

第二章 理論基礎與模型建立

2.1 物理模型

一受熱物體(如水平板或針狀鰭片陣列)引發的自然對流乃因周圍的空氣被受熱物體加熱而升溫，使空氣密度改變而產生浮力，導引上升氣流，並使原本的位置產生負壓進而引入下方（或周圍）之流體。本研究將針對針狀鰭片陣列及水平受熱平板的自然對流流場作數值分析。關於針狀鰭片陣列的幾何參數示於圖 2.1。

在垂直擺設（ $\psi = 0$ ）或具較小角度的 ψ 之針狀鰭片陣列的計算上，根據 Aihara et al. [8]，側向流體由於壓差甚小，被引入的流體流速與下方入口相比甚小，若其總寬度夠大，則大部分區域沿水平方向具有週期性，來自兩側氣流的影響幾可忽略，因此可將計算體積縮減至一橫跨兩排針狀鰭片的長方柱體如圖 2.2 所示。在其上下兩端設置出入口條件，而出入口與陣列的距離則參考 Bejan et al. [10] 所提出的，設定入口距離大於 2.5 倍直徑、出口距離大於 3 倍直徑；本研究並增加探討在針狀鰭片頂上加上一絕熱的的遮蔽層的效應。在此本研究將模型分做兩部份，一種是讓遮蔽層與針狀鰭片頂相連（如圖 2.3a），另一種則是將遮蔽層拉離針狀鰭片頂一段距離（如圖 2.3b），以觀察流場在壁面黏滯效應減小時的變化情形，並找出遮蔽層與針狀鰭片頂之間散熱效能較佳的距離，遮蔽層與針狀鰭片陣列的空間配置如圖 2.3c 所示。此外，由於在自然對流 Ra 值不大的情況下，針狀鰭片的均溫性尚佳，因此為簡化計算，本研究將模型簡化成底板與針狀鰭片表面具有相同的均溫。

對於完全水平向上擺設的水平平板或針狀鰭片陣列，將模型假設為水平平板或針狀鰭片陣列是被放置在一個合理範圍的開放空間中，空間邊界設定出入口壓力與大氣壓力差為零且入口氣流溫度為空氣室溫（如圖 2.4）。在這部份本研究必須先模擬不同邊界範圍下水平向上加熱平板的狀況，以找尋出最適當的計算邊界範圍。而在水平向上擺設之針狀鰭片陣列的計算邊界範圍的找尋上則直接使用水平向上加熱平板所採用的最適當計算範圍以簡化之後的計算。

2.2 數學模型

為了簡化計算分析，本研究提出以下假設：

- (1) 以空氣為工作流體。
- (2) 流場除了浮力項之外，為三維不可壓縮之層流流場（選用的參數滿足 $Ra < 10^9 Pr$ [10]）。
- (3) 本模型中座標定義如圖 2.2 所示，y 軸與垂直夾角定義為 ψ ，垂直方向為重力方向。
- (4) 流體與固體介面之間滿足無滑動（no-slip）條件。
- (5) 流體性質除了在浮力項中的密度以 Boussinesq approximation 簡化之外，其餘空氣性質均以入口氣流溫度來計算，並設為常數。
- (6) 由於是單純探討流場影響，所以忽略熱輻射的計算。
- (7) 由於鋁材的傳熱效果極佳，且為了簡化計算模型，本研究在

垂直擺設（ $\psi = 0$ ）或具較小角度的 ψ 之針狀鰭片陣列的計算上假設底板與針狀鰭片表面具有相同的溫度。而在水平擺設之針狀鰭片陣列的研究方面，為方便與前人實驗結果比對，則仍以底板均勻熱通量之方式進行計算。

2.2.1 The Boussinesq Model

在本研究中流場的形成是因為空氣受熱升溫而改變了密度，使得所受重力與周圍空氣不同而上升產生氣流。對於密度改變的情形，本研究採用 Boussinesq model，此模式除了在動量方程式中的重力項的密度以 Boussinesq 近似簡化如公式 2.1 之外，其餘均設為常數 [26]。

$$(\rho - \rho_0)g \approx -\rho_0\beta(T - T_0)g \quad (2.1)$$

根據公式 2.1 可以得到 $\rho = \rho_0(1 - \beta\Delta T)$ 以模擬在重力（浮力）項中密度的變化，但僅能使用於密度變化較小的情況，即滿足 $\beta\Delta T \ll 1$ 的情況下才能使用 Boussinesq 近似。

2.2.2 無因次化參數表示

本研究分別以陣列的底板特徵長度 L 、外界溫度 T_0 、和 α/L 做為特徵長度、溫度、和速度，而得到了下列參數的無因次化表示[13]：

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad U = \frac{uL}{\alpha}, \quad V = \frac{vL}{\alpha}, \quad W = \frac{wL}{\alpha}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad P = \frac{(p - p_0)L^2}{\rho\alpha^2}, \quad Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

$$\Delta T = T_w - T_0, \quad p_0 = -\rho g(y \cos \psi - z \sin \psi)$$

$$\text{但在水平擺設模型下則設 } \Delta T = T_b - T_0, \quad Bi = \frac{hL}{k_s}$$

2.2.3 統御方程式

根據以上無因次參數可以得到以下簡化過後的統御方程式：

$$\text{流體連續方程式} \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (2.2)$$

流體動量方程式

$$X: U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} + W \frac{\partial U}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \nabla^2 U \quad (2.3)$$

$$Y: U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} + W \frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \nabla^2 V + Ra Pr \theta \cos \psi \quad (2.4)$$

$$Z: U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} + W \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \nabla^2 W + Ra Pr \theta \sin \psi \quad (2.5)$$

流體能量方程式

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \nabla^2 \theta \quad (2.6)$$

固體能量方程式

$$\nabla^2 \theta = 0 \quad (2.7)$$

2.2.4 邊界條件

2.2.4.1 垂直及具小傾斜角度擺置的模型

根據物理模型的建立及前人的研究，本研究提出了以下邊界條件的定義 [10, 13]：

- (1) 在兩側的邊界面由於在面的兩邊有對稱的幾何與物理條件，因此定義為對稱面：

當 $X=0$ 或 $X=S_x/L$ 時，

$$U = 0, \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (2.8)$$

- (2) 在入口邊界面由於入口速度垂直於邊界面且不具有速度梯度，因此定義入口邊界面：

當 $Y=0$ 時，

$$U = W = 0, \frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \quad (\text{from Eqn.2.1, 2.3}) \quad (2.9)$$

此外，由於不具有外力驅動源，因此總壓（total gauge pressure）為零。

- (3) 在出口邊界面為了不受外界環境影響，且由於出口邊界若發生回流(backflow)，其溫度不會是外界較低溫之恆溫空氣，而應與周圍之空氣溫度有接近於連續分布的現象而較接近在出口邊界面法線方向溫度梯度為零之條件，因此定義出口邊界面：

當 $Y=1$ 時，

$$P=0, \text{ 若有回流, 則回流之 } \partial\theta/\partial Y=0 \quad (2.10)$$

(4) 在內部固體與流體的接觸面，沒有質傳或流體滑動的情形。

(5) 在加熱面邊界由於是固體加熱面表面，因此速度為零：

$$U=V=W=0, \quad \theta=1 \quad (2.11)$$

(6) 在上方遮蔽面邊界由於是固體絕熱表面，因此速度為零：

當 $Z=S_z/L$ 時，

$$U=V=W=0, \partial\theta/\partial Z=0 \quad (2.12)$$

2.2.4.2 水平擺置的模型

本研究根據物理模型提出了以下邊界條件的定義：

(1) 在內側的邊界面由於在面的兩邊有對稱的幾何與物理條件，因此定義為對稱面：

當 $X=0$ 時，

$$U=0, \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (2.13)$$

當 $Y=0$ 時，

$$V=0, \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad (2.14)$$

(2) 在針狀鰭片或水平板與氣流接觸之表面：

$$U=V=W=0, \quad Bi \cdot \theta = -\nabla \theta \quad (2.15)$$

(3) 在水平擺設之底板表面：

$$U = V = W = 0, \theta = 1 \quad (2.16)$$

(4) 在水平擺設周圍之絕熱面：

$$U = V = W = 0, \nabla \theta = 0 \quad (2.17)$$

(5) 在 XZ, YZ 之入口邊界上由於遠端之入口邊界，因此總壓差與靜壓差皆為零，而入口空氣與室溫同溫：

$$P = 0, \theta = 0 \quad (2.18)$$

(6) 在 XY 之出口邊界上由於是遠端之出口邊界，因此總壓差為零，而出口邊界若發生回流，為節省計算時間與降低計算模型之不確定性，故有以下定義：

$$P = 0, \text{若有回流, 則回流之 } \theta = 0 \quad (2.19)$$

(7) 而在部分計算紊流的情況下則採用 $K-\varepsilon$ 模型，對入口或出口回流的 $K-\varepsilon$ 則定義為：

$$\frac{\partial K}{\partial n} = 0, \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \quad (2.20)$$

2.2.5 初始條件

本研究設整個區域與入口處初始靜壓與各方向速度為零、入口處初始溫度與外界溫度相同來進行運算。

2.3 數值方法

本研究以前處理器 Gambit (Fluent. Inc) 建立網格模型，並使用套裝軟體 Fluent (Fluent. Inc) 進行模擬計算，Fluent 是以非結構式網格有限體積法進行計算，採用了多種求解方法和多種網格以提高收斂速度，因此可以達到較佳的收斂速度與求解精度。

本研究採用 Segregated Solution Method 進行求解，該方法是將初始值帶入解動量方程式，將結果帶回解連續方程式（壓力修正）而得到了新的壓力與速度值，再帶回解能量方程式而得到新的溫度，檢查新的值是否收斂，如果還沒收斂就將新的值繼續帶回解動量方程式，如果收斂了就停止計算，其求解流程如圖 2.5。以下則說明本研究所選擇各部份的離散化計算方案。



2.3.1 速度與壓力求解方案

如前面所提到的，我們可以解動量方程式得到各方向的速度值，但是這未必滿足連續方程式，因此必須藉由修正壓力來求得滿足連續方程式的速度場。而由 Patankar et al. (1972)所提出的 SIMPLE (The Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)演算法，則是目前在這部份的計算上最常被使用的計算方法之一，以下則是以一二維流場為例對 SIMPLE 進行說明（本節使用之參數與前後章節無關，在符號表中有獨立列表說明），其網格分佈如圖 2.6 所示[27]。

2.3.1.1 SIMPLE 演算法

- SIMPLE 是先以一個初始猜測的壓力值帶入動量方程式中計算而得到（相關係數如表 2.1 所示）：

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{i-1,j}^* - p_{i,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.21)$$

$$a_{i,j}v_{i,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{i,j-1}^* - p_{i,j}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.22)$$

- 定義修正壓力與速度為 p' 、 u' 、 v' ，而得到正確的壓力與速度：
 $p = p^* + p'$ 、 $u = u^* + u'$ 、 $v = v^* + v'$ 。

- 將猜值所得到式子與正確值的相減得到：

$$a_{i,j}(u'_{i,j}) = \sum a_{nb}(u'_{nb}) + [(p'_{i-1,j}) - (p'_{i,j})]A_{i,j} \quad (2.23)$$

$$a_{i,j}(v'_{i,j}) = \sum a_{nb}(v'_{nb}) + [(p'_{i,j-1}) - (p'_{i,j})]A_{i,j} \quad (2.24)$$

- SIMPLE 演算法假設 $\sum a_{nb}(u'_{nb})$ 和 $\sum a_{nb}(v'_{nb})$ 可以忽略而得到：

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + (p'_{i-1,j} - p'_{i,j})d_{i,j} \quad , \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (2.25)$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* + (p'_{i,j-1} - p'_{i,j})d_{i,j} \quad , \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j}} \quad (2.26)$$

- 同理可得：

$$u_{i+1,j} = u_{i+1,j}^* + (p'_{i,j} - p'_{i+1,j})d_{i+1,j} \quad , \quad d_{i+1,j} = \frac{A_{i+1,j}}{a_{i+1,j}} \quad (2.27)$$

$$v_{i,j+1} = v_{i,j+1}^* + (p'_{i,j} - p'_{i,j+1})d_{i,j+1} \quad , \quad d_{i,j+1} = \frac{A_{i,j+1}}{a_{i,j+1}} \quad (2.28)$$

- 將以上得到的正確速度帶回連續方程式，整理後得到壓力修正式：

$$a_{i,j}p'_{i,j} = a_{i+1,j}p'_{i+1,j} + a_{i-1,j}p'_{i-1,j} + a_{i,j+1}p'_{i,j+1} + a_{i,j-1}p'_{i,j-1} + b'_{i,j}$$

$$\text{其中 } a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1} \quad (2.29)$$

- 求解 2.29 式進而得到正確的速度與壓力值帶回其餘統御方程式以判斷收斂與否。若沒有收斂，則根據所得到的修正值，再藉由鬆弛因子(under-relaxation factor)的設定，可以得到新的壓力與速度值(2.30 式) 繼續進行疊代：

$$\begin{aligned} p^{new} &= p^* + \alpha_p p', \\ u^{new} &= \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)}, \\ v^{new} &= \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.3.1.2 SIMPLE 與 SIMPLEC

由於在 SIMPLE 中所忽略的速度項會造成較大的誤差，所以 Van Doormal and Raithby (1984)提出了一修正的演算法稱為 SIMPLEC (SIMPLE-consistent)，將速度修正式改為：

$$u'_{i,j} = (p'_{I-1,J} - p'_{I,J}) d_{i,j}, \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (2.31)$$

$$v'_{i,j} = (p'_{I,J-1} - p'_{I,J}) d_{i,j}, \quad d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (2.32)$$

經由修正的 SIMPLEC 在層流或沒有複雜物理現象的模型中通常有較 SIMPLE 更好的收斂效果，為了加快收斂速度，本研究中使用 SIMPLEC 做為速度與壓力的求解方案。但在水平擺設的針狀鰭片陣列計算模型中往往需要調整壓力的鬆弛因子以得到較準確的結果，然而 SIMPLEC 在調整壓力的鬆弛因子時容易變得過度保守，因此在水平擺設之針狀鰭片陣列的計算上採用 SIMPLE 做為求解速

度與壓力之計算方法。

2.3.2 其餘離散化計算方案

在動量方程式和能量方程式的計算上選擇以二階上風法 (Second Order Upwind Scheme) 將之離散化，上風法得到的插值會受到上游的影響，符合本研究物理意義；而在嘗試具較高 Ra 值的模型時，會先以一階上風法在較低的 Ra 值下做計算，再以其結果做為初始值重新計算較高 Ra 值的結果。

而在動量方程式中必須使用到網格面與面之間的壓力梯度，因此必須知道面上的壓力值，而在 cell-base 的計算下所得到的都是網格中心的壓力值，因此必須藉由壓力內差法 (pressure interpolation scheme) 計算得到網格面上的壓力值，本研究選擇適合在 Ra 值不可忽略的情況下計算的 PRESTO! (pressure staggering option) 在這部份進行運算，由於 PRESTO! 需要網格具有良好的正交性，因此在網格的建立上本研究也採用正交性較佳的結構化網格。

2.3.3 紊流流場計算方法之選擇

在水平擺設之加熱平板流場計算中，本研究引入紊流流場與層流流場比較，而在紊流流場計算之方案選擇上，本研究採用 $K-\varepsilon$ 的 realizable 模型，而在靠近壁面的處理則使用標準壁面函數 (standard wall functions)。對 K 和 ε 的差分方法則同樣採用二階上風法。

2.3.4 相關參數

(1) 鬆弛因子--本研究將能量的計算鬆弛因子設為 1，壓力的計算鬆弛因子在計算方法為 SIMPLEC 時設為 1，當計算方法換為 SIMPLE 時則設為 0.3；而依照需求將動量的計算鬆弛因子設為 0.7-0.5，密度、物體力(body force)、紊流黏滯係數、 K 與 ε 的迭代鬆弛因子設為 0.9-0.7。

(2) 收斂條件--在 Fluent 中是以殘值(residue)的大小來判斷收斂，一般設定當連續方程式和速度值的殘值小於 10^{-3} ，能量方程式的殘值小於 10^{-6} 時判定為已收斂。殘值的表示項為：

$$R^{\phi} = \frac{\sum_{cellsP} \left| \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b - a_P \phi_P \right|}{\sum_{cellsP} |a_P \phi_P|} \quad (2.33)$$

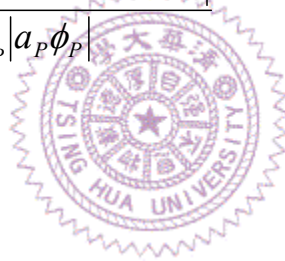


表 2.1 數值方法之獨立符號表

Nomenclature		Greek Symbols	
a	係數項,表示式如表 2.1	α	under-relaxation factor
A	網格面積	μ	黏滯係數
b	源項	ρ	流體密度
p	正確壓力(求解)	ν	μ / ρ
p*	初始壓力	Subscripts	
p'	修正壓力	I, J, i, j	如圖 2.6 所示
u, v	在 x, y 方向上的正確速度	nb	鄰近網格
u*, v*	初始速度	P	網格中心點(參照圖 2.6)
u*, v*	修正速度	p, u, v	壓力、溫度項

表 2.2 SIMPLE 中使用係數

$a_{I+1,J}$	$a_{I-1,J}$	$a_{I,J+1}$	$a_{I,J-1}$	$b'_{I,J}$
$(\rho dA)_{i+1,j}$	$(\rho dA)_{i,j}$	$(\rho dA)_{i,j+1}$	$(\rho dA)_{i,j}$	$(\rho u^* A)_{i,j} - (\rho u^* A)_{i+1,j} + (\rho v^* A)_{i,j} - (\rho v^* A)_{i,j+1}$

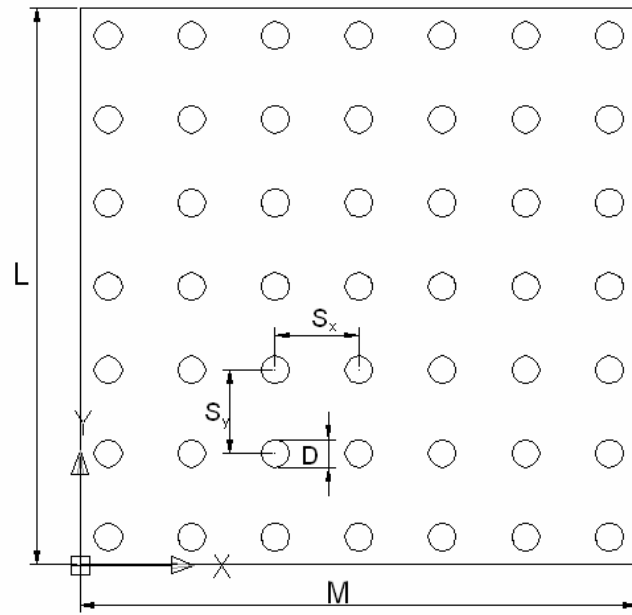


圖 2.1 針狀鰭片陣列的幾何參數示意圖

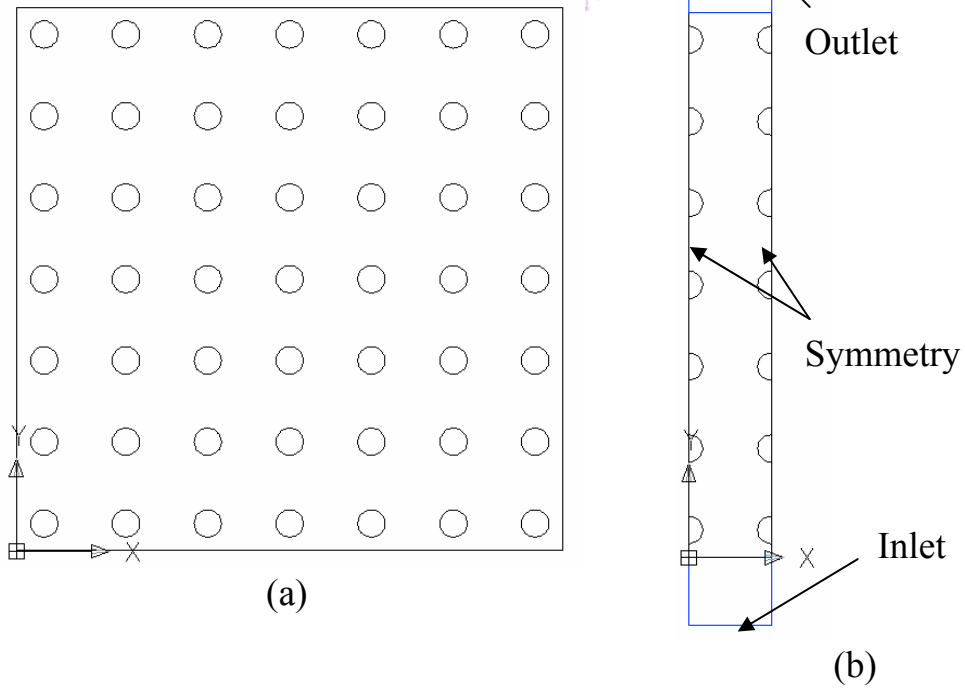
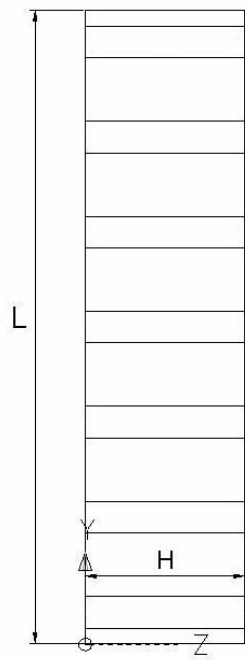
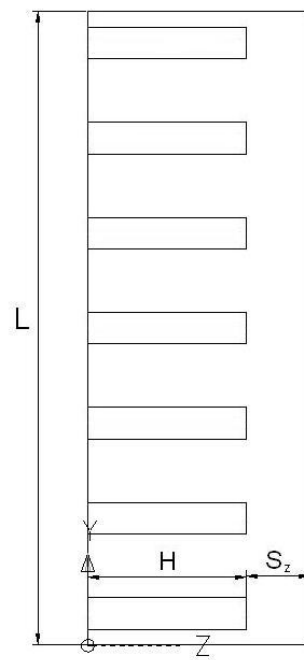


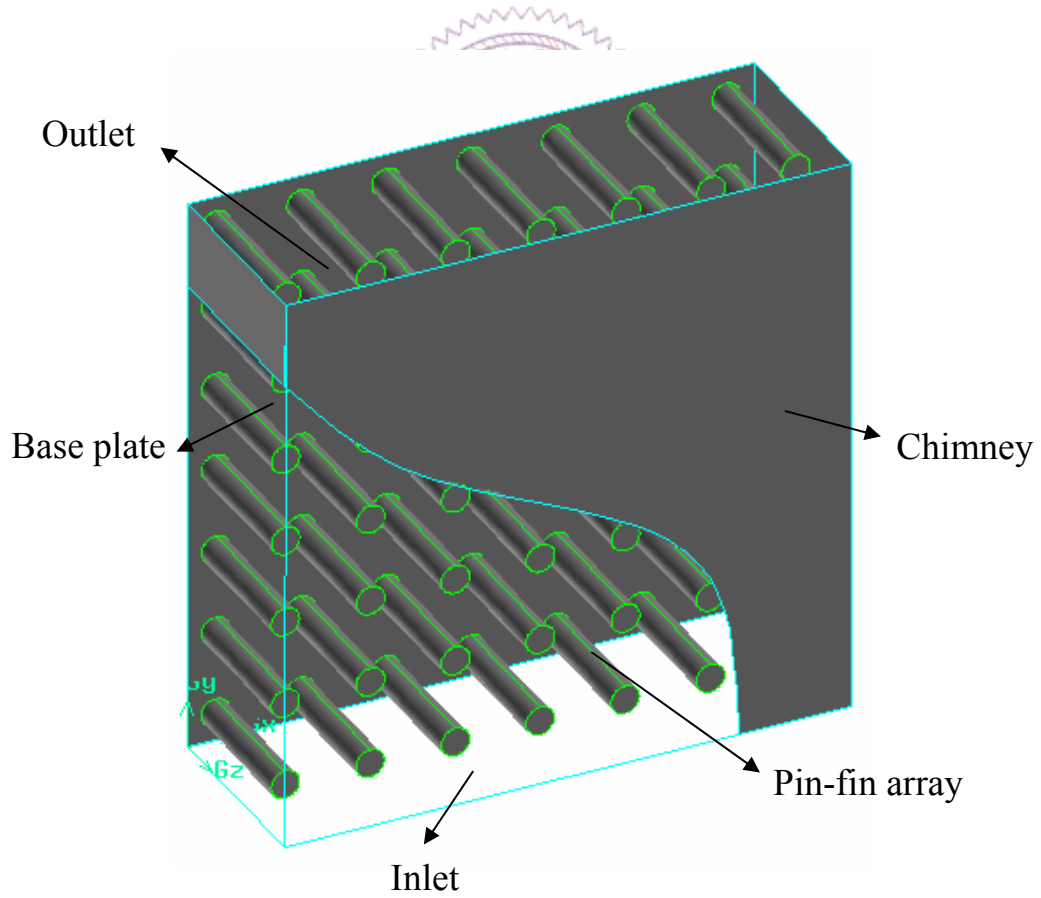
圖 2.2 (a)簡化前實際針狀鰭片陣列範圍，(b)簡化後計算範圍



(a) 遮蔽層連接針狀鰭片頂



(b) 遮蔽層拉離針狀鰭片頂



(c) 遮蔽層與針狀鰭片陣列之立體空間配置

圖 2.3 遮蔽層與針狀鰭片陣列之關係描述

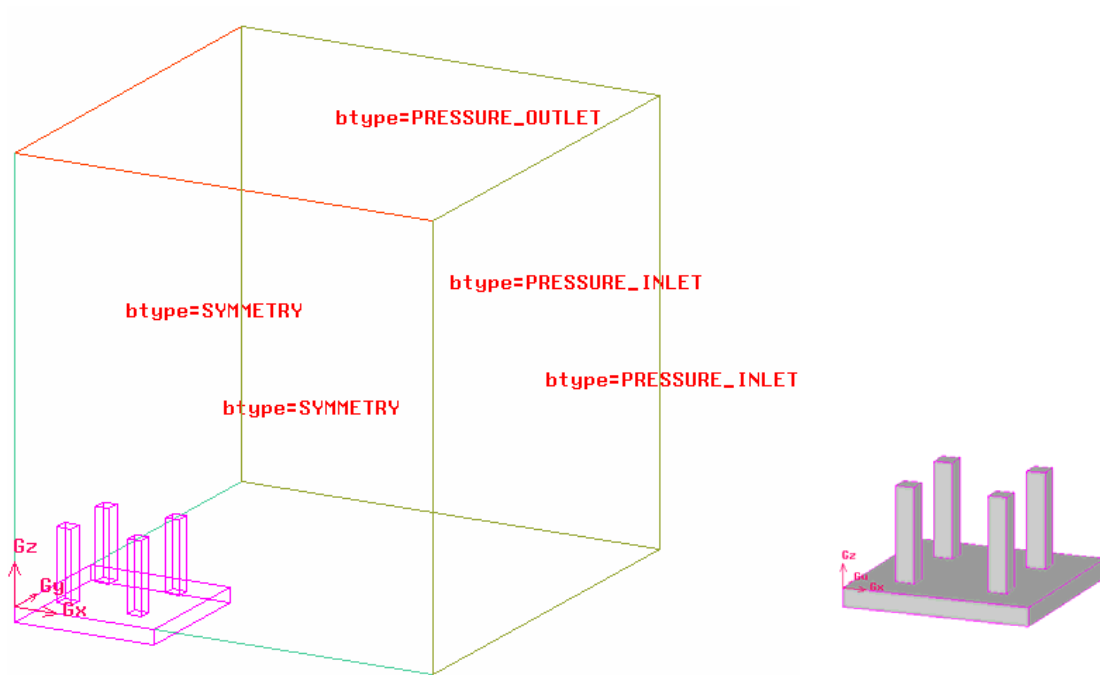


圖 2.4 針狀鰭片陣列水平向上擺置的計算模型

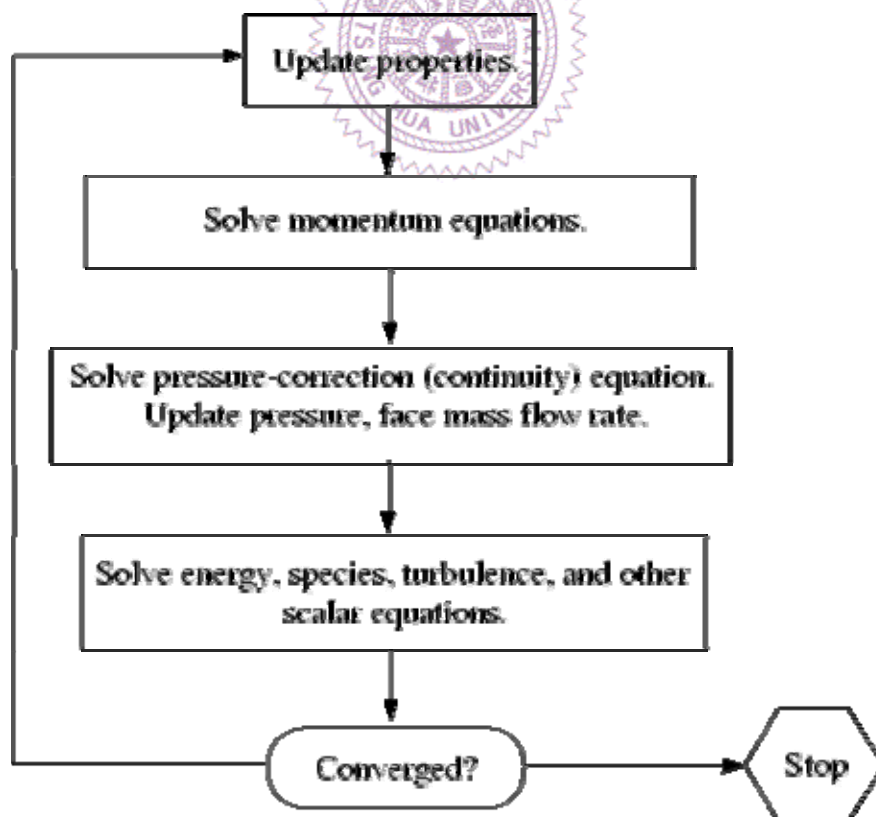


圖 2.5 Segregated Solution Method 求解流程[26]

Fig. 6.5 The scalar control volume used for the discretisation of the continuity equation

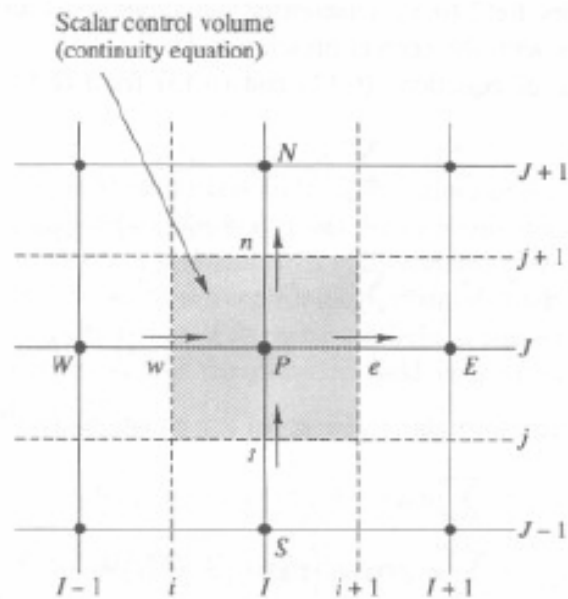


圖 2.6 網格分佈示意[27]

