可利用查表得到其對應的數值。因此對於一般的擴散問題，若 D 與濃度無關，則可利用邊界條件求出 A 和 B 常數，亦即得到濃度與位置及時間的函數關係。此外，式(4.13)也間接說明表面濃度與起始濃度平均值之位置等於 $\sqrt{Dt}$ [26]。

IMC 層的厚度成長會受許多因素的影響，如溫度、時間、銲料的體積及銲料本身的特性等。一般說來因界面反應造成的 IMC 厚度成長若與時間的平方根成正比，則顯示該界面反應為理想擴散控制機制(ideal diffusion-controlled mechanism)，若與時間的 0.33 次方成正比則為晶界擴散控制機所主導(grain boundary diffusion-controlled mechanism)。但 IMC 的成長速率依其受溫度的影響則最常以式(4.14)來表示。

$$d=d_0+\sqrt{Dt} \tag{4.14}$$

其中 d 為 IMC 層在經等溫時效作用後的厚度(μm)、d_0 為 IMC 層的初始厚度(μm)、D 為擴散係數(diffusion coefficient [μm^2hr^{-1}])、t 為等溫時效作用的時間。式(4.14)即說明經等溫時效作用後，IMC 增加的厚度與時間的平方根呈正比。本文直接採用式(4.14)的擴散模型進行曲線嵌合，所以仍稱 D 為擴散係數。本實驗即將進行 150℃下兩種不同表面處理焊墊的 IMC 擴散係數[26]。