L21 5.4 The Fundamental Thm of Integral calculus
The Mean-value thm for integrals(積分的均值定理) Antiderivative(反導函數)
The second Fundamental Thm of Integral calculus(微積分第二基本定理)

§ 5.4 The fundamental thm of integral calculus

The: (Meam-value thm. for integrals)

Let f[a,b]→ℝ be cont.

Then ∃ c∈(a,b) s.t. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

如果函數在 ab 連續，則存在一個 c 使得 ab 定積分等於(b-a)乘 f(c)。

連續一定可積，定積分會存在。需要連續才能證這個等式。
這個定積分在圖形上表示的是函數跟 x 軸所夾的廣義面積。
這個面積的底是 b-a，高是 f(c)。

Def: The number f(c) is called the average value (or mean value) of on [a,b].

pf: Let F(x)=$\int_a^x f(t)dt$.

Then by 1st fundamental thm. of integral calculus, F is diff. on[a,b] and

F'(x)=f(x).

∵ F is cont. on [a,b] and diff. on (a,b)

∴ By Mean-value thm. ∃ c(a,b) s.t. F(b)-F(a)=F'(c)(b-a)=f(c)(b-a)

∵ F(b)-F(a)=$\int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

∴ $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$

By the way~下學期系上有開一個微積分(一) 要注意需要的要去選，開放給全校的

Def: (antiderivative)

Let f:[a,b]→ℝ be cont.

a function G is called antiderivative for f on [a,b], if G'(x)=f(x) on [a,b].

有一個函數 G 在[a,b]被稱爲 f 的 antiderivative，

L21 5.4 The Fundamental Thm of Integral calculus
The Mean-value thm for integrals(積分的均值定理) Antiderivative(反導函數)
The second Fundamental Thm of Integral calculus(微積分第二基本定理)

如果 G 在[a,b]的微分等於 f。

Q:給你一個函數在[a,b]上連續的函數，是否能找到一個 antiderivative？
A:可，廣義面積函數。

Rmk:

$\because \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$ on [a,b]

$\therefore$ 在[a,b]上連續函數必有一個 antiderivative.

一定有一個，一共能有多少個？

Qusetion:How many antiderivatives for f on [a,b] does f have？

Answer:Infinitely. (如$\left(\int_a^x f(t)dt + C\right)'$, $\forall\ C\in\mathbb{R}$)

Question:Are they all of the antiderivatives for f on [a,b]？

Answer:Yes.

不知道答案的問題，從何想起？必要條件想起
知道答案的問題，從何想起？所求想起
我的主詞是 antiderivative，從 antiderivative 滿足的條件想起，問題是它不是全部，拿兩個來研究，它們兩個是 antiderivative，它們之間有怎樣的性質，由這個性質在倒推能不能找到所有的 antiderivative。因爲你的問題不在於有幾個，你現在已經找到一堆了，那你還問有沒有？這個時候就是自己跟自己的關係，到底能變化到什麼程度。所以我有兩個，來研究它們的關係，叫做 necessary condition 想起。

Let G_1 and G_2 be two antiderivatives for f on [a,b].

Then $G_1'=G_2'=f$ on [a,b]$\Rightarrow \exists\ c\in\mathbb{R}$ s.t. $G_1=G_2+C$.它們兩個差一個常數

也就是說它的必要條件是差一個常數。
一開始取面積函數加常數，也可以取任何 antiderivative 加一常數。
如果兩個函數微分相等，則必差一常數。數學裡面的證明就是那些定義定理。
如果你不背定義定理，你有搞頭嗎？越高年級的科目越難、越抽象。

L21 5.4 The Fundamental Thm of Integral calculus
The Mean-value thm for integrals(積分的均值定理) Antiderivative(反導函數)
The second Fundamental Thm of Integral calculus(微積分第二基本定理)
By the way 積分的新名詞 antiderivative

Thm:

(The second fundamental thm of integral calculus)

Let f:[a,b]→ℝ be cont.

If G is an antiderivative for f on [a,b],

then $\int_a^b f(x)dx$=G(b)-G(a)(記成 $G(x)\Big|_a^b$)

如果 G 在[a,b]是 f 的 antiderivative，

則 f 在[a,b]的定積分等於該 antiderivative 頭尾的取值相減。

這個定理超重要，爲什麼？因爲它告訴我算定積分，等同於去找 antiderivative。
我們會做微分，我們應該能找到哪一個函數微分等於 f。
算定積分等於找隨便找一個 antiderivative 函數相減
我們當初算定積分用 Uf(P)的極限、Lf(P)的極限、Riemann Sum 的極限有夠煩的，
後來發現那套東西不用玩了，現在我們用隨便找一個 antiderivative 函數相減。

pf:

Let F(x)=$\int_a^x f(t)dt$,

then by 1st fundamental thm. of integral calculus, F'(x)=f(x).

∵ G'=F' on [a,b] ∴ F=G+C, for some C∈ℝ. 它們兩個差一個常數

存在一個 c 使得 F=G+C 或寫 G=F+C 對某一個 c 屬於ℝ

∵ $\int_a^b f(x)dx$=F(b)-F(a)=(G(b)+C)-(G(a)+C)=G(b)-G(a)

∴ $\int_a^b f(x)dx$= F(b)-F(a) (∵F(a)=0)

Thm:

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_a^b \quad \forall\ n\in\mathbb{Q},\ n\neq -1$$

L21 5.4 The Fundamental Thm of Integral calculus
The Mean-value thm for integrals(積分的均值定理) Antiderivative(反導函數)
The second Fundamental Thm of Integral calculus(微積分第二基本定理)

pf:

$\because$ $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})'=x^n$ 反微分運算，積分指數加一、除指數加一

$\therefore$ By 2st fundamental thm. of integral calculus, $\int_a^b x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_a^b$

Thm:

① $\int_a^b \sin xdx=$

pf:

$\because$ (-cosx)'=sinx

$\therefore$ By 2st fundamental thm. of integral calculus, $\int_a^b \sin xdx=-\cos x\Big|_a^b$.

② $\int_a^b \cos xdx=$

pf:

$\because$ (sinx)'=cosx

$\therefore$ By 2st fundamental thm. of integral calculus, $\int_a^b \cos xdx=\sin x\Big|_a^b$.

其餘三角函數的積分

$$\int_a^b \sec^2 xdx=\tan x\Big|_a^b$$

$$\int_a^b -\csc^2 xdx=\cot x\Big|_a^b$$

$$\int_a^b \sec x\tan xdx=\sec x\Big|_a^b$$

$$\int_a^b -\csc x\cot xdx=\csc x\Big|_a^b$$