L20 5.3 F(x) 面積函數

First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理)

First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理) 和例子

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be cont.If for any subinterval $[c,d]\subset[a,b]$ there is a number $e\in[c,d]$ s.t. $f(e)=4$, then $\int_a^b f(x)dx = 4(b-a)$.

pf:

題目要證定積分，定積分原本的意思是 Uf(P)的極限 Lf(P)的極限存在且相等。但是 Uf(P)極限 Lf(P)的極限是算不出來的，因爲它給的是每個小區間內有一個值分部的樣子，跟小區間內取點，有關的是 Riemann sum。Riemann sum 的極限不一定會存在，就算它存在未必等於 Uf(P)極限 Lf(P)的極限。這個時候必須要用到連續這個條件，因爲連續可積，所以 Uf(P)極限 Lf(P)的極限存在且相等，Riemann sum 不取極限是介在 Uf(P) L 和 f(P)中間，取極限會破壞不等式，從不等式變不存在，極限不會保留不等式。定積分會等於三個 Uf(P)的極限、Lf(P)的極限或 Riemann sum。Riemann sum 是在每個小區間取一個值，在區間上取一個值取值爲 4。Riemann sum 算出來是 4(b-a)，取極限 4(b-a)。

$\because$ f is cont. on [a,b]

因爲 integrable

所以 U f(P)的極限 Lf(P)的極限存在且相等，也等於 Riemann sum 極限

$\therefore$ f is integrable.

Let $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ be a partition of [a,b]

我們要用 Riemann sum。Riemann sum 怎麼算？在每一個小區間取一個值~

Let $x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$ s.t. $f(x_i^*)=4$.

Then $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 4\Delta x_i = 4(b-a)$

Q:如果這個時候直接寫定積分對嗎？不對，要取極限。

$\Rightarrow \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i = 4(b-a)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = 4(b-a)$

L20 5.3 F(x) 面積函數
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理)
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理) 和例子

§ 5.3 The function F(x)=$\int_a^x f(t)dt$

爲了方便起見我們討論的是可積函數，可是不知道哪一類函數可積。
我們知道連續必可積，但事實上只要可積就可以了，基本上條件都放連續。
分析有兩部分，這個完還有高微。有很多東西不證，因爲現在沒辦法精密的思考。
微積真的要訓練需要兩年，那個時候就可以把比較粗思考的變比較細的思考，微積分是所有科學的根本，至於你要不要這麼細膩，那是數學系，但你是數學系你一定要修。
高等微積分在數學系講，其他系不講。它的基本本能從高中拖離出來，它的數學建模數學知識是微積分。今天如果你不喜歡數學，你可以轉到別的科系，它還是有後續叫應用數學或工程數學，它的基礎是微積分。真正要用的是微積分二，而不是微積分，微積分一只是基礎。微積分真正的出處是物理，而不是真正的數學。之後來有複變函數，在數學系說，其他科系不說。你知道現在很多電機系很多來修高等微積分，現在的科技很多能用不能解釋，手機爲什麼我這樣講你卻能聽到，這個不是生活常態可以解釋，這裡頭都是數學。這就是爲什麼光電所比資訊所更多來修高等微積分，十年前就是這樣了，不是現在才開始。高等微積分變成很多在走 3C 產品那類…那個東西用到的就是高等微積分。你甚至可以看到電機系的碩博生來修，那不足以爲奇，那個時候已經有點太慢了，碩博生需要高等微積分，電機系也來修耶~又不是屬於理學院是工學院耶~現在跨領域。而且現在科學資訊越來越發達，後來用的數學是越多。現在數學非常的夯，夯在於它的訓練，它的很多東西科技需要用到，因爲抽象，但抽像又能夠表達，裡頭用的就是數學。

Thm:Let f:[a,b]→ℝ be cont.

① Let c∈(a,b) Then $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ 計算過程中可能會用到

定積分圖形上的意義是函數與 x 軸所夾的廣義面積。

② $\int_c^c f(x)dx=0$, ∀ c∈[a,b]

圖形上看到是一條線，線沒有面積。

③ $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

細分從 b 到 a，所以差一個負號。

Let f:[a,b]→ℝ be cont.

Let x∈[a,b]

Then f is cont. on [a,x].

L20 5.3 F(x) 面積函數
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理)
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理) 和例子

⇒f is integrable over [a,b].

⇒$\int_a^x f(t)dt$ exist.積分變數要換 t，積分表法跟函數變數取法無關

表示的是 a 到 x 的函數圖形與 x 軸所夾的廣義面積。

Define a function F:[a,b]→ℝ

by F(x)=$\int_a^x f(t)dt$

Q:F(a)的取值爲何？A:0

Question:F 有何性質？

第一個連不連續、可不可微…。

Thm(First Fundamental thm. of integral calculus)

Let f:[a,b]→ℝ be cont.

The function F:[a,b]→ℝ defined by F(x)=$\int_a^x f(t)dt$ is diff. on [a,b] and the

derivative F'(x)=f(x), ∀ x ∈[a,b].

要證整個閉區間可微
中間要證割限斜率的極限，在 a 點證割線斜率右極限、在 b 點證割線斜率左極限
透過全部算左極限，全部算右極限，證得存在且相等。

pf:

Let x∈[a,b)所有包 a 的右極限

We want to show that lim(h→0^+)(F(x+h)-F(x))/h=f(x)

我們想要證割線斜率的右極限

Let x+h∈[a,b], F(x+h)-F(x)=$\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$

考慮 x+h 不會跑到 b 之外，b 之外沒有定義。

∵ f is cont. on [a,b]

∴ f is cont. on [x,x+h]估計它在這個區間

L20 5.3 F(x) 面積函數
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理)
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理) 和例子

By extreme value thm.,

∃ $c_h,d_h \in [x,x+h]$ s.t. $f(c_h)=\sup_{[x,x+h]}f(x)$ and $f(d_h)=\inf_{[x,x+h]}f(x)$.

h 逼到 0，c、d 在這個區間的取值因 h 而變動，所以加上下標 h

$\Rightarrow f(d_h)h \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le f(c_h)h$

$\int_x^{x+h} f(t)dt$ 根據定義，Uf(P)的極限、Lf(P)的極限、Reimann sum 的極限

$$\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta i \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_h)\Delta xi \ge \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta xi \text{ and } \sum_{i=1}^{n} f(d_h)\Delta xi \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta xi$$

$$\sum_{i=1}^{n} Mi\Delta xi \le \sum_{i=1}^{n} f(c_h)\Delta xi = f(c_h)[(x+h)-x] = f(c_h)h$$

$$\sum_{i=1}^{n} mi\Delta xi \ge \sum_{i=1}^{n} f(d_h)\Delta xi = f(d_h)[(x+h)-x] = f(d_h)h$$

$\Rightarrow f(d_h)h \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le f(c_h)h$

$\Rightarrow f(d_h) \le \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \le f(c_h)$

∵ f is cont. on $[c_h,d_h]$ or $[d_h,c_h]$ 不知道哪一個大

∴ By Intermediate value thm.,∃ $e_h \in [x,x+h]$ s.t. $f(e_h)=\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$.

$\Rightarrow \lim(h\to 0^+)(F(x+h)-F(x))/h=\lim(h\to 0^+)f(e_h)=f(x)$ ∵ f is cont. at x

因為[x,x+h]連續，所以當 h 趨近 0 時，$f(e_h)$會趨到 f(x)

Let x∈(a,b]

Similarly, we can prove that $\lim(h\to 0^-)(F(x+h)-F(x))/h=f(x)$.

Therefore F is diff. on [a,b] and F'(x)=f(x).

eg. ① $F(x)=\int_{-1}^{x}(2t+t^2)dt$, for x∈[-1,5]. Find F'. 原始形

L20 5.3 F(x) 面積函數
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理)
First Fundamental thm of integral calculus (微積分第一基本定理) 和例子

pf:F(x)是面積函數，它是可微的，等於上標帶入函數

By 1st fundamental thm. of integral calculus, F'(x)= 2x+x^2

eg. ② f(x)=$\int_x^0 \sin(\pi t)dt$. Find f'(3/4). 變化形

Q:f(x) = $\int_x^0 \sin(\pi t)dt$ 它是一個面積函數嗎？A:不是，積分變數不是上標。

Let f:[a,b]→ℝ F(x)=$\int_a^x f(t)dt$

pf:f(x)不是面積函數，面積函數的上標是 x，要轉換多一個負號。

f(x)=$-\int_0^x \sin(\pi t)dt$

By 1st fundamental thm. of integral calculus, f'(x)=-sin(π x)⇒f'(3/4)=-√3/2

eg. ③ F(x)= $\int_0^{x^2} t\sqrt{t+1}\,dt$.Find F'(x). 這比較可能會考的

pf:F(x)不是一個面積函數，面積函數的上標是 x。

Let f:[a,b]→ℝ F(x)=$\int_a^x f(t)dt$

Let G(u)=$\int_a^u t\sqrt{t+1}dt$

Then F(x)=G(x^2)⇒F'(x)=G'(x^2)·2x F(x)是面積函數的合成函數

By 1st fundamental thm. of integral calculus,

$$f(x) = \int_0^{x^2} t\sqrt{t+1}dt \Rightarrow f'(x) = x^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\cdot x^2 = 2x^3\left(\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\left(\int_a^{\sin^2 x} tdt\right)' = \sin^2 x\cdot 2\sin x\cdot \cos x$$

Ex:P252(1.3.29.31.35.36) 補: $f(x) = \int_{x^3+2x}^{\sec x^2} \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + 2dt$. Find f'.