

## L8 2.4 Continuity 證明連續的四則運算 連續的合成函數

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0 \text{ and } \lim_{x \rightarrow c} h(x) = -2,$$

$$\text{Compute } \lim_{x \rightarrow 3} [3 + g(x) / (f(x) - h(x))] = ?$$

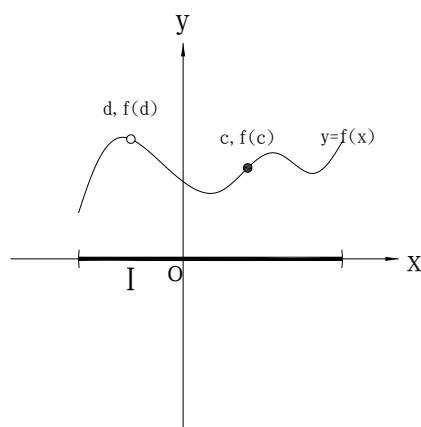
pf: Q: 你要用定義還定理? A: 定理, 利用極限的四則運算。

$$\because \lim_{x \rightarrow 3} 3 = 3 \text{ and } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0. \therefore \lim_{x \rightarrow 3} [3 + g(x)] = 3 + 0 = 3$$

$$\because \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = -2. \therefore \lim_{x \rightarrow 3} [f(x) - h(x)] = 3 - (-2) = 5$$

$$\because 5 \neq 0 \text{ 分母的極限不為 } 0. \therefore \lim_{x \rightarrow 3} [3 + g(x) / (f(x) - h(x))] = 3/5$$

## § 2.4 Continuity



Let  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  be a function, where  $I \in \mathbb{R}$ . 考慮此函數在  $f$  的圖形。

若函數  $y=f(x)$  的圖形, 在  $(c, f(c))$  上不斷時, 在數學上我們就說此函數

$f(x)$  在  $c$  點連續 (continuous) = cont.。

否則為, 不連續 (not continuous) = discontinuous。

在數學上 By the way~ 原始是出自於圖形, 當你講圖形的時候, 圖形上是兩個座標  $(x, y)$ , 換成函數來講的時候, 你只管說函數只管定義域, 它的取值是對應域, 在  $c$  點是連續的,  $f$  在  $c$  點連續。

口語: 若函數  $y=f(x)$  在  $(c, f(c))$  不斷時, 則函數  $f$  在  $c$  點就在連續

## L8 2.4 Continuity 證明連續的四則運算 連續的合成函數

Question:如何不透過畫圖形，而能過確定函數在某點  $c$  連不連續？

圖形上已有抽象概念，找到數學的建模。你在圖形上看到什麼？也就是在靠近  $c$  附近的點在  $c$  有沒有黏上去，一個是逼近  $c$ ，一個是黏上去，也就是逼近  $c$  的極限值要等於函數值。

圖形在  $c$  點不斷時，表現出  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Def:  $f$  is cont. at  $c$  if  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . Otherwise  $f$  is discontinuous.

如果該點的極限值等於該點的函數值，則  $f$  在  $c$  點就連續。

如果該點的極限值不等於該點的函數值，則  $f$  在  $c$  點就不連續。

Q:等號不成立有兩種狀況？A:1.極限不存在 2.極限值不等於函數值

Def: Let  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  be a function  $f$  is cont. on  $I$ , if  $f$  is cont. at every point of  $I$ .

如果在整個區間上的每一點都連續，則函數在定義域上連續。

Question:哪些函數會連續呢？

Ans:在該點函數值等於極限值。

- ① Polynomials are cont. on  $\mathbb{R}$ .
- ② Rations function are cont. on their domain. 定義域
- ③  $|x|$  is cont. on  $\mathbb{R}$ .
- ④  $\sqrt{x}$  is cont on  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  .  $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

如果隨便給你一個函數，問你是否連續？檢驗該函數在該點的極限值有沒有等於該點極限值，也就是就是要去算極限，我們不喜歡用的定義算極限，我們喜歡用定理算極限，也就是極限的四則運算。

Q:連續用極限來定的，極限有四則運算。連續有沒有四則運算？

A:有

## L8 2.4 Continuity 證明連續的四則運算 連續的合成函數

Thm: (連續函數的四則運算)

If  $f$  and  $g$  are cont. at  $c$ , then

Q: 在這個地方討論單點還整個區間? A: 單點, 因為整個區間由單點組成。

①  $f+g$  is cont. at  $c$ .

②  $\alpha + g$  is cont. at  $c$ .

③  $f \times g$  is cont. at  $c$ .

④ If  $g(c) \neq 0$ , then  $f/g$  is cont. at  $c$ .

pf. 從所求想起。By the way  $(f \cdot g) = f(x)g(x)$

③ To show that  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = f(c)g(c)$  函數在該點極限值等於該點函數值

$\because f$  is cont. at  $c \quad \therefore \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  從已知推得該點極限值等於該點函數值

$\because g$  is cont. at  $c \quad \therefore \lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$  從已知推得該點極限值等於該點函數值

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = f(c)g(c)$   $f$  與  $g$  極限存在, 相乘的極限存在等於極限相乘

$\Rightarrow fg$  is cont. at  $c$ . 從連續的定義, 推得  $f(x)g(x)$  在  $c$  點連續。

e.g. Let  $F(x) = 3|x| + (x^3 - x)/(x^2 - 5x + 6) + 4$ .

Show that  $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 4$ ? 用連續算極限, 算連續有 1. 定義、2. 定理。

$\because 0 - 0 + 6 \neq 0 \quad \therefore (x^3 - x)/(x^2 - 5x + 6)$  is defined at 0. 因為分母不為 0

$\Rightarrow$  it is cont. at 0.

$\because 3|x|$  and 4 are cont. at 0.  $\therefore F$  is cont. at 0. 根據定理

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} F(x) = F(0) = 0 + 0 + 4 = 4$

## L8 2.4 Continuity 證明連續的四則運算 連續的合成函數

現在算極限有三種方法 1.用定義、2.用定理、3.用連續

Q:兩個函數除了四則運算還能做怎樣運算？A:合成函數

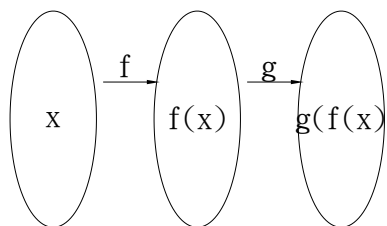
Q 合成函數造出來的多還是四則運算？

A:合成函數，數學上真正造出大量函數的是合成函數

兩個函數不一定能做合成。合成函數的定義  $f \rightarrow g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: I_1 \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)=g(f(x))$

取決  $g(x)$  有沒有定義在在  $f(x)$  上，也就是  $f(x)$  落不落在  $g(x)$  定義域

$f(x)$  定義域只能少，因為要滿足  $g(x)$ ，最好狀況是全部滿足。



$$g \circ f(x) = g(f(x)) = (g \circ f)f(x)$$

Thm: If  $f$  is cont. at  $c$  and  $g$  is cont. at  $f(c)$ , then  $g(f(x))$  is cont. at  $g(f(c))$ .

Next time 證明它~