L18 利用圖形凹性和反曲點作圖
5.2 The definite integral of a continous function (連續函數定積分)
Upper sum and Lower sum (上和與下和)

If f and g are concave down on I, then f+g is concave down on I.

一開始從圖形研究，是動機。圖形看到的現象被定義成 concave。
Q:concave up 它的定義是什麼？A:一階微分遞增
Q:用定義證還定理證？A:他給的是一個專有名詞，而不是一個性質。

pf:

∵ f' and g' are decreases on I. ∴ (f+g)'=f'+g' are decreases on I.

Therefore f+g is concave down on I.

eg.1 Sketch the graph of the function.

f(x)=3x^(5/3)-5x.

怎麼畫圖？需要的點只是局部極大極小，一定不可缺，但有這些點，不夠精準，在把圖形的筆畫畫法放進去，開口朝上朝下的銜接點(point of infection)。
事實上需要的點只有局部極大小和反曲點，局部極大極小從 critical point f'(x)=0 or f'(x)找，反曲點從 f''(x)=0 or f''(x)不存在。

pf:

f'(x)=5x^(2/3)-5=0⇒x^(2/3)=1⇒$\sqrt[3]{x^2}$=1⇒x=±1

f''(x)=(10/3)x^(1/-3)=$\frac{10}{\sqrt[3]{x}}$⇒f''(0) doesn't exist.

Q:0 在不在定義域？A:在
Q:要畫的點只要考慮？A:實數只要看±1、0(要算出 y 值)
Q:這個函數定義在哪裡？A:所有點都有定義 ℝ
Q:一(二)階微分研究什麼？A:一階遞增遞減、二階上凹下凹
Q:這三點來自哪裡？A:一階微分或二階微分等於 0 或不存在。
Q:從哪裡畫到哪裡？A:從負無限大到證無大，根據定義域。

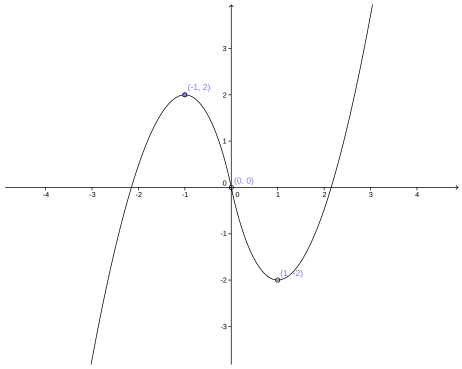
x	x<-1	-1	=-1<x<0	0	0<x<1	1	x>1
f'(x)	+	0	-	-	-	0	+
f''(x)	-	-	-	不存在	+	+	+
f(x)	增下凹	2	減下凹	0	減上凹	-2	增上凹

lim(x→-∞)f(x)=-∞ and lim(x→∞)f(x)=∞ 可微畫出來是圓滑 smooth

L18 利用圖形凹性和反曲點作圖

5.2 The definite integral of a continous function (連續函數定積分)

Upper sum and Lower sum (上和與下和)



eg.2 Sketch the graph of the function $f(x)=x+\cos x$ on $[0,2\pi]$

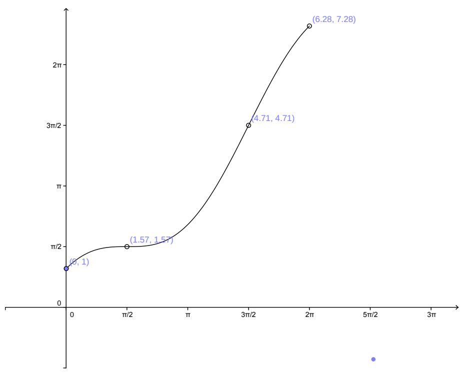
pf:

$f'(x)=1-\sin x=0 \Rightarrow x=\pi/2$

$f''(x)=-\cos x=0 \Rightarrow x=\pi/2, 3\pi/2$

x	$0<x<\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2<\pi<3\pi/2$	$3\pi/2$	$3\pi/2<x<2\pi$
$f'(x)$	+	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	增下凹	$\pi/2$	增上凹	$\pi/2$	增下凹

$f(0)=1$ and $f(2\pi)=2\pi+1$

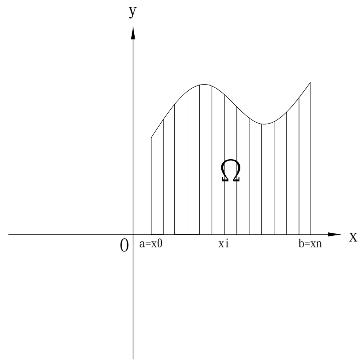


Ex:P194(7.40.44.46)、P208(4.14.21)

補:Let $f:(a,b)\rightarrow \mathbb{R}$ be twice diff.

If $f''>0$ on (a,b), then the graph of the function on $y=f(x)$ lies above any of its tangent lines.

L18 利用圖形凹性和反曲點作圖
5.2 The definite integral of a continous function (連續函數定積分)
Upper sum and Lower sum (上和與下和)



Chapter5 Integration

§ 5.2 The definite integral of a continuous of function.

Question:How to compute area?

Answer:想解決此問題，必須會算定積分。

什麼是定積分呢？下面我們詳細的解釋。

從物理或生活，生活裡頭討論面積是常有的事情，假設這是一畝地和一個池塘，現在要把這塊地賣掉，要知道這塊地是多少，生活裡頭很多事情是不規則的。問題是隨便給你一個圖形，面積多少？
積分一講完面積可算，微分一講完圖形可畫？微積分一講完，高微度的數學就出來了。物理都是在三維與四維。微積分 2 重頭戲，微積分 1 是基礎。
By the way 在大學裡頭課程裡頭，你都要專注，不是要抓出一個結果，而是怎麼樣算怎麼樣做，有過程有步驟。

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be a function.

為了討論的方便起見，先假設 $f\geq 0$ on $[a,b]$.畫出一二象限的圖形

Let the region between the graph of the function $y=f(x)$ and the x-axis be Ω

What's the area(Ω) ?

你可以看出來，圖形本身會亂彎，不一定連續不一定可微，它的不規則取決於這個函數圖形的變化，這個面積沒辦法算，原因是它不是一個規則形(規則形是長方形)。我們希望這個問題可以被解決，這個答案要是有系統的方式，是用於所有的函數，後來人家經過思考，真正使不規則的原因是函數，使得沒辦法一次算出來，我們可以用估計的方式。怎麼估呢？能不能把這個區間做細分，細分的方式還是不規則，能不能讓細分的方式有規則一點，我們需要有系統的方法。我們需要切割，希望割出來的圖形是長方形，割出來的圖形比原來更像長方形，原因是不規則的部分變少。這個割法是有系統的方式，取決於你要割幾塊。你要描述區間，只要描述端點。在數學上的說法是，給分點做細分。
Q:誰的細分？A:函數的定義域的區間。
Q:細分講的是小區間還分點？分點
Q:把它分成 n 個小區間，需要幾個分點？A:n+1

L18 利用圖形凹性和反曲點作圖
5.2 The definite integral of a continous function (連續函數定積分)
Upper sum and Lower sum (上和與下和)
Q:第一個小區間是？A:[a,x1]...[xi-1,b]

Def:

① By a partition Pn of [a,b]

We mean a set of finite points in [a,b] such that $Pn=\{a=x_0<x_1<...<x_n=b\}$

② Let $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$=the length of i^{th} subinterval $[x_{i-1},x_i]$, $\forall$ i=1,2,…n.

eg. Find a P_5 for [0,1] and find its Δx_i.

pf: Let $P_5=\{0<1/5<1/3<1/2<2/3<1\}$

Then $\Delta x_1=1/2$, $\Delta x_2=2/15$, $\Delta x_3=1/6$...

Def:Let $M_i=\sup_{[x_{i-1}-x_i]}f(x)$ and $m_i=\inf_{[x_{i-1}-x_i]}f(x)$, $\forall$i=1,2,...,n.

Then $M_i\Delta x_i$=第 i 的小區間的外接長方形的面積，$m_i\Delta x_i$=第 i 的小區間的內接長方形的面積。

Def:The number $U_f(Pn)=\sum_{i=1}^{n} Mi\Delta xi=(M_1\Delta x_1+M_2\Delta x_2+\cdots+M_n\Delta x_n)$

Is called the Pn-upper sum for f.

And the number $L_f(Pn)=\sum_{i=1}^{n} mi\Delta xi=(m_1\Delta x_1+m_2\Delta x_2+\cdots+m_n\Delta x_n)$

Is called the Pn-lower sum for f.

Q:一般來講函數先固定，誰可動？
A:我們用細分來做細分，Pn 可動。$U_f(Pn)$考慮到函數 f 的 n 項細分

L18 利用圖形凹性和反曲點作圖

5.2 The definite integral of a continous function (連續函數定積分)

Upper sum and Lower sum (上和與下和)

e.g. The function f(x)=5-x^2 on[-1,3].

The partition P={-1,3/2,2,3} is a partition of [-1,3]

Q:為什麼是一個 partition？A:它是一個有限點所成的集合，包含-1 根 3。

Find $L_f(P)$ and $U_f(P)$.

pf:

$M_1=f(0)=5$, $M_2=f(3/2)=(11/4)$, $M_3=f(2)=1$

$U_f(P)=5\cdot(5/2)+(11/4)\cdot(1/2)+1\cdot1=119/8$

$m_1= f(3/2)=(11/4)$, $m_2=f(2)=1$, $m_3= f(3)=-4$

$L_f(P)=(11/4)\cdot(5/2)+ 1\cdot(1/2)+ -4\cdot1=27/8$

Note:$Lf(P)\leq Area(\Omega)\leq Uf(P)$, $\forall P$.