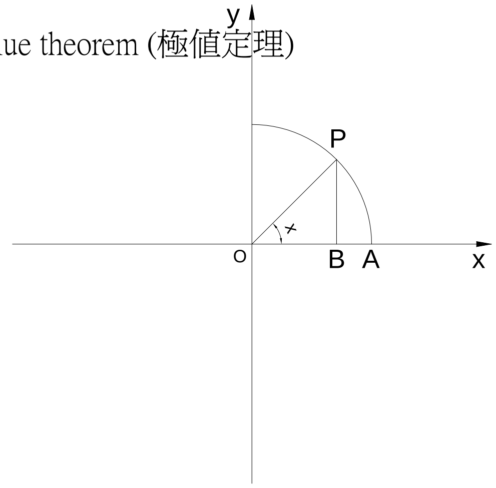
L10 Pinching Theorems (夾擠定理) Trigonometric functions

2.6 Two Basic Theorems

Intermediate value theorem(中間值定理) Extreme value theorem (極值定理)



Thm: $\boxed{\lim_{x\to 0}\sin x=0,\ \lim_{x\to 0}\cos x=1}$

$\lim_{x\to 0}\sin x=0=\sin 0$, $\lim_{x\to 0}\cos x=1=\sin 0$

Hence sinx and cosx are cont. at 0.

pf.我們用夾擊定理證出來，需要利用圖形。

① assume $-\pi/2<x<\pi/2$ and $x\neq 0$

$0<|\sin x|<\overline{PB}\le\widehat{PA}=|x|$ sin 有正有負加絕對值、PA 弧=R θ =|x|

推得 0<PB 線≤|x|

$\because \lim_{x\to c}|x|=0$ Q:結果是什麼？A:中間的極限會存在且相等。

$\therefore$ By Pinching thm,then $\lim_{x\to c}|\sin x|=0$.

Q:但我們是要證 sinx 的極限，而不是要證 sin|x|，要怎麼辦？

A:根據定理。因為絕對值的極限等於 0，所以去絕對值得極限亦為 0。

$\Rightarrow \lim_{x\to c}\sin x=0$ 有了這件事情之後我們知道，

$\lim_{x\to c}\sin x=0$ and $\lim_{x\to c}\cos x=1$，即在 sinx and cosx 在 0 都連續。

Thm: $\boxed{\forall c\in\mathbb{R}\ \ \lim_{x\to c}\sin x=\sin c,\ \lim_{x\to c}\cos x=\cos c}$

Hence sinx and cosx are cont. on $\mathbb{R}$.

pf: 可以換成差值表法

$\lim_{x\to c}\sin x=\lim_{x\to 0}\sin(c+h)=\lim_{x\to 0}(\sin c\times\cos h+\cos c\times\sin h)$

要做極限的四則運算，極限需要先存在。在這裡我們簡略步驟

$=\sin c\times 1+\cos c\times 0=\sin c$ sinc→sinc、cosh→1、cosc→cosc、sinh→0

Q:事實上你用了幾次四則運算？

A:三次。相乘的極限存在，且等於極限相乘。相加的極限存在，且等於極限加。

這小節裡 sinx and cosx 的連續已證，根據連續的四則運算，推得其他六個三角函數也連續，但又去掉分母為 0 的部分。

L10 Pinching Theorems (夾擠定理) Trigonometric functions
2.6 Two Basic Theorems
Intermediate value theorem(中間値定理) Extreme value theorem (極値定理)

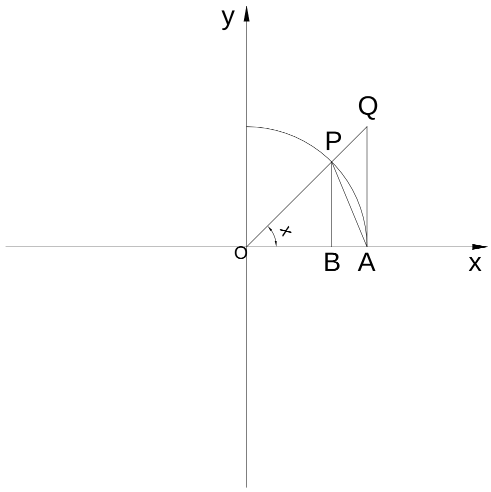
Rmk:六個三角函數的連續性已證得。

Thm:

① $\boxed{\lim_{x\to 0}\sin x/x=1}$

② $\boxed{\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x=0}$

這個地方很明顯的不是用到四則運算，則兩個不是用過去我們已經證過的。
這兩個是一個除法，我們想到的是極限的除法。得分母的極限是 0，則未定。
Q:如果分子的極限不爲 0，分母的極限爲 0，爲多少？A:不存在。根據定理。
0/0 的極限，取決於看誰走到 0 的速度快。



pf:一樣根據畫圖

① For $x\in(0,\pi/2)$

area of ΔOAP=sinx

area of sector OAP= x /2 sector 扇形

area of ΔOQA=tanx/2

$\sin x/2\le x/2\le \tan x/2$

$\because x\in(0,\pi/2)$ $\therefore \sin x>0$

$\Rightarrow 1\le x/\sin x\le 1/\cos x$ 1/2 拿掉，同除 sinx

$\Rightarrow \cos x\le \sin x/x\le 1$ 頭尾的極限存在且相等

$\because \cos x=1$ $\therefore$ By Pinching thm. , $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$ 改爲 $\lim_{x\to 0^+}\sin x/x=1$

Q:這個證明有漏洞？在哪裡？
因爲一開始令 $x\in(0,\pi/2)$，所以只有從右極限成立。

For $x\in(-\pi/2,0)$, $\lim_{x\to 0^-}\sin x/x=1$

Therefore $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$ 若左極限存在右極限存在且相等，則極限存在。

L10 Pinching Theorems (夾擠定理) Trigonometric functions

2.6 Two Basic Theorems

Intermediate value theorem(中間值定理) Extreme value theorem (極値定理)

e.g. lim(x→0)sin(4x)/x=?

原式= lim(x→0)sin(4x)/4x×4=1×4=4

sin(4x)/4x→1、4→4 極限若分別存在，則相乘的極限存在且等於極限相乘。

e.g. lim(x→0)[xcot(3x)]=?因爲相乘的極限不能用，所以要改變形式。

=lim(x→0)[x×cos(3x)/sin(3x)]

= lim(x→0)[1/(sin(3x/x))×cos(3x)]

= lim(x→0)[1/3×1/(sin(3x/3x))×cos(3x)]

1/3→1/3、1/(sin(3x/3x))≠0→1、

Q:cos(3x)是 cos(x)的什麼？A:合成函數。

∵ 3x is cont. at 0 and cos is cont. at 0. c→f(c)→g(f(c))

∴ cos(3x) is cont at 0.

⇒lim(x→0)cos(3x)=cos0=1 函數連續，該點極限值等於該點函數值

So 原式=1/3×1/1×1=1/3 根據極限四則運算的定理

e.g.Prove that if ∃ a number B>0 s.t. |f(x)/x|≤B, ∀ x≠0, then lim(x→0)f(x)=0.

pf:使用夾擊定理證明

∵ 0≤|f(x)/x|≤B ∴ 0≤|f(x)|≤B|x| 同乘|x|

∵ lim(x→0)B|x|=B·0=0 ∴ By Pingching thm lim(x→c)|f(x)|=0

$\Rightarrow \lim(x\to c)f(x)=0$ 函數極限值為 0，去絕對值的極限亦是 0。

法 2

$\because\ |f(x)/x|\le B\ \ \therefore\ -B\le f(x)/x\le B$

For $x>0$, $\because\ \lim(x\to 0^+)-Bx=-B\cdot 0=0$ and $\lim(x\to 0^+)Bx=B\cdot 0=0$

$\therefore$ By Pingching thm. $\lim(x\to c^+)f(x)=0$

For $x<0$, $\because\ \lim(x\to 0^-)-Bx=-B\cdot 0=0$ and $\lim(x\to 0^-)Bx=B\cdot 0=0$

$\therefore$ By Pingching thm. $\lim(x\to c^-)f(x)=0$

$\Rightarrow \lim(x\to c)f(x)=0$

Ex:P96(6.12.18.43.46.47.49.50)

§ 2.6 The Basic Theorems

此章節在於討論有界閉區間上，連續的函數的性質。

第一個考慮連續函數
第二個它的定義域是有界閉區間

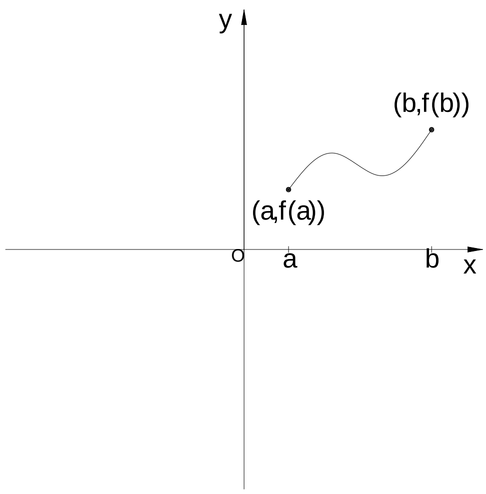
Q:什麼叫有界閉區間？

A:i.e Consider $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ is cont.

Q:什麼叫這個函數在這個區間連續？

A:也就是這個函數定義域的每一點都

滿足極限值等於函數值。



—也就是說從圖形上來看，即函數 $y=f(x)$的圖形在$[a,b]$上皆不斷。

—即圖形可以從$(a,f(a))$這點一筆劃畫到$(b,f(b))$。

L10　Pinching Theorems (夾擠定理) Trigonometric functions
2.6　Two Basic Theorems
Intermediate value theorem(中間值定理)　Extreme value theorem (極值定理)

—故函數圖形必經過中間的所有點。

—即函數 f 必取到所有 f(a)與 f(b)之間的值。轉換成數學建模。

Q:什麼叫中間值？
A:也就是 f(a)與 f(b)之間的值。
Q:函數 f 必取到所有 f(a)與 f(b)之間的值，什麼叫必取到？
A:也就是中間值被函數取到。
Q:函數 f 必取到所有 f(a)與 f(b)之間的值，主詞是誰？
A:中間值，中間值被函數取到。函數本來就在那裡，發生的事情是中間值被取。
Q: If c is number between f(a) and f(b)對應到中文是？
A:f(a)跟 f(b)之間的中間值。
Q:中間值有幾個？
A:無限多個。
Q:什麼叫中間值必被取，被取在數學怎麼表示？
A:被取就是它是一個函數值。
Q:什麼叫它是一個函數值？
A:它是一個某個自變數所對應的取值。就是它是某人的函數值。
也就是存在某人在自變數，使得這個自變數會對應到那個數。
那個數就叫作它被取，或說它是函數值。
自變數上有人對到它，所以它是一個被對應的數，它被函數所取。

它是一個被對應的數，被函數所取。
Q:存在有什麼？
A:某一個自變數∈[a,b]

Thm: (Intermediate Value Theorem)

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, be cont. If c is number between f(a) and f(b), then $\exists\ x_0 \in[a,b]$

s.t. $f(x_0)=c$. c 是 f(a)跟 f(b)之間的中間值。pf 高微

如果有一個在 ab 閉區間的連續函數，對任一的 c 在 f(a)跟 f(b)之間，

則存在有一個 x_0 在 ab 閉區間，使得 $f(x_0)=c$。

Q:存在有一個點，是不是只有一個？
A:不一定，因為你一筆畫畫過去的時候，可以在中間一直震動。

L10 Pinching Theorems (夾擠定理) Trigonometric functions
2.6 Two Basic Theorems
Intermediate value theorem(中間值定理) Extreme value theorem (極值定理)
Q:那爲什麼只做 f(a) and f(b)？它的函數值會不會超過 f(a) and f(b)？
A:會，就看你一筆劃怎麼畫。但是不知道高到哪低到哪裡，可是終究從(a,f(a)) and (a,f(b))。所以大家共有的函數值一定在 f(a) and f(b)之間，至於外面還有，但是有多少，取決於函數圖形的畫法，但如果不管畫法，中間是我們共有的。一定要有一個點，在 f(a) and f(b)。
Q:拿掉連續這個定理對不對？不對，爲什麼？因爲你沒有那兩個參考點。因爲你沒有一筆劃的條件。

cor: $[f(a),f(b)]$ or $[f(b),f(a)] \subset \mathrm{Im} f$

取決於 f(a)誰大 f(b)誰小，Q:f(a)與 f(b)會不會相等？A:不一定。

Imf =Image of f=Range of f 值域 Q:什麼叫值域？所有函數值成的集合

Thm: (Extreme Value Theorem)極值定理 極大值跟值小值

延伸中間值定理，從圖形來看。圖形可以從 a 一比劃畫到 b，不只中間的函數值被 f 取，而且有最高點最低點。
Q:爲什麼圖形一定有極值？A:因爲要從 a 畫到 b，所以一定要畫回到 b。
Q:什麼叫極大值？A:它是一個函數值，函數裡面它最大。

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be cont. Then $\exists\ x_1,x_2\in[a,b]$ s.t. $f(x_1)=\sup(x)\ x\in[a,b]$ and

$f(x_2)=\inf(x)\ x\in[a,b]$. pf 高微

如果有一個在ab閉區間上的函數連續，則存在有 x_1,x_2 屬於 ab 閉區間，

使得 $f(x_1)$等於 sup x 屬於 ab 閉區間和 $f(x_2)$等於 inf x 屬於 ab 閉區間。

P100(3.11.26.28.29)補充題

Let $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ be cont. If $-\sqrt{3},2/3\in \mathrm{Im} f$, then $[-\sqrt{3},2/3]\subset \mathrm{Im} f$.

Let $c\in(-\sqrt{3},2/3)$

$\because$ f is cont. on [a,b] $\therefore$ c is between $-\sqrt{3}$ and 2/3

$\therefore$ By Intermediate Value Thm. $\exists\ x_0$ on [a,b], s.t. $f(x_0)=c$. $\Rightarrow[-\sqrt{3},2/3]\subset \mathrm{Im} f$.