L25 7.2 The logarithm Function, part I(對數函數)

The logarithm Function, part I (Conti.)(續.對數函數)

如果函數連續，則反函數連續。

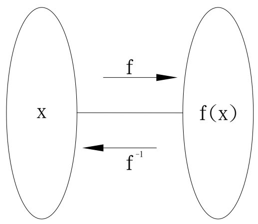
如果函數可微斜率不為零，則反函數可微。

若 $f'(x)\neq 0$ 時，則 f^{-1} is diff. at $f(x)$.

Question: $(f^{-1})'(f(x))=?$

Answer: $\because$ $f^{-1}(f(x))=x$ $\therefore$ $(f^{-1})'(f(x)\cdot f'(x)=1\Rightarrow(f^{-1})(f(x))=1/f'(x)$

Rmk:



① Let $f(a)=b$, then $(f^{-1})'(b)=1/f'(a)$.

② $(f^{-1})'(x)=1/f'(f^{-1}(x))$.常態寫法

Thm: Let $f:I\rightarrow\mathbb{R}$ be one-to-one and diff..

If $a\in I$ such that $f'(a)\neq 0$, and Let $f(a)=b$, then f^{-1} is diff. at b and $(f^{-1})'b=1/f'(a)$.

如果 a 屬於定義域使得 a 的微分不為 0 且令 a 點函數值等於 b，則反函數在 b 點可微且 b 的微分等於 a 的微分的倒數。

Note:Let $y=f(x)$ be one-to-one and diff.If we let $x=f^{-1}(y)$.Then

$dx/dy=1/(dy/dx)$.

eg. $f(x)=x-\cos x$ on $[-\pi,\pi]$.

Show that

① f is one-to-one.

② Find $(f^{-1})'$

③ Find $(f^{-1})'(-1)$

pf:

The logarithm Function, part I (Conti.)(續.對數函數)

①

法 1:Let x1,x2∈[-π, π] s.t. x1-cosx1=x2=cosx2…

難推⇒x1=x2

法 2:

∵ $f'(x)=1+\sin x>0$ for $x\neq \pi/2$.

$$\therefore\ f\begin{cases}\nearrow \text{ on } [-\pi,-\frac{\pi}{2}) \\ \nearrow \text{ on } (-\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}.$$

∵ f is cont. at $-\pi/2$.

$$\therefore\ f\begin{cases}\nearrow \text{ on } [-\pi,-\frac{\pi}{2}] \\ \nearrow \text{ on } [-\frac{\pi}{2},\pi]\end{cases}.$$

⇒f ↗ on $[-\pi,\pi]$.

⇒f is one-to-one.

用定理去證，遞增跟遞減，因爲遞增函數跟遞減函數一定是一對一，一階微分大於零，如果不是全部大於零或小於零，零點的地方要隔開討論，再用連續把他延拓到端點上。

② 利用Let f(a)=b, then $(f^{-1})'(b)=1/f'(a)$

$(f^{-1})'(y)=1/f'(x)=1/(1+\sin x)$, where $y=f(x)$ and $y\neq f(-\pi/2)=-\pi/2$.

③

∵ f(0)=-1 觀察法或去解 ∴ $(f^{-1})'(-1)=1/(1+\sin 0)=1$

Ex:P340(31.32.33.34.42.46.49.52.53)

§ 7.2 The logarithm Function, part I.

Def:The function L(x) $\int_1^x \frac{1}{t}dt$, for x>0 is called the natural logarithm function.

Q:這個函數的定義域在哪裡？

A:x>0。

Q:這個函數是一個面積函數，積哪一個函數？

A:y=1/x，寫成 t 是因爲變數被用了。

這個函數是考慮 y=1/x 積分，它不要定積分是因爲不知道怎麼積

Q:考慮從哪裡積起？

A:1。可以積到 x。1 到 x 的定積分，定積分是函數於 x 軸所夾廣義面積。

面積=$\int_1^x \frac{1}{t}dt$ =L(x)，1/t 是一個連續函數，1/x 在 x>0 是連續。因爲它連續，根據 Fundamental thm. of integral calculus 所以它的面積函數存在可且微。

因爲它可積，所以要去找一個函數微分等於 1/x，就會發現找不到。Fundamental thm. of integral calculus 就不能用，它存在但卻積不出來。指數裡頭唯一個不知道怎麼怎麼算的，可是知道它可積，所以把它拿出來研究。

L:(0,∞)→ℝ by L(x)= $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ 。

Prop:

① L(1)=0 and L$\begin{cases} <0 \text{ on } (0,1) \\ >0 \text{ on } (1,\infty) \end{cases}$

Q:爲什麼在(1,∞)取值大於 0？

A:因爲 1/t 在這個區間恆大於零，所以定積分大於零。

Q:爲什麼在(0,1)取值小於 0？

A:因爲不是從小積到大，所以要倒過來要加負號。

② ∵ 1/x is diff on (0,∞).

∴ By 1[st] fundamental thm. of integral calculus L'(x)=1/x on (0,∞).

③ ∵ 1/x>0 on (0,∞).

∴ L'(x)>0 on (0,∞).

⇒L is increasing on (0,∞).⇒L is one-to-one on (0,∞).

By the way~它的反函數會存在，在後節會討論。

L25 7.2 The logarithm Function, part I(對數函數)
The logarithm Function, part I (Conti.)(續.對數函數)

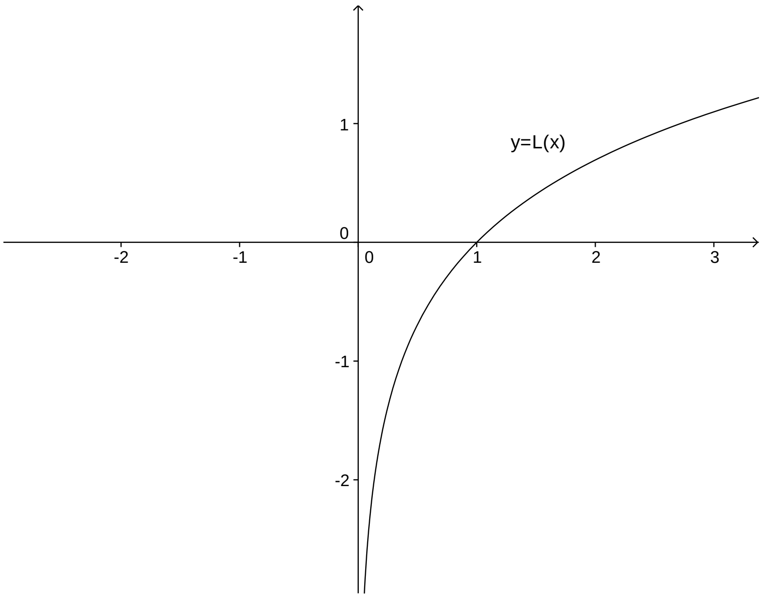
④ ∵ $L''(x)=-1/x^2<0$ on $(0,\infty)$.

∴ The graph of $y=L(x)$ is concave down.

⑤ We will prove just later $\lim_{x\to 0}L(x)=-\infty$ and $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Q:x 逼到 0，從 1 積到 0，是什麼意思？
A:1 左邊的面積，面積是-∞。感覺不太出來
Q:x 逼到∞，從 1 積到∞，是什麼意思？
A:1 右邊的面積，面積是∞。感覺不太出來

⑥



$f(x)<0$, as $x<1$、$f(1)=0$、$f(x)>0$, as $x>1$、$f'(x)>0$、$f''(x)<0$

Thm:

① Let x and y $\in\mathbb{R}^+$, then $L(xy)=L(x)+L(y)$.

② Let $x\in\mathbb{R}^+$, then $L(x^{p/q})=p/q\,L(x)$, $\forall\ p/q\in\mathbb{Q}$

③ The range of L is $(-\infty,\infty)$

i.e. $\lim_{x\to 0}L(x)=-\infty$ and $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

pf:

L25 7.2 The logarithm Function, part I(對數函數)
The logarithm Function, part I (Conti.)(續.對數函數)

① Fixed y.

∵ $L'(x)=1/x$. 根據 1st Fundamental thm. of integral calculus

∴ $d/dx\, L(xy)=L'(xy)\cdot y=y/xy=1/x$. 變數變換

$\Rightarrow L(xy)=L(x)+c_y$, for some $c_y\in\mathbb{R}$. (Note $c=c(y)$)、有相同的微分

Q:如果決定 cy 呢？A:代值，也只能代 1。

(代入 x=1) $L(y)=0+c_y=c_y \Rightarrow L(xy)=L(x)+L(y)$.

② 就是要證明兩個微分會差一常數。

∵ $d/dx L(x^{p/q})=1/(x^{p/q})\cdot p/q\, x^{(p/q-1)}= p/q\cdot 1/x=d/dx(p/q L(x))$.

∴ $\exists\, c\in\mathbb{R}$ s.t. $L(x^{p/q})= p/q L(x)+c$.

∵ $L(1)= p/q L(1)+c$.

∴ $c=0$.

$\Rightarrow L(x^{p/q})=p/q L(x)$

③

∵ $L(2)=\int_1^2 \frac{1}{t}dt>0$

∴ $L(2^n)=$by② $nL(2)\to\infty$, as $n\to\infty$.$\Rightarrow \lim(x\to\infty)f(x)=\infty$

$L(2^{-n})=$ by② $-nL(2)\to-\infty$, as $n\to\infty$. $\Rightarrow \lim(x\to 0)f(x)=-\infty$

∵ L is cont. on $[2^{-n},2^n]$.

∴ By Intermediate value thm.可知$[-nL(2),nL(2)]\subset$range L.

$n\to\infty\Rightarrow$ Range of L $=(-\infty,\infty)$

Rmk:

由thm.①與②可知L的運算方式與對數函數一樣，

故 L 是一個對數函數，其底數爲何？

即去找某一個數使得 L(某數)=1。

∵ Range of L=(-∞,∞) ∴ ∃ 有一正數 s.t. L(此數)=1，

且僅有此數取值爲一(∵ L is one-to-one)。

Q:什麼的函數有這樣的運算？
A:對數函數。
Q:對數函數怎麼表？
A:logxX。
Q:如何決定底數？
A:lnx=1。
Q:能不能找到某數？
A:中間值定理，中間的值一定被取。

Def: 故將此數記爲 e，唸成 exponent，則 L 就改寫成 $\log_e x$ 記成 lnx。

(i.e. lnx=$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$,∀ x>0)

(∵ lne=1>0 and ln↗ ∴ e>1)