

L4 左右極限的數學建模 證明極限存在

複習 State the definition of $\lim_{t \rightarrow d} h(t) = W$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ such that $\forall t$ in $0 < |t - d| < \delta$, $|h(t) - W| < \varepsilon$.

微積分整個題材都是極限，極限從圖形建模出來數學模式，會一直延續其它部分。微積分最難的地方就在極限。

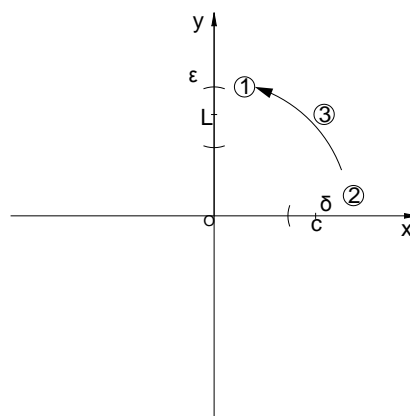
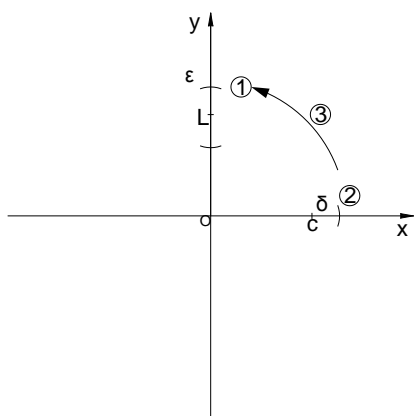
如果不懂上次那個數學建模的過程，並不會影響到之後學微積分，不要這麼快就打退堂鼓，一年後再回來看一定看得懂，這部分需要很深的數學感受，現在看的懂多少就看多少。

Def: We say that $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$, (只從右邊走，只是路徑只取一半。)

if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, such that $\forall x$ in $(c, c + \delta)$, $|h(t) - W| < \varepsilon$.

Def: We say that $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$, (只從左邊走，只是路徑只取一半。)

if $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ such that $\forall x$ in $(c - \delta, c)$, $|h(t) - W| < \varepsilon$.



L4 左右極限的數學建模 證明極限存在

Remark(RmK)(備註):

① Q:為何是「先給 $\varepsilon > 0$ 」,而後才「存在有 $\delta > 0$ 」,而不是「先給 $\delta > 0$ 」,而後才「存在有 $\varepsilon > 0$ 」呢?

A:因為若是給定了 $\delta > 0$,則給定了自變數 x 的範圍(改成區間表法,感覺比較像給點在那,不等式比較難感覺出來) $(c - \delta, c), (c, c + \delta)$, (它的值域給定了沒? 給定了,因為函數給定了、定義域也給了!)其值域就決定了(其對應的點就被固定了),因此就沒有所謂 $f(x)$ 與 L 靠不靠近的問題。故必須是「先給 $\varepsilon > 0$ 」,而後才有「存在有 $\delta > 0$ 」。

② Q:當 ε 變小(跟 L 的距離變小),則 δ 會有什麼變化(δ 描述的是跟 c 的距離)?
 $\varepsilon \rightarrow \delta$

A:因為當 $f(x)$ 靠近 L 時,由 x 靠近 c 來完成,所以當 ε 變小,則 δ 變小。換句話說, δ 由 ε 所決定,故有時將 δ 寫成得 $\delta(\varepsilon)$,隨著 ε 的改變而改變。

③ Q:給定 $\varepsilon > 0$,存在有 $\delta > 0$, δ 的存在唯不唯一?

A:不唯一,為什麼?回到問題來想,給 ε 得 δ ,使得 $x \in (c - \delta, c + \delta), x \neq c$,走到 $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$,所以可以 δ 裡面的點。給定 $\varepsilon > 0$,存在有 $\delta > 0$,但 δ 的存在不會唯一,可取 $3\delta/4, \delta/2, \delta/3, \dots$ 。總而言之,任何比 δ 小的數皆可。

④ Q: $\varepsilon > 0$,「存在有 $\delta > 0$ 」可分為兩種狀況:一種是「去找 $\delta > 0$ 」;另

L4 左右極限的數學建模 證明極限存在

一種「得到 $\delta > 0$ 」。Q:如何判定是哪一種問題？

A:取決於是「去證明 $\lim(x \rightarrow c)f(x)=L$ 」對每一個 $\varepsilon > 0$,去找 δ (證存在有, 白話一點意會叫去找), 做到這件事情代表極限等於 L 或是「已知有 $\lim(x \rightarrow c)f(x)=L$ 」。對給一個 $\varepsilon > 0$, 已經有, 所以定義已經成立, 得到 $\delta > 0$

接下來的題材先給「去證極限=L 的例子」, 再談「在有 limit=L 時」的條件之下, 能做什麼事? 能得怎樣的結果?

有五個例子, 包含所有的技巧。

eg. 1. Show that $\lim(x \rightarrow 2)3x=6$? 為什麼等於 6? 也就是找 δ , δ 沒有找出來就不算證明極限等於 6。

這個東西對應到, $3x$ 是某一家公司, 逼到 2 是明天春天, $=6$ 是營收是成長 30%, 請寫出一個企畫書? 答案我們都知道, 但為什麼?

pf: ε 有無限多種取法, 所以我們給一個任意數, 英文的給用 let, (give 也就是)

令 "Let" $\varepsilon > 0$ (證明的時候我們會常用到? 對應到每一個的時候用) 也就是找 δ

滿足這個不等式怎麼找? 透過不等式 $|f(x)-L| < \varepsilon$, 找 x 滿足不等式, 我們要找的是 c 附近的點, 在 c 附近的點用絕對值表示, 滿足不等式 $|x-2| < \delta$ 。

$|3x-6|$ (先化簡後解) $= 3|x-2| < \varepsilon$ ($x-2$) 是我們要的結果 $\Rightarrow |x-2| < \varepsilon/3$ 。

Take $\delta = \varepsilon/3$ ($\varepsilon/3$ 是給的定數嗎? 給定的了, ε 取 1, δ 取 $1/3$; ε 取 $1/3$, δ 取 $1/9$).

Then $\forall x$ $0 < |x-2| < \delta$, $|3x-6| < \varepsilon$ 。這件事情的成立, 上面的推導。

做到這件事情叫什麼? 要證極限等於 6, 根據定義證得極限等於 6

Therefore $\lim(x \rightarrow 2)3x=6$

Q:取 $\delta/4$ 可不可以?

A:可以, 取法不唯一, 只要取小於 $\delta/3$ 皆可。

作業 P71:22.26.27.35