國 立 清 華 大 學

碩士論文

題目: 混合型指標函數

所　　別:統計學研究所　組別:工業統計組

指導教授:鄭少爲(Shao-Wei Cheng) 博士

姓　　名:林侑廷(Yu-ting Lin)

學　　號:9524513

中華民國九十七年六月

摘要

本篇論文主要探討我們如何使用指標函數來表現各項實驗, 並且將指標函數推廣至同時具有定性型因子與定量型因子的實驗設計, 我們將這樣的指標函數稱爲混合型指標函數。僅具有定性型因子的指標函數或是僅有定量型因子的指標函數, 皆具有投影定理, 及係數平方總和相等的特性等。我們將這些定理推廣至混合型指標函數上。之後藉由比較定量型因子效應, 定性型因子的主效應及交互作用, 還有定量型因子效應與定性型因子的交互作用項等, 對實驗結果的影響程度來排序, 我們由混合型指標函數中的係數, 發展出一新的字長型態,γ字長, 其可用來比較同時具有定性及定量因子的實驗設計之優劣性。其後推導出, 定性型因子的水準調換並不改變γ字長。最後則是在部分限制下, 由資料分析的觀點解釋指標函數中係數平方和所代表的涵義。

目錄

表目錄

Chapter 1

導論及文獻探討

1.1 導論

在部分因子設計中, 對於正規設計, 可藉由定義對比子群 (difining contrast subgroup) 來定義設計; 然而非正規設計中並沒有這樣的結構, 因此無法使用定義對比子群, 然而我們可採用指標函數來代替定義對比子群的功用。在先前的文獻之中已經有許多篇探討對於僅有定性型因子與僅有定量型因子的實驗設計, 可如何使用指標函數, 但是尚無文獻討論將指標函數使用於同時具有定性型因子與定量型因子的設計之中。在本論文中, 我們將討論對於實驗中同時存在定量型因子與定性型因子時, 我們該如何使用指標函數來表示一個設計, 以及使用指標函數的好處。

指標函數最早的一篇論文源自於 Fontana,Pistone 和 Rogantin(2000) 其利用指標函數來探討因子具備 2 個水準的部分因子設計。其後 Ye(2003) 將其推廣至具重複點的二水準因子設計。而 Piston 及 Rogantin(2007)提出了利用單位圓上複數根的方式, 來處理因子水準不相同下的部份因子設計, 我們亦可稱爲混合水準 (mixed level) 的設計; 然而複數的方式僅適用於僅具定性型因子的實驗。而 Cheng 和 Ye(2004) 提出了使用 Orthogonal polynomial basis(之後簡稱 OPB), 將指標函數定義於因子爲定量型因子的部份因子設計。但至今仍無文獻討論對於同時具有定性及定量因子的設計裡, 該如何定義使用指標函數。

在正規設計之中, 定義對比子群有三項主要功能。

1. 可定義出完整的設計矩陣, 即一部分因子設計必有一相對應之定義對比子群。
2. 定義對比子群可將別名集合列出, 即可藉由定義對比子群了解哪些效應是混雜無法區分估計的。
3. 藉由定義對比子群, 可訂定各種準則來比較設計的優劣, 由這些準則挑選出最佳的設計。

不幸的是, 非正規設計中並不存在定義對比子群這個結構。而對正規設計而言, 指標函數其實與定義對比子群有相同的構造。尤其甚者, 指標函數可被定義在非正規設計上, 故對非正規設計而言, 指標函數可扮演一個類似正規設計裡的定義對比子群的角色。

實驗設計中, 對同因子內的不同水準, 我們常用0,1,2..., 的方式來表示其水準不同。於定性因子內不同水準時並無數值上的實質意義, 其僅代表不同的類別, 如使用材質的不同、實驗者的不同、或機種的不同等。而對定量型因子, 水準的不同則有帶有大小順序的涵義, 代表因子水準間的數值差別, 如濃度的變化、使用的時間長短、溫度的影響等, 在因子中有直接的大小涵義。

1.2 定性型因子指標函數

對於定性型因子及定量型因子的不同, 在指標函數之中表示方法則有區別。指標函數中定性型因子有很多種展開方式, 我們介紹將因子水準與複數平面中單位圓的解做對應的方式, 這方法能應用的範圍性廣, 且彈性也較大。且其與傳統的實驗設計代數結構, 如群(group) 或 Galois Field(GF), 可互相呼應。對於定性型因子的水準, 採用單位圓上虛數根個數解的方式表示, 如因子A有n個水準, 故在設計矩陣之下0,1,2,3,...,$n-1$表示爲因子A的n個水準; 而在複數平面中單位圓上的方程式$A^n = 1$, 方程式共有n個解, 因此

$$A_k = exp\frac{2\pi}{n}ki, \qquad k = 0, 1, 2...n-1 \tag{1.1}$$

這樣的方式我們稱之為複數編碼, 將因子的各個水準與複數單位圓上的解做對應。而在指標函數中各項展開式, 則以X^α的方式作為展開, 對應於因子的每個因子水準, 我們可由表1.1做為範例, 其中X^A與X^B 表示因子A和因子B在指標函數中的各項水準, 而對於因子A與B的交互作用, 如AB或AB^2項, 亦可利用複數空間的加乘性

$$X^A * X^B = X^{A+B}$$

由X^A,X^B交乘, 或將$(A+B)$代入複數編碼運算而得。

A	B	$A+B$	X^A	X^B	X^{A+B}
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	$exp\frac{2\pi}{3}i$	$exp\frac{2\pi}{3}i$
0	2	2	1	$exp\frac{4\pi}{3}i$	$exp\frac{4\pi}{3}i$
1	0	1	$exp\frac{2\pi}{3}i$	1	$exp\frac{2\pi}{3}i$
1	1	2	$exp\frac{2\pi}{3}i$	$exp\frac{2\pi}{3}i$	$exp\frac{4\pi}{3}i$
1	2	0	$exp\frac{2\pi}{3}i$	$exp\frac{4\pi}{3}i$	1
2	0	2	$exp\frac{4\pi}{3}i$	1	$exp\frac{4\pi}{3}i$
2	1	0	$exp\frac{4\pi}{3}i$	$exp\frac{2\pi}{3}i$	1
2	2	1	$exp\frac{4\pi}{3}i$	$exp\frac{4\pi}{3}i$	$exp\frac{2\pi}{3}i$

表 1.1: 定性型因子展開方式

在上表中X^{A+B}代表定性型因子A, B的交互作用, 我們可以將定性型因子的交互作用項以X^α來表示, 如$X^\alpha = X^{11}$就代表因子A, B 的交互作用項。在定性型因子中, 若A, B皆具有三個水準, 其交互作用項則有四個維度, 我們在指標函數中能以$X^{11}, X^{12}, X^{21}, X^{22}$來代表, 我們在之後的文章多以這種型式表示。並由上表中我們可看出X^{A+B}中各個元素, 會是由X^A的元素與X^B的元素交乘而生成。

若今天有實驗設計中有定性型因子T_1,T_2,...,T_k, 而S_1,S_2...S_k為相對應的因子水準個數; 我們令t_i代表因子T_i的水準, 而T代表所有因子的水準組合, 即

$$T = (t_1, t_2, ..., t_k)$$

對於一部分因子設計G, 令N爲全因子設計下實驗總數, 則我們可藉由複數編碼的方式將指標函數表達爲

$$F(T) = \sum_{\alpha \in E} P_\alpha X^\alpha(T) \tag{1.2}$$

而

$$P_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{T \in G} \overline{X^\alpha}(T)$$

其中α代表定性型因子的組合, 令E爲α的定義域空間。在指標函數中的係數P_α, 具有別名 (aliasing) 的意義, 若因子A, B的交互作用展開項中有一係數不爲0, 則可推得 A, B的交互作用與常數項 (constant effect) 有別名效應產生。

對於展開項X^α的計算, 如當因子A, B皆爲3水準的因子, 當$\alpha = u, v$時, 我們藉由複數的特性, 推得

$$X^{u,v} = exp\frac{2\pi}{3}(u * A * i)exp\frac{2\pi}{3}(v * B * i) = exp\frac{2\pi}{3}(Au + Bv)i \tag{1.3}$$

關於用複數來表示定性型因子的指標函數, 以及係數的生成定理等更詳細的介紹, 請見 Pistone 與 Rogantin(2007) , 有更詳細的介紹與分析。

1.3 定量型因子指標函數

而對於定量型的因子, 若以複數根的方式來表示各因子的水準不同, 則會造成一些性質的遺失, 如無法呈現幾何同構性 (geometric isomorphism) 的差異, 無法區分出線性效應及二次效應等, 在 Cheng 和 Ye(2004) 之中有詳細的討論與介紹。因爲這些因素, 我們使用別的編碼方式來表示具有定量型因子的指標函數展開項。令全因子設計爲 D, 而T_1,T_2,...,T_k爲定量因子, 而S_1,S_2...S_k爲因子相對應的水準個數, 因此我們在設計矩陣中, 可由0,1,2,...,$S_i - 1$, 來表示因子T_i中S_i個水準。我們令t_i爲因子T_i的水準 ,對任意定量因子水準t_i, 設計 orthogonal contrast basis(簡稱 OCB), 表示爲$C_0^i(t_i)$,$C_1^i(t_i)$,...,$C_{S_i-1}^i(t_i)$, 其滿足

$$\sum_{t_i \in \{0,1...S_i-1\}} C_{u_i}^i(t_i) C_{v_i}^i(t_i) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_i \neq v_i, \\ S_i & \text{if } u_i = v_i. \end{cases} \tag{1.4}$$

我們令T爲設計中定量型因子的水準組合即$T = (t_1, t_2, ..., t_k)$。我們令 orthogonal contrast basis(OCB) 爲

$$C_U(T) = \prod_{i=1}^{k} C_{u_i}^i(t_i) \tag{1.5}$$

由式子 (1.2) 中可以得知,

$$\sum_{t \in D} C_U(t) C_V(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } U \neq V, \\ N & \text{if } U = V. \end{cases}$$

其中$N = \prod_{i=1}^{k} S_i$, 且U,V分別代表兩組因子集合的 OCB 組合,

$$U = (u_1, u_2, ..., u_k),$$
$$V = (v_1, v_2, ..., v_k).$$

我們對所有因子T_i, 令$C_0^i(t_i) = 1$, 代表一個因子的常數效應, 因爲在統計分析中常將常數項設爲1, 這樣的設定我們稱爲 statistical orthonormal contrast basis(SOCB), 將各因子常數效應視爲1。若將C_j^i以j次方多項式來呈現, 此時我們稱 (1.4) 式中C_U爲 orthogonal polynomial basis(OPB), 可以藉此表現定量型的因子各階層的效應交乘項, 如線性效應, 二次效應等。比如對於三個水準的因子A的線性效應C_1^A與二次效應C_2^A, 我們可用多項式表達爲, 其中$A \in \{0, 1, 2\}$

$$C_1^A = \sqrt{\frac{3}{2}}(A-1) \tag{1.6}$$
$$C_2^A = \sqrt{2}(\frac{3}{2}(A-1)^2 - 1) \tag{1.7}$$

若今天僅有兩個定量型因子A, B, 且都爲三個水準的因子, 我們可用$C_{i,j}$代表因子A的i次效應與因子B的j次效應交乘項。我們用表1.2的形式來表示因子A 與因子B各個水準組合在 OPB 裡面的對應值, 以及因子A與因子B的線性交乘項。

A	B	指標函數	$C_{1,0}$	$C_{0,1}$	$C_{2,0}$	$C_{0,2}$	$C_{1,1}$
0	0		$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$
0	1		$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	0
0	2		$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-$\frac{2}{3}$
1	0		0	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
1	1		0	0	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
1	2		0	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
2	0		$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	-$\frac{2}{3}$
2	1		$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	0
2	2		$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$

表 1.2: 定量型因子的展開

在實驗設計中若因子A, B具有三個水準下, 則在指標函數之中我們用C_β來代表定量型因子的交互作用, 如$C_\beta = C_{12}$代表定量型因子A的線性效應與因子B的二次效應的交互作用, 其生成方式爲將因子A的線性效應與因子B的二次效應相乘而得。

對於定量型因子的指標函數的展開, 在部分因子設計G下, 設全因子設計總數爲N時,T爲定量型因子的水準組合, 則我們可以將指標函數表達爲

$$F(T) = \sum_{\beta \in E} P_\beta C_\beta(T) \tag{1.8}$$

且

$$P_\beta = \frac{1}{N} \sum_{T \in G} C_\beta(T)$$

其中β代表定量型效應的交乘項, 即爲上述中某一 OPB 的基底, 而E則代表β的定義域空間。我們可由OPB的生成敘述得知,β的定義域空間會與定量型因子的水準空間相同。而展開項的係數P_β亦具有代表此效應是否產生別名的涵義, 當係數爲0時, 我們稱該效應與常數項不具別名效應, 或此展開項的效應與效應間不具有別名性; 若效應的係數不爲0, 則稱該效應與常數項產生別名的情形。對於更多關於定量型因子的指標函數, 請見 Cheng 和 Ye(2004), 其中有更多詳細的推廣與敘述。

1.4 定性型因子與定量型因子的比較

由上面分開介紹定量型因子與定性型因子在指標函數中展開的方式, 一般而言, 定量型因子與定性型因子的差異主要便在於水準本身的特性不同。定性型因子的水準僅代表實驗設計類別的不同, 而定量型設計的水準差異會帶有數值意義。因此在實驗設計中, 我們在定性型因子做水準調換 (level permutation) 時, 如,

$$\{0,1,2\} \longrightarrow \{0,2,1\}$$

並不影響實驗設計中的差異。但若對定量型因子的水準做調換時, 則可能產生不同的設計, 因此我們對於定量型因子的水準順序會將其與該因子的數值順序一致, 不再做變動。

先前文獻裡,Xu 和 Wu(2001) 提出定性的部分因子設計中, 以牽涉到的因子個數來比較設計中效應順序性的 minimum aberration(之後簡稱 MA) 法則。而 Cheng 和 Ye(2004) 則訂定出在定量型因子的效應排序法則, 並提出其 MA 準則。本篇則採用新的方式, 嘗試使用新的準則來比較出設計間的法則, 避免重要因子效應混雜而無法區分判別。

1.5 導讀

本篇第二章主要探討定性與定量因子混合的指標函數呈現方式, 與基本特性。第三章裡將有定性與定量的效應做重要性的排序, 並比較與之前排序的異同性。第四章探討係數長度平方和的基本性質, 並應用第三章的特性來比較不同實驗間的優劣性。而在第五章裡, 我們在部分限制下討論係數長度平方和與平面以及向量間的夾角具有關聯性, 做爲第四章之輔助。

Chapter 2

混合型指標函數

2.1 混合型指標函數的推導

在第一章之中我們介紹了, 實驗裡僅有定性型因子的設計與僅有定量型因子的設計之指標函數表達方式。在本章中, 我們將考慮把指標函數推廣至混合型的設計, 所謂的混合型是指其同時包含定性型與定量型因子。定性型因子與定量型因子在特性上的一個主要差異是: 定量型因子間水準(level) 之間, 存在著大小順序, 而這點特性是定性型因子所沒有的, 因此在混合型設計之指標函數中, 我們需將此差異納入考量, 對定性型因子及定量型因子在指標函數中展開時使用的方式採用不同的方法。

由於定性型因子與定量型因子具有差異性, 所以我們將定性型因子歸於一群, 而定量型因子歸於一群, 以方便表達指標函數的特色。令T_{ab}爲全部因子的集合, 其中T_a表示定性型因子集合,T_b表示定量型因子集合。如全部共有因子$\{A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_n\}$, 其中$\{A_1, A_2..., A_m\}$爲定性型因子,$\{B_1, B_2, ..., B_n\}$爲定量型因子, 則

$$T_{ab} = \{A_1, A_2, ..., A_m, B_1, B_2, ..., B_n\}$$
$$T_a = \{A_1, A_2, ..., A_m\} \quad T_b = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$$

我們令包含所有定性型因子及定量型因子的全因子設計爲D, 而僅包含所有定性型因子的全因子設計爲D_a, 即D_a爲僅涵蓋T_a的全因子設計。並令僅包含所有定

量型因子的全因子設計爲D_b。令N_a爲D_a的實驗總數, 而N_b爲D_b的實驗總數, 且令N爲所有因子全因子設計D的實驗總數。其中D是由定性型因子全因子設計與定量型因子全因子設計所組成的, 我們可寫爲$D = D_a \otimes D_b$, 因此$N = N_a * N_b$。

我們亦令定性型因子A_i中具有r_i個水準, 而定量型因子B_j中具有s_j個水準, 則$N_a = \prod_{i=1}^{m} r_i$且$N_b = \prod_{j=1}^{n} s_j$, 且

$$N = N_a * N_b = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} r_i s_j$$

在一部分因子設計G中, 某一水準組合 (level combination)t_{ab}落在G之中, 則我們稱$t_{ab} \in G$。我們稱t_{ab}爲一個因子的水準組合, 它涵蓋了定性型因子及定量型因子, 我們亦可令t_a爲定性型因子的水準組合, 而t_b爲定量型因子的水準組合。如$T_{ab} = \{(A_1, A_2), (B_1, B_2)\}$, 且四個因子都爲三個水準的因子, 若

$$t_{ab} = ((12), (01)),$$

則表示此設定中定性因子A_1水準爲1, 定性因子A_2水準爲2, 而定量因子B_1水準爲0, 定量因子B_2的水準爲1; 亦即$t_a = (1, 2)$, 而$t_b = (0, 1)$。在混合型的指標函數之中, 我們常將因子的水準組合分爲定性型的水準組合與定量型的水準組合個別表示, 在之後有更詳細的介紹。

在前一章關於指標函數的介紹裡, 我們可以將定性因子的每一水準在指標函數中與複數空間上的單位圓的解做一對一對應, 我們將其稱之爲複數編碼。使用複數編碼的優點在於, 對於定性因子內不管因子具有兩個水準、三個水準或者更高, 複數編碼都能用上述方法表示。其次在定性因子具有兩水準時, 與常用表達兩水準的編碼方式 (1,-1) 相同, 並不相違背。我們用$X^{\alpha}(t_a)$代表定性因子在指標函數中的展開項, 其中X^{α}代表定性因子的交互作用項, α表示定性因子的組合, 亦可表示交互作用的因子。我們將α以數列的方式表示。如共有A, B, C三個定性型因子, 則$X^{\alpha} = X^{201}$代表因子 A,C 的其一交互作用項, 其中$\alpha = (2, 0, 1)$, 我們爲了方便表示, 在指標函數中的展開像以 X^{201}代表, 若因子水準多於9個時, 再用符號區隔開來。

而對於定量型因子, 我們可用第一章所介紹的OPB正交多項式的方式, 做爲定量型因子在指標函數的展開方式。OPB的方式乃將定量型因子的次方效應 (effect), 如線性效應或二次效應等, 做爲定量因子在指標函數中的展開項的基底。我們在指標函數中以$C_\beta(t_b)$表示定量因子效應的交乘項, 其中β也是以數列的方式呈現。如$C_\beta = C_{012}$, 代表定量因子B的線性效應與定量因子C的二次效應相成造成的交互作用。

在定性型因子之中我們用各項X^α做爲定性型指標函數的基底; 而在定量型因子之中我們則用C_β做爲定量型指標函數的基底。在混合型指標函數中, 同時包含定性型因子與定量型因子, 因爲我們將定性型因子的展開方式與定量型因子展開方式分開處理, 因此對於混合型的指標函數的展開項我們以$X^\alpha C_\beta$的方式表示。其中α代表定性因子的交互作用項, 由單位圓上複數編碼的特性, 能發現α的定義域空間會與定性型因子水準集合t_a在D_a中的定義域相同相同。而定量型因子中β表達各因子的次方效應交乘項, 定量型因子水準與該因子所能分解出的效應數相同, 因此與定量型因子水準集合t_b在D_b中的定義域相同。在指標函數之中, 我們用E來代表α與β的定義域。我們可將一部份因子設計G的指標函數表爲

$$F(t_{a,b}) = \sum_{\alpha,\beta \in E} P_{\alpha,\beta} X^\alpha(t_a) C_\beta(t_b) \tag{2.1}$$

其中$P_{\alpha,\beta}$爲指標函數各項的係數。對於一部分因子設計, 我們將定性型的因子的水準集合代入指標函數裡的t_a中, 而將定量型因子的水準集合代入指標函數的t_b之中。我們將任一全因子設計的水準組合t_{ab}代入 (2.1) 式中, 便可得此水準組合在部分因子設計G中的實驗次數。

上述的方式主要是對於定性因子水準個數爲質數的部份, 當水準爲質數的次方時, 如水準爲8,9時, 或水準爲質數的交乘, 如6, 則我們在指標函數中爲定性型因子採取虛假因子 (pseudo factor) 的方式。對於定量型因子, 在指標函數中是採用效應的階層來展開, 因此對於因子水準是否爲質數並無太大的影響; 而對於定性型因子, 如當水準爲9時, 我們可以拆成兩個水準爲3的定性型因子來作爲取代, 此法稱爲虛假因子, 詳細內容可以參照 Pistone 和 Rogantin (2007) 的文獻, 裡面有詳

細介紹指標函數中複數編碼的方式與虛假因子。下面我們則介紹如何藉由部分因子設計G, 來生成指標函數, 並計算出指標函數中展開項的係數。

2.2 係數生成定理

定理 1. 在一部分因子設計G中,D爲全因子設計, 則部份因子設計K的指標函數表達爲 *(2.1)* 式其中t_a爲定性因子的水準組合, 而t_b爲定量因子的水準組合, 則該指標函數中的任一係數$P_{\alpha,\beta}$都有固定值, 且

$$P_{\alpha,\beta} = \frac{1}{N}\sum_{t_{ab}\in G}\overline{X^{\alpha}(t_a)}C_{\beta}(t_b)$$

$$P_{0,0} = \frac{n}{N}$$

其中N爲全因子設計下試驗總數,n爲部份因子實驗K的試驗總數。

証明. 首先D_a代表僅有定性因子的全因子設計, 而D_b代表僅有定量因子的全因子設計, 我們令N_a代表定性型因子在D_a中的實驗總數, 而N_b代表定量型因子在D_b中的實驗總數。因爲定性因子採用將各水準與複數平面上單位圓的解作爲對應, 由複數的性質我們可以得知

$$\sum_{t_a\in D_a} X^{\alpha}\overline{X^{\beta}} = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ N_a, & \text{if } \alpha = \beta. \end{cases}$$

我們將定量因子在指標函數展開採用 OPB 的方式, 因此由 OPB 的性質可以推得

$$\sum_{t_b\in D_b} C_{\beta}C_{\alpha} = \begin{cases} 0, & \text{if } \alpha \neq \beta, \\ N_b, & \text{if } \alpha = \beta \end{cases}$$

由上述兩項性質加以合併下得

$$\sum_{t_{ab}\in G}\overline{X^{\alpha}}(t_a)C_{\beta}(t_b)=\sum_{t_{ab}\in D}F(t_ab)\overline{X^{\alpha}}(t_a)C_{\beta}(t_b)$$
$$=\sum_{t_{ab}\in D}\sum_{\alpha',\beta'\in E}P_{\alpha',\beta'}X^{\alpha'}(t_a)C_{\beta'}(t_b)\overline{X^{\alpha}}(t_a)C_{\beta}(t_b)$$
$$=\sum_{\alpha',\beta'}P_{\alpha',\beta'}\sum_{t_{ab}\in D}X^{\alpha'}C_{\beta'}\overline{X^{\alpha}}C_{\beta}=N*P_{\alpha,\beta}$$

其中當$\alpha=\alpha',\beta=\beta'$時

$$\sum_{t_{ab}\in D}X^{\alpha'}C_{\beta'}\overline{X^{\alpha}}C_{\beta}=\sum_{t_a\in D_a}X^{\alpha'}(t_a)X^{\alpha}(t_a)\sum_{t_b\in D_b}C_{\beta'}(t_b)C_{\beta}(t_b)=N_a*N_b=N$$

得

$$\sum_{t_{ab}\in G}\overline{X^{\alpha}}(t_a)C_{\beta}(t_b)=N*P_{\alpha,\beta}$$

即

$$P_{\alpha,\beta}=\frac{1}{N}\sum_{t\in G}\overline{X^{\alpha}}(t_a)C_{\beta}(t_b)$$

而在指標函數的常數項可得

$$P_{0,0}=\frac{1}{N}\sum_{t\in K}=\frac{n}{N}$$

若對於指標函數中展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$其係數爲$P_{\alpha,\beta}$與$Q_{\alpha,\beta}$, 且$P_{\alpha,\beta}\neq Q_{\alpha,\beta}$ 則由上式

$$P_{\alpha,\beta}=\frac{1}{N}\sum_{t_{ab}\in G}\overline{X^{\alpha}}(t_a)C_{\beta}(t_b)$$
$$Q_{\alpha,\beta}=\frac{1}{N}\sum_{t_{ab}\in G}\overline{X^{\alpha}}(t_a)C_{\beta}(t_b)$$

得知

$$P_{\alpha,\beta}\neq Q_{\alpha,\beta}$$

矛盾, 因此指標函數中係數固定且唯一。

$\square$

由上述定理得知, 若欲求得$P_{\alpha,\beta}$我們可將部分因子設計裡各水準組合代入$\overline{X^{\alpha}}C_{\beta}$加總運算, 便可得此部分因子設計中指標函數展開項各項係數, 並且其值爲一定值, 固定且唯一。接下來將介紹一個正規實驗設計, 與一個非正規實驗設計的例子。

2.3 實例

例子1・正規設計 若有一個實驗, 其有共有A, B, C三個因子,A, B皆是定性型的因子,C爲定量型的因子。若A, B, C皆選爲具有三個水準, 則對一定義對比子群爲$I = A + B + 2C$ 的正規部分因子設計, 其設計矩陣G共有9組水準組合如表2.1所示。

A	B	C
0	0	0
1	2	0
2	1	0
0	1	1
1	0	1
2	2	1
0	2	2
1	1	2
2	0	2

表 2.1: 正規設計

我們做部分係數的推導, 由第一章中對定量與定性型指標函數的介紹, 及 (1.3),(1.6) 與 (1.7) 式, 可得展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$的運算方式。今$T_a = (A, B)$,$T_b = (C)$, 當$(\alpha, \beta) = (12, 1)$時, 代表一個定性型因子$A, B$與定量型因子$C$的線性效應的交互作用展開項, 則係數爲

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha,\beta} = P_{12,1} &= \frac{1}{27}\sum_{(A,B,C)\in G}\overline{X^{\alpha}}(A,B)C_{\beta}(C) = \frac{1}{27}\sum_{(A,B,C)\in G} exp(i\frac{2\pi}{3}(2A+B))\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\
&= \frac{1}{27}\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}+0+\sqrt{\frac{3}{2}}\right]\left[1+exp(i\frac{4\pi}{3})+exp(i\frac{2\pi}{3})\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

而當$(\alpha,\beta) = (11,1)$時, 代表另一個定性型因子A, B與定量型因子C的線性效應的交互作用展開項, 對於係數$P_{11,1}$

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha,\beta} = P_{11,1} &= \frac{1}{27}\sum_{(A,B,C)\in G}\overline{exp(i\frac{2\pi}{3})}(A+B)C_{\beta}(C) = \frac{1}{27}\sum_{(A,B,C)\in G} exp(i\frac{4\pi}{3}(A+B))\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\
&= \frac{1}{27}3\left(1*-\sqrt{\frac{3}{2}}+exp(i\frac{4\pi}{3})*0+exp(i\frac{2\pi}{3})*\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{27}3\left[-\sqrt{\frac{3}{2}}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)*\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}+i\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

我們可藉由運算得到所有的係數, 並寫出其指標函數

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) = \frac{1}{3} &+ [-\frac{1\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}+i\frac{1}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{2\pi}{3}(A+B))\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\
&+ [-\frac{1\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}-i\frac{1}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{2\pi}{3}(2A+2B))\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\
&+ [\frac{1}{6\sqrt{2}}+i\frac{1\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{2\pi}{3}(A+B))\sqrt{2}(\frac{3}{2}(C-1)^2-1) \\
&+ [\frac{1}{6\sqrt{2}}-i\frac{1\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{2\pi}{3}(2A+2B))\sqrt{2}(\frac{3}{2}(C-1)^2-1)
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

我們可將表 (2.1) 裡因子A, B, C的任一水準組合, 代入設計的指標函數 (2.2) 中運算, 即可得知該水準組合在部分因子設計G中的實驗次數, 如實驗點 (0,1,1) 與

(0,1,2) 代入 (2.2) 式後可得, 則

$$F(0,1,1) = 1 \qquad F(0,1,2) = 0$$

且由表 (2.1) 中可知,(0,1,1) 屬於部分因子設計中的實驗點, 而 (0,1,2) 並非此部分因子設計中的實驗點, 因此我們得知在正規設計下可藉由指標函數明顯區分設計點與非設計點。

原先在指標函數中, 三個因子皆具有三個水準之下, 則指標函數該具有27個項, 但在 (2.2) 式中, 僅有五項不爲零。扣除常數項外我們發現, 當指標函數中的各項係數, 當展開項中$\beta = 0$或α中具有0, 則該展開項係數皆爲0。這與與正規設計的解析度 (resolution) 爲3有關係, 在此後的章節我們會有更詳細的介紹。

在上面式子中我們可以發現, 當C_β相同下, 則如$P_{11,1}$與$P_{22,1}$係數有共軛的特性, 而$P_{11,2}$與$P_{22,2}$係數也有共軛的特性。所謂的複數共軛代表兩複數間實數項相同, 而虛數項相加爲0。要計算一個展開項的共軛項, 我們可由定性型因子每個因子的水準總數扣掉α便可得, 此與複數平面上單位圓的解特性有關。如尋找$P_{11,1}$的共軛項, 則 (3,3)-(1,1)=(2,2), 得$P_{22,1}$爲其共軛項, 在表示中我們亦可由 $\overline{X^\alpha} C_\beta$代表$X^\alpha C_\beta$的共軛項, 這個定理我們在之後會有更詳細的介紹。

例子2. 非正規設計

在下頁表2.2的L_{18}設計矩陣之中, 我們只取因子A,B,C的部份爲例。令A,B爲定性型因子, 因子C爲定量型因子。此一部分因子設計爲非正規設計, 故無法使用定義對比子群來表示此設計。應用指標函數的係數定理, 我們可計算出該部分因子設計的指標函數, 並可藉由該指標函數來表示各個設計在此部分因子設計裡出現的次數。

0	A	B	C	D	E	F	G
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	2	2	2	2	2	2
0	1	0	0	1	1	2	2
0	1	1	1	2	2	0	0
0	1	2	2	0	0	1	1
0	2	0	1	0	2	1	2
0	2	1	2	1	0	2	0
0	2	2	0	2	1	0	1
1	0	0	2	2	1	1	0
1	0	1	0	0	2	2	1
1	0	2	1	1	0	0	2
1	1	0	1	2	0	2	1
1	1	1	2	0	1	0	2
1	1	2	0	1	2	1	0
1	2	0	2	1	2	0	1
1	2	1	0	2	0	1	2
1	2	2	1	0	1	2	0

表 2.2: L18

利用定理1, 我們可得其指標函數爲

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) = \frac{2}{3} &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} i * exp(\frac{2\pi(A+B)}{3} i) \sqrt{\frac{3}{2}} (C-1) \\
&+ \frac{1}{3\sqrt{2}} * exp(\frac{2\pi(A+B)}{3} i) \sqrt{2} \left[\frac{3}{2}(C-1)^2 - 1 \right] \\
&- \frac{1}{3\sqrt{2}} i * exp(\frac{2\pi(2A+2B)}{3} i) \sqrt{\frac{3}{2}} (C-1) \\
&+ \frac{1}{3\sqrt{2}} * exp(\frac{2\pi(2A+2B)}{3} i) \sqrt{2} \left[\frac{3}{2}(C-1)^2 - 1 \right] \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

由 (2.3) 式我們可以發現, 常數項$\frac{2}{3}$代表實驗次數在全因子設計下的比值, 如三個因子的全因子設計中原有27個實驗次數, 而今只實驗了18次, 因此常數項爲$\frac{18}{27}$。在係數之中, 僅在同時含有因子A, B, C的交互作用項係數才不爲0, 這是因爲任意的兩兩因子都具有垂直 (orthogonal) 特色, 所以係數會爲0。這項特性會在之後的係數特性的時候會做討論。

將水準組合$t_{AB}=(1,1,1)$與水準組合$t_{AB}=(1,1,0)$代入, 我們可以得

$$F(1,1,1)=1 \qquad F(1,1,0)=0$$

並由表 (2.2) 中, 水準組合 (1,1,1) 落於部份因子設計中, 而水準組合 (1,1,0) 並不存在餘部分因子設計之中。

由上述兩個例子我們可以得知, 不論是正規實驗設計或非正規實驗設計, 皆可使用指標函數的方式讓我們藉由指標函數了解此部分因子設計的實驗次數與特質, 並且每個部分因子設計的指標函數是唯一的。接下來我們介紹幾個指標函數的特色, 有些是利用複數共軛的特性, 有些則是利用投影的概念來產生。

2.4 混合型指標函數的定理

定理 2. 全因子設計D之中, 今存在一部份因子設計G_1, 其定性實驗因子爲$A_1,A_2...A_m$, 而定量實驗因子爲$B_1,B_2...B_n$, 相對應的因子水準爲$r_1,r_2...r_m$, 與$s_1,s_2...s_n$, 令原先因子集合爲T_{AB}, 任一組因子組合可表爲t_{ab}, 則G_1的指標函數爲F_1,

$$F_1(t_{ab})=\sum_{\alpha,\beta\in E} P_{\alpha,\beta}X^{\alpha}(t_a)C_{\beta}(t_b),$$

其中E爲α,β的定義空間。今若部分因子設計G_1中減少實驗的因子, 令新得到的實驗設計爲G_2, 其全因子設計空間令爲D_{new}, 實驗因子爲$A_1,A_2...A_k,B_1,B_2...B_l$, 其中$k<m,l<n$, 則新的因子集合令爲$T'_{ab}$, 且令$E_{new}$爲新的$\alpha,\beta$定義空間。則新的指標函數$F_2$爲

$$F_2(t'_{ab})=N_1\sum_{\alpha,\beta\in E_{new}} P_{\alpha,\beta}X^{\alpha}(t'_a)C_{\beta}(t'_b)$$

其中

$$N_1=\prod_{k+1\le i\le m}\prod_{l+1\le j\le n} s_i r_j$$

証明. 令原先全因子設計中實驗總數爲N, 縮減因子後全因子設計實驗總數爲N_{new}, 在因子數量縮減下, 實驗總數並不改變, 而新的全因子總數爲

$$N_{new} = \frac{N}{N_1}$$

在指標函數係數中, 若$(\alpha, \beta) \in E_{new}$, 則由定理1得知

$$P'_{\alpha,\beta} = \frac{1}{N_{new}} \sum_{t_{ab} \in G_1} \overline{X^{\alpha}}(t_a) C_{\beta}(t_b) = \frac{N_1}{N} \sum_{t_{ab} \in G_1} \overline{X^{\alpha}}(t'_a) C_{\beta}(t'_b)$$

若$(\alpha, \beta) \notin E_{new}$, 則該項係數不存在於新指標函數$F_2$中。
因此我們可推得

$$F_2(t'_{ab}) = N_1 \sum_{\alpha,\beta \in E_{new}} P'_{\alpha,\beta} X^{\alpha}(t'_a) C_{\beta}(t'_b)$$

□

由定理2可推得知, 對一部份因子設計當其實驗因子縮減下, 則先將與縮減掉因子有相關的係數移除後, 再將原本指標函數乘以各項縮減因子的水準數量。由此方式我們便可得知道因子縮減後的新指標函數。

如在例2之中, 原先實驗設計含有三個因子, 指標函數爲

$$\begin{aligned} F(A,B,C) = \frac{2}{3} &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} iexp(\frac{2\pi(A+B)}{3} i) \sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} exp(\frac{2\pi(A+B)}{3} i) \sqrt{2} \left[\frac{3}{2}(C-1)^2 - 1\right] \\ &- \frac{1}{3\sqrt{2}} iexp(\frac{2\pi(2A+2B)}{3} i) \sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} exp(\frac{2\pi(2A+2B)}{3} i) \sqrt{2} \left[\frac{3}{2}(C-1)^2 - 1\right] \end{aligned}$$

今將此實驗設計縮減爲兩個因子, 如將因子C剔除在實驗外, 在原實驗設計中的指標函數, 兩因子的交互作用項係數皆爲0, 所以新的實驗設計除常數項外係數皆爲0。而對於常數項, 新的指標函數常數項爲

$$\frac{2}{3} * 3 = 2$$

我們可由表 (2.2) 發現, 因子縮減後的全因子設計爲兩次的兩個因子全因子設計, 與新的指標函數中常數項爲2符合。

接下來我們介紹指標函數中係數的共軛關係, 在正規設計中我們提到當C_β相同時, 則$X^\alpha C_\beta$與$\overline{X^\alpha} C_\beta$稱之爲共軛項。共軛項的特性在於兩者的各個定性因子的水準相加皆等於該因子的水準總數, 如$T_a = (A, B)$且皆爲三個水準, 則X^{12}的共軛項爲X^{21}, 即用因子各水準總數減去原先定性因子的水準, 即可得該定性因子共軛項的水準。若以複數平面中單位圓上的解來看, 對於定性因子中的水準與其共軛項的水準, 在複數平面中與X軸的夾角, 其兩者角度相加會爲360度。在指標函數中, 共軛項會有成對出現的特性, 並且共軛項的係數具有複數的共軛關係, 我們將在下面證明。

定理 3. 指標函數之中, 當定量型因子的效應相同時, 則共軛的定性因子項影響會成對出現, 並且係數也會有共軛關係。即若指標函數中$P_{\alpha,\beta}$爲$X^\alpha C_\beta$的係數, 且不爲零, 則$\overline{X^\alpha} C_\beta$存在, 且係數爲$\overline{P_{\alpha,\beta}}$。

証明. 若某設計之指標函數爲

$$F(t_{ab}) = \sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta} X^\alpha(t_a) C_\beta(t_b),$$

則

$$\overline{F(t_{ab})} = \sum_{\alpha,\beta} \overline{P_{\alpha,\beta} X^\alpha}(t_a) C_\beta(t_b),$$

我們用$X^{-\alpha}$代表在$F(t_{ab})$中X^α的共軛項, 且$P_{-\alpha.\beta}$爲$X^{-\alpha} C_\beta$的係數。

因爲$F(t_{ab})$代表水準組合$t_a b$在部份因子設計之中出現的次數, 所以$F(t_{ab})$爲一實數值函數, 因此

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta} X^\alpha(t_a) C_\beta(t_b) = F(t_{ab}) = \overline{F(t_{ab})} = \sum_{\alpha,\beta} \overline{P_{\alpha,\beta} X^\alpha}(t_a) C_\beta(t_b) \\ = \sum_{\alpha,\beta} P_{-\alpha,\beta} X^{-\alpha}(t_a) C_\beta(t_b)\end{aligned}$$

因爲

$$\overline{X^{-\alpha}}C_\beta = X^\alpha C_\beta$$

我們推出

$$F(t_{ab}) = \sum_{\alpha,\beta} P_{\alpha,\beta} X^\alpha(t_a) C_\beta(t_b) = \sum_{\alpha,\beta} \overline{P_{-\alpha,\beta}} X^\alpha(t_a) C_\beta(t_b)$$

且指標函數因子係數唯一, 所以

$$P_{-\alpha,\beta} = \overline{P_{\alpha,\beta}}$$

□

由此定理可知, 對指標函數展開中僅有定性因子構成的展開項, 或是定性型因子與定量型因子交乘的展開項, 其係數具有共軛性。這項定理可幫助我們在計算指標函數的係數時, 減少運算時間與步驟。

如在例1中, 部分因子設計的指標函數爲

$$\begin{aligned}
F(A,B,C) = \frac{1}{3} &+ [-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} + i\frac{1}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{2\pi}{3}(A+B))\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\
&+ [-\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} - i\frac{1}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{2\pi}{3}(2A+2B))\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\
&+ [\frac{1}{6\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{2\pi}{3}(A+B))\sqrt{2}(\frac{3}{2}(C-1)^2-1) \\
&+ [\frac{1}{6\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}}]exp(i\frac{\pi}{3}(2A+2B))\sqrt{2}(\frac{3}{2}(C-1)^2-1)
\end{aligned}$$

我們可以發現當$(\alpha,\beta) = (11,1)$時,

$$P_{11,1} = -\frac{1\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} + i\frac{1}{6\sqrt{2}},$$

由定理3我們推斷$P_{22,1}$不爲零, 且$P_{22,1} = -\frac{1\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} - i\frac{1}{6\sqrt{2}}$, 由上式可發現此推斷成立。並且在$(\alpha,\beta) = (11,2)$與$(\alpha,\beta) = (22,2)$的時候也成立。

接下來介紹指標函數係數平方和加總的特性。在實驗設計之中, 相同的水準組合實驗次數可能不只一次, 因此我們可以將實驗次數列出來, 統計實驗次數相同的數量, 便可得知在此實驗設計中所有因子實驗次數的總數, 我們稱之爲重複頻率。

定理 4. 指標函數的係數平方總和會滿足

$$\sum_{\alpha,\beta}\left\|\frac{P_{\alpha,\beta}}{P_{0,0}}\right\|^2=\frac{N\sum_{t_{ab}\in D}F^2(t_{ab})}{n^2}$$

其中$F(x)$爲指標函數,N爲全因子實驗設計總數,n爲部份因子實驗總數

證明.

$$\begin{aligned}\sum_{t_{ab}\in D}F^2(t_{ab})&=\sum_{t_{ab}\in D}\left(\sum_{\alpha,\beta}P_{\alpha,\beta}X^{\alpha}(t_a)C_{\beta}(t_b)\right)^2\\ &=\sum_{t_{ab}\in D}\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}P_{\alpha,\beta}P_{\alpha',\beta'}X^{\alpha}X^{\alpha'}C_{\beta}C_{\beta'}\\ &=\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'}P_{\alpha,\beta}P_{\alpha',\beta'}\sum_{t_{ab}\in D}X^{\alpha}X^{\alpha'}C_{\beta}C_{\beta'}\end{aligned}\tag{2.4}$$

且由定理1的推導得知得知

$$\sum_{t_{ab}\in D}X^{\alpha}X^{\alpha'}C_{\beta}C_{\beta'}=\begin{cases}N_{\alpha}, & \text{if }\alpha=\alpha',\beta=\beta',\\ 0, & \text{if otherwise.}\end{cases}$$

因此帶入 (2.4) 中得

$$\sum_{t_{ab}\in D}F^2(t_{ab})=N\sum_{\alpha,\beta}\|P_{\alpha,\beta}\|^2$$

且$P_{0,0}=\frac{n}{N}$所以推得

$$\sum_{\alpha,\beta}\left\|\frac{P_{\alpha,\beta}}{P_{0,0}}\right\|^2=\frac{N\sum_{t_{ab}\in D}F^2(t_{ab})}{n^2}$$

$\square$

引理 1. 對於所有單一次實驗的部份因子設計中, 所有係數長度平方總和會滿足

$$\sum_{\alpha,\beta} \left\| \frac{P_{\alpha,\beta}}{P_{0,0}} \right\|^2 = \frac{N}{n}$$

証明. 因爲是單一次 (nonreplicate) 的部份因子設計, 因此實驗次數不是0就是1, 所以

$$\sum_{t_{ab}\in D} F^2(t_{ab}) = \sum_{t_{ab}\in D} F(t_{ab}) = n,$$

因此由定理4可以推得

$$\sum_{\alpha,\beta} \left\| \frac{P_{\alpha,\beta}}{P_{0,0}} \right\|^2 = \frac{N}{n}$$

□

如在例二中, 指標函數爲

$$\begin{aligned} F(A,B,C) = \frac{2}{3} &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} iexp(\frac{2\pi(A+B)}{3} i)\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} exp(\frac{2\pi(A+B)}{3} i)\sqrt{2}\left[\frac{3}{2}(C-1)^2 - 1\right] \\ &- \frac{1}{3\sqrt{2}} iexp(\frac{2\pi(2A+2B)}{3} i)\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1) \\ &+ \frac{1}{3\sqrt{2}} exp(\frac{2\pi(2A+2B)}{3} i)\sqrt{2}\left[\frac{3}{2}(C-1)^2 - 1\right] \end{aligned} \tag{2.5}$$

我們將各項係數長度平方和相加爲

$$\left\|\frac{2}{3}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{3\sqrt{2}}i\right\|^2 + \left\|\frac{1}{3\sqrt{2}}\right\|^2 + \left\|-\frac{1}{3\sqrt{2}}i\right\|^2 + \left\|\frac{1}{3\sqrt{2}}\right\|^2 = \frac{6}{9}$$

推出

$$\sum_{\alpha,\beta} \left\| \frac{P_{\alpha,\beta}}{P_{0,0}} \right\|^2 = \frac{3}{2}$$

而使用定理4, 我們可得

$$\sum_{\alpha,\beta} \left\| \frac{P_{\alpha,\beta}}{P_{0,0}} \right\|^2 = \frac{N}{n} = \frac{27}{18} = \frac{3}{2}$$

由定理4我們可以得知, 係數長度平方總和僅與實驗次數總數及重複頻率有關聯。因此若兩部份因子設計其重複頻率與實驗總數相同下, 其指標函數中的係數長度平方總和固定。因此若指標函數中係數本身大小具有涵義, 配合因子效應間重要性的排序, 並與定理4性質的搭配, 我們可藉此以比較出不同的因子實驗設計間的優劣性。在下一章中我們先介紹如何將定性型因子與定量型因子的效應做大小排序外, 並更考慮了同時具有定性型因子及定量型因子混合的效應。

Chapter 3

因子間重要性的排序

3.1 α字長與β字長

在多數的實驗中, 爲了減少實驗的成本, 我們並不採取全因子實驗設計, 而使用了部份因子設計。但當實驗總數減少時, 也付出了因子間會有別名效應 (aliasing) 的代價, 使得效應無法再完全正交 (fully orthogonal)。爲了衡量別名的嚴重程度, 對於正規設計我們可以藉由定義對比子群, 依定義對比子群所定義出來的字長型態 (word length pattern) 來排序, 做爲比較部份因子設計優劣的評斷方式。但對於非正規設定, 因其並無定義對比子群的結構, 故要將字長型態的概念推廣到非正規設計上, 頗費了一番功夫。因爲字長型態可利用指標函數來計算, 且因指標函數除定義在正規設計外, 亦可同樣定義於非正規設計, 故利用指標函數來定義字長型態, 可以避開非正規設計無定義對比子群的問題。對於僅有定性因子的實驗,Xu 和 Wu(2001) 由 ANOVA 的角度出發, 提出了一個字長型態, 來比較不同實驗設計間的優劣性。而對於僅有定量因子的實驗,Cheng 和 Ye(2004) 利用指標函數提出了另一個字長型態, 其考慮效應的次方高低, 如線性效應或者是二次效應等, 因此項字長型態考慮了因子的效應階層, 故適用於定量因子設計之排序。Cheng和 Ye(2004) 稱其爲定量因子定義的字長型態爲β字長型態, 並將 Xu 和 Wu(2001) 爲定性因子定義的字長型態稱爲α 字長型態。

若由指標函數的觀點出發, 所謂的α字長即是在僅有定性因子設計下的指標函數中, 將指標函數的各項係數依效應所牽涉到的因子數個數做分類, 將效應所牽涉

到的因子個數相同者, 取其在指標函數中之係數與常數項比值, 再平方總和相加而成。如某一僅有定性因子指標函數爲

$$F(t) = \sum_{\alpha \in E} P_\alpha X^\alpha(t)$$

令$\| \alpha \|_1$表示指標函數中各項展開項所牽涉到的因子數, 例如$X^\alpha = X^{102}$代表因子 A,C 的交互作用, 則此展開項的$\| \alpha \|_1 = 2$。則α字長可定義爲
$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, 其中

$$\alpha_i = \sum_{\|\alpha\|_1 = i} \left\| \frac{P_\alpha}{P_0} \right\|^2$$

而若今天在定性因子中存在有虛假因子 (pseudo factor), 則需將虛假因子當成單一的因子, 如因子A可拆爲A_1,A_2兩個虛假因子, 則在計算效應所牽涉到的因子個數時, 對於效應間單獨牽涉到A_1,A_2, 或同時與A_1,A_2有關聯時, 我們都只視爲單一因子。因爲A_1 ,A_2皆是代表因子A, 而並非眞正存在兩個不同的因子。

而在僅有定量因子的設計之中, 除了效應本身牽涉到的因子數量多寡外, 因子的線性效應或是二次效應亦有差異存在。以一般經驗法則來說, 單一因子的二次效應我們認爲與兩個因子的線性與線性交互作用同等重要。因此, 如僅有定量型因子的指標函數爲:

$$F(t) = \sum_{\beta \in E} P_\beta C_\beta(t)$$

令$\| \beta \|_2$表示指標函數中各展開項中效應的階層加總, 例如$C_\beta = C_{012}$代表因子 B 的線性效應與因子 C 的二次效應交乘項, 則此交乘效應的$\| \beta \|_2 = 3$。令β字長$(\beta_1, \beta_2 ... \beta_n)$, 則定義

$$\beta_i = \sum_{\|\beta\|_2 = i} \left\| \frac{P_\beta}{P_0} \right\|^2$$

3.2 混合型實驗之效應排序法則

以下我們將利用混合型指標函數, 把字長型態推廣到同時含有定性型與定量型的因子的實驗。一般來說, 效應間重要性的排序, 主要是由效應排序法則(Heirachical ordering principle) 來做爲判斷, 對於混合型的實驗, 我們提出以下的排序準則:

準則1. 對於定性型因子效應, 牽涉因子數少者其重要性較效應牽涉因子數多者重要。

準則2. 對於定量型因子效應, 效應階層總和越小越爲重要, 效應階層總和若相同則視爲同等重要, 並稱之爲同群。對於同群的定量型因子效應, 以涵蓋最多定量型因子個數的效應之因子數, 做爲因子個數的基準。

準則3. 混合型效應中, 若效應牽涉定性型因子個數相同下, 定量型效應階層總和相同之效應則同等重要, 並視於同一群。並以同群效應中牽涉因子最多的效應之因子數, 做爲該群效應因子數比較之基準。

準則4. 對於任一種效應或交互作用的排序, 效應牽涉因子數少者, 其重要性較效應牽涉因子數多者重要。

準則5. 若效應間牽涉到的因子總數一樣多, 則我們比較效應間的自由度, 自由度較低者視爲較爲重要。而對於同群的效應, 我們以同群效應中自由度最高者做爲比較之依據。

準則6. 由準則1至準則5排序, 若效應間牽涉因子個數相同, 並且自由度也相同, 則我們視兩效應同等重要。

在之前文獻之中, 皆沒有比較過定性因子的交互作用與定量因子的效應重要性的排列, 並且也沒有考慮到混合型效應的排序。在此效應排序法則下, 我們可以藉由上述的效應排序法則來做爲依據, 並在下面介紹上述排序法則的合理性。首先當定量因子跟定性因子皆是具有兩個水準的因子時, 對於定量因子與定性因子並沒有分析上的差異, 因此我們採用定量因子與定性因子皆據爲三個水準下來做比較。爲了表示上方便, 在定性型因子的部份, 令a代表定性型的因子; 而用l和q分別代表定量因子的線性效應與二次效應。

首先我們可由準則1來排序僅有定性因子構成的效應, 定性因子的各項水準並沒有數值上的差異, 在分析之中採由 ANOVA 的方式來分析。在定性因子交互作用項所牽涉的因子越少的效應, 對於實驗結果有較爲直接的影響力, 而交互作用牽涉因子越多影響力則較小。因此在部分因子設計之中, 也會盡量避免交互項因子少的效應互相別名 (aliasing)。所以對於定性型因子的交互作用大小排序爲

$$a \gg aa \gg aaa \gg aaaa \tag{3.1}$$

接下來我們由準則2排序僅由定量因子構成的效應排序, 在僅有定量型因子的設計下, Cheng和 Ye(2004)提出要考慮因子效應的的次方階層。一般的情形之中, 定量型因子的線性效應往往較定量型因子的二次效應來的較爲直接, 因此我們認爲因子的線性效應較二次效應較爲重要; 對於效應的階層越低我們視爲越重要。並由經驗法則, 我們可視定量型因子效應階層總和相同者一樣重要, 可將階層總合相同的效應視爲同一群; 如效應階層總和爲2的線性與線性的交互效應 (用ll表示), 與單一因子的二次效應(q), 可視爲影響力相同的效應。而效應階層爲3的效應, 我們則視爲另外一群, 我們將lll,lq,ql放在這一群之中。因此對於定量型因子效應大小排序, 我們以效應階層爲依據, 可排序爲

$$l \gg ll == q \gg lll == lq == ql \gg llll == llq == lql == qll == qq \tag{3.2}$$

由(3.1)式與(3.2)式, 可以得到僅有定性型因子與僅有定量型因子的效應排序, 我們接下來將定量型的因子效應安插在定性型的排序之中。首先我們安插單一因子的線性效應l於(3.1)式中, 由準則2得知效應l爲牽涉單一因子的效應, 因此由準則4, 我們將效應l置於兩定性因子效應aa之前; 而對於單一定性因子效應a與效應l的排序, 我們則要經準則5比較兩者的自由度。在分析之中, 若定性型因子a與一定量型因子線性效應l對實驗是顯著影響, 我們能判定此定量因子線性效應會對實驗結果產生影響。而對於定性型的因子, 由於分析中是對因子a的各個水準設定一起做分析, 可能造成有些因子的設定改變時並無顯著影響, 但是 ANOVA 分析無法判別是否有此情形。因此我們可由效應中自由度的多寡, 視定量型線性效應l比定性型因子作用a爲重要, 可排序爲

$$l \gg a \gg aa \gg aaa \gg aaaa$$

接下來我們將單一因子的二次效應q安插於定性因子的排序之中, 由於效應q與效應ll由準則2視為同一群, 因此兩者影響力同等重要; 並且由準則2, 在同群中的效應我們以牽涉因子最多的效應做為因子個數的基準, 因此將效應q與效應ll的效應群視為2因子的效應, 所以置於效應a之後, 並在效應aaa之前。而對於效應aa與效應群{q,ll}的排序, 由準則5將效應群中自由度最大的效應做為比較基準; 由於效應q 與效應ll自由度皆為1, 而效應aa自由度為4, 因此可排序為

$$l \gg a \gg ll \gg aa \gg aaa \gg aaaa$$

由上面的論述, 我們可以考慮因分析策略中自由度的不同而造成的差異, 定量型因子中考慮單一效應的自由度為1; 而定性型因子的交互作用則同時考慮其對於實驗結果的影響, 其自由度高於1。我們可以藉此觀點比較二定性型因子的交互作用aa與效應群{ll,q}的排序大小上, 交互作用aa項的自由度為4, 而效應ll與效應q的自由度皆為1, 因此我們可將效應群{ll,q}視為比交互作用aa項重要。可發現對於具有因子個數相同的效應, 定量型因子的效應的自由度比定性型因子的效應自由度低, 因此我們可將定量型因子效應視為較重要。我們可以排序出

$$\begin{aligned} & l \gg a \gg ll == q \gg aa \gg lll == lq == ql \gg aaa \\ & \gg llll == llq == lql == qll == qq \gg aaaa \end{aligned} \tag{3.3}$$

而對於混合型效應, 如一定性型因子與定量型因子線性效應的交互作用項(al), 我們可由式子(3.1)與式子(3.2)中各群的效應交乘而得。如將式子(3.1)中的效應a與式子(3.2)中效應l交乘則得效應al; 而若將式子(3.1)中的效應a與式子(3.2)中效應群{ll,q}交乘 , 則可得效應all與效應aq; 並可由準則3, 我們將效應all與效應aq視為同一群。因此當(3.1)式的效應與(3.2)式中效應群交乘時, 所得之效應亦視為同一群。

接下來排序效應al項, 首先由準則4比較效應間的因子個數, 效應al因子個數為2, 與式子(3.3)相較下, 我們置於效應a與效應lll之間。而效應對於ll,al及aa, 皆是兩個因子的效應, 則由準則5來比較。在因子水準皆是三個水準下, 可知兩定量因子的線性效應交互作用項 ll的自由度為1, 而定性型因子與定性型因子的交互作用

項aa其自由度為4, 而al為定性因子與定量型因子的線性效應交互作用, 其自由度為2。因此由準則5, 可將效應排序為$ll \gg al \gg aa$。

而對於效應群{all,aq}排序, 首先我們以效應群中因子個數上限all來比較, 因子個數為3, 所以由準則4將效應群{all,aq}置於效應aa與效應$llll$之間。接下來在效應aaa,lll與效應群{all,aq}的排序, 我們以準則5來比較; 效應aaa的自由度為8, 效應lll的自由度為1。而效應群{all,aq}中, 效應all與效應 aq其自由度皆為2, 因此可排序為$lll \gg all == aq \gg aaa$。由上述推論, 我們可將定量型因子效應, 定性型因子效應, 及混合型因子效應排序為

$$\begin{aligned} & l \gg a \gg ll == q \gg al \gg aa \gg lll == lq == ql \gg all == aq \gg aal \gg aaa \\ & \gg llll == llq == lql == qll == qq \gg alll == alq == aql \gg aall == aaq \\ & \gg aaal \gg aaaa \end{aligned} \tag{3.4}$$

比較本章一開始所介紹的效應排序法則, 在比較各項效應與交互作用項之間的排序, 最直觀的看法為考慮到效應所牽涉到的因子個數, 因子個數越多則認為影響力越小。然而對於定量型的效應, 是以效應階層總和做為比較依據, 因此影響力相同下的效應其因子個數不一定唯一, 我們以同群中涵蓋因子數最多的效應做為因子個數的依據。而對混合性效應, 定性因子個數相同下我們也考量定量型效應階層總和是否相同, 相同則至於同一群, 視為同等重要。而後將因子個數越少的效應視為越重要, 對於效應群因子個數的判別則以該群效應的因子個數上限為基準。因子個數相同下再比較效應間的自由度, 而效應群的自由度則以該群效應自由度上限為基準為判別。若兩效應在上述比較下皆相同, 則我們視兩效應為同等重要。

在混合型實驗設計之中, 由上述法則已能比較出效應間的重要順序, 我們將可藉此發展出字長型態比較實驗設計的優劣性。由上述的推論我們得知, 影響效應排序大小的第一原則為效應所牽涉到的因子個數, 而在因子個數相同下, 才考慮到效應間自由度大小的差異, 而自由度的大小與所效應所牽涉的定量型因子個數相關。在混合型的指標函數中, 任一指標函數展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$可表為(α, β)。我們令

$$\| (\alpha, \beta) \|_3 = \| \alpha \|_1 + \| \beta \|_2 \tag{3.5}$$

在混合型指標函數之中, 定量型因子才用 OPB 的方式展開, 而定性型因子並沒有所謂的線性效應或者二次效應, 主要影響效應彼此間重要性的差別來自於交互作用間本身的所牽涉到的定性因子個數。在式子(3.5)中,$\|\alpha\|_1$代表定性因子交互作用所牽涉到的因子個數: 而$\|\beta\|_2$代表定量因子效應階層的加總。應用將定量型因子高階層的效應轉換成線性效應交互作用的想法, 如將定量型因子的二次效應q, 視爲與兩個因子線性效應交互作用ll同等重要, $\|\beta\|_2$可將定量型的效應表達爲全是線性效應交乘項所牽涉到的因子個數。接下來我們用$\|(\alpha,\beta)\|_3$做爲效應重要性的排序準則。

指標函數中兩個展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$與$X^{\alpha'}C'_{\beta}$, 令$\|\alpha\|_1$代表展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$中定性因子交互作用所牽涉到的因子個數, 而$\|\beta\|_2$代表$X^{\alpha}C_{\beta}$中定量因子效應階層的加總。令$\|(\alpha,\beta)\|_3 = \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_2$。則排序準則

1. 當$\| (\alpha,\beta) \|_3 < \| (\alpha',\beta') \|_3$, 則$(\alpha,\beta)$影響力較$(\alpha',\beta')$爲大。

2. 當$\| (\alpha,\beta) \|_3 = \| (\alpha',\beta') \|_3$, 若$\| \alpha \|_1 < \| \alpha' \|_1$, 則$(\alpha,\beta)$影響力較$(\alpha',\beta')$爲大。

3. 當$\| (\alpha,\beta) \|_3 = \| (\alpha',\beta') \|_3$,且$\| \beta \|_2 = \| \beta' \|_2$, 則$(\alpha,\beta)$影響力與$(\alpha',\beta')$同。

我們使用$\| (\alpha,\beta) \|_3$的依據在於$\| \alpha \|_1$代表定性因子交互作用所牽涉到的因子個數; 而$\| \beta \|_2$代表定量因子效應階層的加總, 對於定量型因子效應階層相同下, 可轉換成定量型因子線性效應的交互作用。故$\| (\alpha,\beta) \|_3$能呈現出該效應相對最多的因子個數。

接下來當$\| (\alpha,\beta) \|_3$與$\| (\alpha',\beta') \|_3$相等下, 若 $\| \alpha \|_1 < \| \alpha' \|_1$, 代表$(\alpha,\beta)$的定性因子個數較少, 當效應所牽涉的定性型因子數量較多下, 該效應自由度會變大, 因此在效應的排序中會視爲較不重要的效應。因此我們在$\| (\alpha,\beta) \|_3$相同下, 採取比較定性因子數量的多寡, 來作爲排序依據。而若定性因子個數也一樣多下, 則我們認爲這兩個效應爲同等重要。

我們可以將上述排序準則來解釋式子 (3.4) 的排序, 先計算出定性型因子的個數, 並計算出定量型因子的效應階層總和, 即爲$\| (\alpha,\beta) \|_3$, 做爲排序的第一步驟。

因此像a,l的效應我們置於效應q,ll,aa, 與al之前。其次在$\| (\alpha, \beta) \|_3$相同的情況下, 我們比較定性型因子的個數, 即$\| \alpha \|_1$, 因此我們可得

$$l \gg a \gg ll == q \gg al \gg aa$$

再排序下去便可得出式子 (3.4), 下面則由其他例子作爲介紹。

例: 若實驗設計中具有定性型因子 A,B, 和定量型因子 C,D,E, 這五個因子都具有三個水準。當單純比較定性水準的效應時, 單一定性因子效應如$\alpha = (10)$與, 兩定性因子的交互作用如$\alpha' = (11)$比較時, 由上述準則

$$\| (10, 000) \|_3 < \| (11, 000) \|_3$$

因此可判定單一定性因子的效應較兩定性因子的交互作用爲重要。

若比較定量因子的階層效應時, 如因子D的二次效應與E的線性效應交互作用, 與因子C, D的線性作用交互作用項, 其中

$$\| (00, 021) \|_3 < \| (00, 110) \|_3$$

我們可以判讀爲, 因子D的二次效應與E的線性效應交互作用, 較因子C, D的線性作用交互作用不重要。

今$(\alpha, \beta) = (10, 100)$代表定性型因子$A$與定量型因子$C$線性效應的交乘項, 而$(\alpha', \beta') = (01, 011)$代表定性因子$B$與定量因子$D$線性效應及$E$線性效應的交乘。$(\alpha, \beta)$與$(\alpha', \beta')$皆爲同時具有定量與定性因子的效應。我們藉由準則

$$\| (10, 100) \|_3 = \| (10) \|_1 + \| (100) \|_2 = 1 + 1 = 2$$

$$\| (01, 011) \|_3 = \| (01) \|_1 + \| (011) \|_2 = 1 + 2 = 3$$

可以發現(α', β')所牽涉到的因子個數較多, 因此我們可以判別效應性型因子A與定量型因子C線性效應的交乘項, 較定性因子B與定量因子D線性效應及E線性效應的交乘爲重要。

若$(\alpha,\beta) = (11,00)$代表定性型因子A與定性型因子B的交互作用, 而$(\alpha',\beta') = (01,010)$代表定性因子$B$與定量因子$D$線性效應的交互作用。我們藉由準則

$$\| (11,000) \|_3 = \| (11) \|_1 + \| (000) \|_2 = 2+0=2$$

$$\| (01,010) \|_3 = \| (01) \|_1 + \| (010) \|_2 = 1+1=2$$

兩者在準則1中相等, 因此我們比較兩效應間何者定性型因子較多,

$$\| (11) \|_1 = \| (11) \|_1 = 2$$

$$\| (01) \|_1 = \| (01) \|_1 = 1$$

定性因子B與定量因子D線性效應的交互作用之中, 所牽涉到的定性因子較少, 因而自由度也較小, 所以我們由準則判斷出該效應較定性型因子A,B的交互作用重要。

3.3 混合型指標函數與γ字長

在混合型的實驗設計之中, 其指標函數可以表爲

$$F(t_{A,B}) = \sum_{\alpha,\beta \in E} P_{\alpha,\beta} X^{\alpha}(t_A) C_{\beta}(t_B)$$

將指標函數中各個展開項與上述的新距離型態做合併, 如在上例中,
$X^{\alpha}C_{\beta} = X^{11}C_{020}$ 代表定性因子A,B與因子D的二次效應的交互作用, 則此交乘效應的$\| (11,020) \|_3 = 4$。然而在$\|(\alpha,\beta)\|_3$相同下, 定性因子個數有可能不一樣多, 而造成效應間自由度的不同, 我們由上述法則可以推斷出$\|(\alpha,\beta)\|_3$相同下, 定性因子個數越少則效應越重要。

相較於先前所提及的專爲定性型實驗設計發展的α字長與, 可應用在定量型因子的β字長, 我們推出新的字長, 令其爲γ字長。則γ字長可定義爲
$(\gamma_{1.0}, \gamma_{1.1}, ...\gamma_{n.(n-1)}, \gamma_{n.n})$, 其中

$$\gamma_{i,j} = \sum_{\|(\alpha,\beta)\|_3=i,\|\alpha\|_1=j} \left\| \frac{P_{\alpha,\beta}}{P_{0,0}} \right\|^2 \qquad ,j \leqslant i$$

因爲在混合型的指標函數之中, 我們不僅僅只關心定性型因子與定量型因子的個數, 亦要討論效應中的定性因子個數, 而j即代表定性因子的個數。

在兩個實驗設計中, 如實驗設計A,B, 其中A,B的實驗總數與重複頻率相等下, 令A的γ字長爲 $(\gamma_{1.0},\gamma_{1.1},...,\gamma_{n.n})$, 而$B$的$\gamma$字長爲 $(\gamma'_{1.0},\gamma'_{1.1},...\gamma'_{n.n})$, 我們使用$\gamma$字長來比較兩實驗的優劣性

1. 若$\gamma_{1.0}$=$\gamma_{1.1}$...=$\gamma_{i.j}$=0, 且$\gamma'_{i.j} \neq 0$, 則設計A較設計B爲佳。
2. 若$\gamma_{1.0} = \gamma_{1.1}... = \gamma_{i.j-1} = 0$,$\gamma'_{1.0} = \gamma'_{1.1} = ...\gamma'_{i.j-1} = 0$, 且$\gamma_{i,j} < \gamma'_{i,j}$, 則設計$A$較設計$B$爲佳。

當實驗中定性型因子存在有虛假因子時, 對於γ字長, 或者是效應間的排序時, 我們都必須將單一因子衍生出來的虛假因子視爲一個因子, 而非多個因子。如3.1節所述, 虛假因子僅是代表單一的因子, 並非眞正存在, 因此在計算因子個數的時候, 應該僅以原先因子個數作爲基準, 才不會造成排序上的困擾。

我們排序出定性型因子、定量型因子與混合型因子效應的重要性, 並與指標函數的係數做連接產生出γ字長, 亦可藉由γ字長的數值比較出實驗設計間的優劣性。而在下一章中, 我們將介紹係數的數值特性, 以及係數所代表的涵義。

3.4 L_{18}中取出的最佳設計

在第二章中我們舉了L_{18}的設計, 做爲非正規設計的實例, 而在本章中提出了如何比較實驗間設計優劣的方式, 我們便以L_{18}中三個水準的因子爲實例, 找尋最佳的設計。見表2.2, 如在L_{18}中因子A,B...G皆爲三水準的因子, 我們可藉由每種選取方法的指標函數中的γ字長來排序。

設計L_{18}中, 任取兩個因子爲定性型因子, 兩個因子爲定量型因子, 則共有210種的選取方式。此選取下的γ字長共有

$$(\gamma_{1,0},\gamma_{1,1},\gamma_{2,0},\gamma_{2,1},\gamma_{2,2},\gamma_{3,0},\gamma_{3,1},\gamma_{3,2},\gamma_{4,0},\gamma_{4,1},\gamma_{4,2},\gamma_{5,1},\gamma_{5,2},\gamma_{6,2})$$

當因子C,D爲定性型因子,A,B爲定量型因子時, 我們用$\gamma_{CD,AB}$來代表字長, 則

$$\gamma_{CD,AB}=(0,0,0,0,0,0,\frac{1}{4},\frac{5}{4},0,0,\frac{5}{4},\frac{1}{4},0,0)$$

而當因子C,F爲定性型因子,A,B爲定量型因子時,

$$\gamma_{CF,AB}=(0,0,0,0,0,0,\frac{1}{8},\frac{1}{2},0,\frac{3}{4},1,\frac{5}{8},\frac{3}{4},0)$$

由上面兩γ字長, 能淸楚比較出對於$\gamma_{3,1}$中,$\gamma_{CF,AB}$字長中$\gamma_{3,1}$的值較小, 因此選取C,F爲定性型因子A,B爲定量型因子較佳。藉由電腦運算將210種組合的γ字長運算出, 我們能得

$$\gamma_{CF,AB}=(0,0,0,0,0,0,\frac{1}{8},\frac{1}{2},0,\frac{3}{4},1,\frac{5}{8},\frac{3}{4},0)$$

爲最佳的字長型態, 而選取的方式共有八種, 由下表3.1表示。

定量型因子	定性型因子
A,B	C,F
A,B	D,F
A,E	C,G
A,E	D,G
A,F	B,C
A,F	B,D
A,G	C,E
A,G	D,E

表 3.1: 2定量因子,2定性因子的最佳選取

我們亦可使用相同的作法探討在L_{18}的實驗中任取3個因子爲定性型因子與3個因子爲定量型因子,L_{18}中選取方式共有140種, 我們可經由電腦運算及 γ字長的排序法, 則得其最佳設計, 以下表3.2表示。

定量型因子	定性型因子
A,B,D	E,F,G
A,C,E	B,F,G
A,C,F	B,E,G
A,D,G	B,E,F

表 3.2: 3定量因子,3定性因子的最佳選取

在下頁中將L_{18}設計裡最佳的選取組合列出, 可作爲往後實驗在L_{18}設計下選取的一項參考。由於在L_{18}的設計中, 任取兩因子的設計皆爲全因子設計, 所以任意因子選取的γ字長, 其 $\gamma_{1,0}$,$\gamma_{1,1}$,$\gamma_{2,0}$,$\gamma_{2,1}$,$\gamma_{2,2}$皆爲0, 因此下頁中的γ字常皆由 $\gamma_{3.0}$開始依序表示。然而當因子總數爲3時, 可發現會出現重複的設計組合, 造成指標函數中係數長度平方和總和不一致的情形, 因此我們不列出實驗因子總數低於3的情形。

因子	(定性型因子, 定量型因子)	γ字長
6定性 1定量	(ACDEFG,B) (ABDEFG,C) (ABCEFG,D) (ABCDFG,E) (ABCDEG,F) (ABCDEF,G)	(0, 4.5, 13, 4.5, 10.5, 13.5, 10.5 , 9, 9, 9, 13.5, 4, 13.5, 3, 3)
6定性 0定量	(BCDEFG,0)	(10, 22.5, 0, 7)
5定性 2定量	(ACDFG,BE) (ACEEG,BF) (ABCDF,EG) (ABCDE,FG)	(0, 0.625, 6, 7, 0, 1.75, 8.75, 10, 3.5, 0.625, 5.5, 13, 7 , 2, 2.75, 5, 12.75, 4, 3, 11.5, 5.375, 3.25, 1.375)
5定性 1定量	(CDEFG,B) (BDEFG,C) (BCEFG,D) (BCDFG,E) (BCDEG,F) (BCDEF,G)	(0, 2.5, 5, 2.5, 7.5, 7.5, 7.5, 0, 0, 0, 3.5, 3.5)
5定性 0定量	(BCDEF,0) (BCDEG,0) (BCDFG,0) (BCEFG,0) (BDEFG,0) (CDEFG,0)	(5, 7.5, 0)
4定性 3定量	(CDEG,ABF) (BCDF,AEG)	(0, 2.5, 5, 2, 0.25, 4.5, 9.25, 8, 1.5, 0.75, 2.5 , 10, 10, 0.5, 0.125, 0.5, 8.75, 9.25, 5.25, 0, 4.5 8.25, 8.3125, 1.5, 6.75, 5.6875, 1.75, 2.6875, 0.5625)

表 3.3: L_{18}設計中因子最佳選取

因子	(定性型因子, 定量型因子)	γ字長
4定性 2定量	(BCDE,FG)	(0, 0.5, 3, 2, 0, 1, 5.25, 6, 1.5, 0.5
	(BCDF,EG)	, 4.5, 6, 0, 2.25, 0, 1.75, 0, 3.5, 1.75)
	(BCDG,EF)	
	(BCFG,DE)	
	(BCEG,DF)	
	(BDEF,CG)	
	(BDEG,CF)	
	(BDFG,CE)	
	(BEFG,CD)	
	(CDEF,BG)	
	(CDEG,BF)	
	(CDFG,BE)	
	(CEFG,BD)	
	(DEFG,BC)	
4定性 1定量	(BCDE,G)	(0, 1.5, 2, 1.5, 3, 1.5, 3, 0, 0)
	(BCDF,G)	
	(BCEF,G)	
	(BDEF,G)	
	(CDEF,G)	
	(BCDE,F)	
	(BCDG,F)	
	(BCEG,F)	
	(BDEG,F)	
	(CDEG,F)	
	(BCDF,E)	
	(BCDG,E)	
	(BCFG,E)	
	(BDFG,E)	
	(CDFG,E)	
	(BCEF,D)	
	(BCEG,D)	
	(BCFG,D)	
	(BEFG,D)	
	(CEFG,D)	
	(BDEF,C)	
	(BDEG,C)	
	(BDFG,C)	
	(BEFG,C)	
	(DEFG,C)	
	(CDEF,B)	

表 3.4: L_{18}設計中因子最佳選取

因子	(定性型因子, 定量型因子)	γ字長
	(CDEG,B)	
	(CDFG,B)	
	(CEFG,B)	
	(DEFG,B)	
4定性 0定量	(BCDE,0)	(2, 1.5, 0)
	(BCDF,0)	
	(BCDG,0)	
	(BCEF,0)	
	(BCEG,0)	
	(BCFG,0)	
	(BDEF,0)	
	(BDEG,0)	
	(BDFG,0)	
	(BEFG,0)	
	(CDEF,0)	
	(CDEG,0)	
	(CDFG,0)	
	(CEFG,0)	
	(DEFG,0)	
3定性 4定量	(CEG,ABDF)	(0.1875, 3.625, 2.75, 0.5, 0.75, 7.3125, 8.125, 3.25
	(BDF,ACEG)	, 1.875, 6.3438, 12, 3.25, 0.5, 4.6875, 11.6875, 4.6875
	(BCF,ADEG)	, 0.1875, 3.25, 9.1875, 9.3438, 0, 1.5, 6.4375, 8.4375
	(DEG,ABCF)	, 0.2813, 0.2813, 3.0625, 4.625, 0.75, 1.625, 0.2813)
3定性 3定量	(EFG,ABD)	(0, 1.5, 3, 0.5, 0.375, 3.375, 4.875, 1.5, 0, 2.625, 4.3125
	(BFG,ACE)	, 2.625, 0.125 , 1.125, 3.5625, 1.125, 3.5625, 3, 0.375
	(BEG,ACF)	, 1.6875, 1.875, 0.5625, 2.25, 0.25)
	(BEF,ADG)	
3定性 2定量	(CDF,AB)	(0, 0.25, 2.25, 0, 0.5, 1, 3.25, 0.75, 0.75, 1, 1, 0, 1, 0.75)
	(CDG,AE)	
	(BCD,AF)	
	(CDE,AG)	

表 3.5: L_{18}設計中因子最佳選取

因子	(定性型因子, 定量型因子)	γ字長
3定性 1定量	(BDF,A)	(0, 0.5, 0.5, 1.5, 1, 0)
	(CEG,A)	
	(DEG,A)	
	(BCF,A)	
2定性 5定量	(DG,ABCEF)	(0.9375, 3.25, 1.25, 2.2969, 8.75, 4.25, 3.9609, 11.3125
	(CF,ABDEG)	, 7.5, 2.8203, 10.125, 7.5, 1.5469, 9, 10.9219
	(CE,ABDFG)	, 0.5625, 6.75, 11.2031, 0.3047, 3.3125, 6.3438
	(BD,ACEFG)	, 0.0703, 1.375, 3.9063, 0.125, 0.9844, 0.1406)
2定性 4定量	(DE,ABCF)	(0.1875, 2.375, 1, 0.75, 5, 2.375, 1.875, 4.1875, 4.1875, 0.5
	(DG,ABCF)	, 3, 4.25, 0.1875, 2.25, 2.8125,0 , 1, 2.0625, 0.1875
	(CE,ABDF)	, 1, 0.3125)
	(CG,ABDF)	
	(BD,ACEG)	
	(DF,ACEG)	
	(BC,ADEG)	
	(CF,ADEG)	
2定性 3定量	(CD,ABF)	(0, 0.75, 1.5, 0.125, 2, 1.75, 0.75, 1.75, 1.0625
	(CD,AEG)	, 0.125, 0.5, 0.9375, 0, 0.9375, 0.3125)
2定性 2定量	(CF,AB)	(0, 0.125, 0.5, 0, 0.75, 1, 0.625, 0.5, 0)
	(DF,AB)	
	(CG,AE)	
	(DG,AE)	
	(BC,AF)	
	(BD,AF)	
	(CE,AG)	
	(DE,AG)	

表 3.6: L_{18}設計中因子最佳選取

因子	(定性型因子, 定量型因子)	γ字長
1定性 6定量	(A,BCDEFG)	(1.875, 3, 3.9844, 6.75, 8.4375, 11.7188, 13.4219, 7.8750 , 2.8125, 18.8438, 4.2188, 14.625, 3.759.9375 , 0.2344, 4.5, 0, 3.4688, 0.7656, 0, 0.2813
1定性 5定量	(G,BCDEF) (F,BCDEG) (E,BCDFG) (D,BCEFG) (C,BDEFG) (B,CDEFG)	(0.9375, 1.25, 1.6406, 4.375, 3.75, 6.875, 4.5313, 5.7656 , 0.9375, 2.5781, 0.7031, 3.2812, 0, 2.0313, 0, , 0.0781, 0.7656)
1定性 4定量	(E,ABCF) (G,ABCF) (E,ABDF) (G,ABDF) (B,ACEG) (F,ACEG) (B,ADEG) (F,ADEG)	(0.1875, 1.125, 0.75, 2.6875, 1.875, 2.2188, 0.5, 1.125 , 0.1875, 1.0625, 0, 0.6875, 0.0938)
1定性 3定量	(F,ABD) (B,ACF) (B,ACE) (E,ADG)	(0, 0.25, 0.375, 1.25, 0, 1.25 , 0.125, 0.25, 0)

表 3.7: L_{18}設計中因子最佳選取

Chapter 4

因子係數與別名效應的關係

4.1 定量型因子與定性型因子的分析方式

在第三章之中我們將比較實驗優劣的準則以γ字長來表示, 而γ字長主要的依據即是混合型指標函數展開項的係數。以下我們將討論這些係數平方的大小所代表的意義, 在討論係數的大小之前, 我們先對定量因子和定性因子的特性加以討論。

在定量型因子之中, 我們知道每個水準皆有數値涵義, 其水準順序也與數値大小順序相關。因此我們可對定量型因子定義諸如線性效應, 二次效應, 線性對線性交互作用,..., 等等的單一效應。在分析定量型因子的效應時, 我們常使用迴歸 (regression) 分析的方式, 來探討各項單一效應是否對實驗數據有顯著影響, 亦即我們將定量型因子的每個效應都視爲一個一維向量, 來對實驗結果做分析。

而對於定性型因子的主效應或交互作用, 我們則是常採用變異數分析 (ANOVA) 的方式來分析, 此與定量型因子的分析有所不同。例如若因子A, B皆是三個水準的定性型因子, 則對於單一定性因子的作用, 如A的主效應則可視爲一個兩維空間, 此兩維空間反映因子A的三個水準變動時對反應值造成的差異。而對於定性型因子A, B的交互作用, 則是一個四維空間, 當考慮因子A, B的交互作用大小時, 我們可將反應值向量對這四維空間投影來分析。注意若A, B爲三個水準的定量型因子, 則對於因子A, B的交互作用, 我們會拆成四個一維向量來分析, 依序爲 l_Al_A,l_Aq_B q_Al_B,q_Aq_B的方式, 其中l_A代表因子A的線性效應, 而q_A代表因子A的二次效應, l_B代

表因子B的線性效應, 而q_B代表因子B的二次效應。造成這樣的差距主要是來於定性因子的水準間, 並不代表數值涵義, 故其對反應值造成的效應, 必須用這些兩維, 四維, 八維,..., 等空間來描述。

在指標函數中也有相類似的概念, 如對於實驗設計G中, 因子A, B爲三個水準的定性型因子, 因子C爲三個水準的定量型因子, 則指標函數展開項 $X^{\alpha}C_{\beta}$中, 若$\beta = 1$則稱爲因子C的線性效應, 而對於$\alpha = (11), (12), (21), (22)$都稱之爲定性型因子$A, B$的交互作用展開項。

4.2 生成向量的介紹

接下來我們介紹指標函數中展開項係數的生成向量, 生成向量的產生方式爲, 部分因子設計G中, 我們將所有的實驗的水準組合表爲設計矩陣M, 對於指標函數展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$, 我們將部份設計G中定量型因子實驗的水準, 代入β的交乘效應之中, 則我們可以產生一個新的向量, 稱之爲$\vec{\beta}$, 其就爲展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$的定量型效應的生成向量。而對於定性生成向量, 我們將部分因子設計G中定性型因子的實驗水準, 代入α的共軛項$(-\alpha)$中運算, 再由複數編碼的方式, 便可得一向量$\vec{\alpha}$, 我們稱之爲定性型因子主效應或交互作用的生成向量。生成向量的涵義在於, 對於指標函數展開項$X^{\alpha}C_{\beta}$, 將此展開項的定量型生成向量與定性型因子主效應或交互作用的生成向量做內積後, 再除以全因子設計的實驗總數N, 則我們便可得該展開項的係數。

接下來我們探討指標函數中定性型生成向量與定性型因子分析向量的關係, 在因子水準爲3的情形下, 一定性型因子水準爲0,1,2, 則模型矩陣 (model matrix) 中的分析向量可令爲

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

兩個分析向量, 並且對於定性型因子水準發生調換下, 該定性因子作用與實驗結果分析仍爲一致, 主要原因爲定性型因子採用 ANOVA 的分析方式。

而在指標函數中對於該因子水準0,1,2下, 其生成向量由複數編碼的方式表達爲

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$$

我們可將複數向量拆成實數部分與虛數部分, 便形成兩個新的實數向量, 如

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

而另一個複數向量亦可拆成此二實數向量的組合。經由倍數變換, 可將此二實數項量轉爲v_1,v_2, 其中v_1,v_2爲

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = v_1, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = v_2$$

我們把該定性因子在模型矩陣中的分析向量設爲

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_1, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_2$$

則v_1與u_2相同, 而v_2與u_1相同, 發現模型矩陣定性型交互作用的分析向量與指標函數生成向量的關聯性。在指標函數的係數運算中, 雖然複數中實數部份向量與虛數部分同時與定量型階層效應做運算, 但由於複數的特性, 以及定量型生成向量爲實數的關係, 因此在實數部分的向量與虛數部分向量運算爲獨立的, 並不會互相影響。

觀察生成向量與指標函數中係數的實例, 在部份因子設計G中, 其定義正規子群爲$I = ABC$, 其中因子A, B爲定性型因子,C爲定量型因子, 且都具有三個水準, 則設計矩陣可表爲下頁中表4.1。對於指標函數的展開項$(\alpha, \beta) = (11, 1)$, 代表定

性型因子A,B的交互作用與定量型因子C線性效應的展開項, 則我們將因子A,B做$2A+2B(mod\ 3)$ 的運算, 再將各個值代入複數編碼中便可得效應
$(\alpha,\beta)=(11,1)$ 的定性型生成向量。而對於因子C的線性效應生產向量, 我們將因子C的實驗水準代入

$$l_C=\sqrt{\frac{3}{2}}(C-1)$$

便可得一因子C線性效應的生成向量。我們用表 (4.1) 表示,

A	B	C	2A+2B	X^{2A+2B}	l_C
0	0	0	0	1	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
0	1	2	2	$exp\frac{4\pi}{3}i$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
0	2	1	1	$exp\frac{2\pi}{3}i$	0
1	0	2	2	$exp\frac{4\pi}{3}i$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
1	1	1	1	$exp\frac{2\pi}{3}i$	0
1	2	0	0	1	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
2	0	1	1	$exp\frac{2\pi}{3}i$	0
2	1	0	0	1	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$
2	2	2	2	$exp\frac{4\pi}{3}i$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$

表 4.1: 正規設計$I=ABC$與生成向量

則對於上表中,l_C的定量因子C線性效應的生成向量, 而X^{2A+2B}的向量則爲定性型因子A,B交互作用項的生成向量, 我們將這兩向量做內積, 再除以全因子設計下總數, 便可得指標函數展開項$X^{11}C_1$的係數。

指標函數中, 若因子A,B爲定性型因子, 且皆具有三個水準, 則因子A,B的交互作用項在指標函數中的生成向量是四維的, 我們可將設計矩陣中因子A的向量與因子B的向量取出, 分別在做$A+B$,$A+2B$,$2A+B$, 與$2A+2B(\mathrm{mod}\ 3)$ 的運算, 再由定性型因子複數編碼的方式, 便可以得到指標函數中因子A,B交互作用展開項的生成向量。

對於上述的向量我們稱爲係數的生成向量, 因爲係數的產生可由生成向量內積

後, 再除以全因子設計總數N便可得。而在γ字長中, 係數的長度平方和是構成γ字長的主要依據, 因此生成向量的內積與γ字長間有密切的關係。

4.3 因子正交性與係數的關聯性

接下來我們介紹兩個名詞, 垂直與正交性, 並加以區分。若兩個向量內積為0, 則我們稱這兩個向量互相垂直, 其兩向量交角為交角為90度; 而在部份因子設計之中, 我們稱一群因子具有正交性, 代表該群因子的任一水準組合在此實驗設計之中出現的頻率相同。在一部分因子設計G中, 當我們稱兩個因子為正交時, 代表這兩個因子的任意水準組合出現在G中次數相等。若今在部分因子設計G中, 因子A, B為定性型因子,C, D為定量型因子, 且因子A, B, C, D具有正交, 則指標函數中因子 A, B, C, D的展開項其係數皆為0, 我們接下來將介紹這個特性。

定理 5. 部份因子設計G中,A_1,A_2...,A_m為定性型因子,B_1,B_2,...,B_n為定量型因子, 其中若因子集合T_{ab}=($A_1, A_2 ... A_i, B_1, , B_2 ..., B_j$) 具有正交性。則部份因子設計$G$的指標函數展開項, 對於集合$T$的展開項其係數皆為 0。反之, 若因子集合$T$不具有正交性, 則部份因子設計$G$中的指標函數, 存在對因子集合$T$非 0係數的展開項。

證明. 首先令部分因子設計G的指標函數為F, 我們可由第二章定理2可得, 將部分因子設計G投影到因子集合T, 令其為部份因子設計G_1 , 且今T中的因子具有正交性, 則T的任一水準組合在G_1中出現的頻率相同。推出G_1為因子集合的T的全因子設計的多次實驗設計, 即集合T中各個水準組合重複一次, 二次... 至多次等, 令k為全因子設計的重複次數。

由係數的推導定理, 我們將G_1中各個水準組合帶入, 得G_1的指標函數F_1為一常數函數, 即$F_1 = k$, 因此推回原指標函數F中, 我們可得對於集合T的展開項, 其係數皆為零。

若因子集合T不具有正交性, 則我們將部分因子設計G的實驗因子數縮減爲因子集合T, 令其爲部份因子設計G_2, 且G_2的指標函數爲F_2, 因爲今F_1,F_2的實驗總數相同, 且每一個實驗設計相對應的指標函數固定且唯一, 因此F_2必不爲一常數函數, 存有因子集合T的非零展開項。因此推回指標函數F中, 對於因子集合T, 會存有係數非零的的展開項。 □

上述定理讓我們得知, 若因子間具有正交性, 其在指標函數中的交互作用展開項其係數皆爲0, 若因子間不具有正交性, 則指標函數中存在有非0的展開項。正交性是實驗設計中的一個重要性質, 當具有因子正交性時, 則在部分因子設計之中, 各個水準出現次數會相同, 也不會發生別名效應。由上述定理可知 ,我們今天可藉由指標函數推得, 若指標函數中對於因子集合T的展開項係數皆爲0, 則我們可以推出因子集合T的因子皆具有正交性。

在γ字長中, 比較γ字長是否爲0項爲比較實驗優劣性的依據之一, 其可與 Wu 和 Hamada(2000,6.2節) 實驗設計書中所提到的強度 (strength) 做連接。如今部份因子設計強度爲k, 代表對於該實驗因子任取k個因子下, 其皆具有正交性。而相同的, 若今天此部分因子設計強度爲k, 則

$$\gamma_{i,j} = 0 \quad \forall i \leq k$$

由上述可推得,γ字長爲0的性質, 與因子間是否存有正交性有相關聯。

4.4 係數爲0與非0的探討

在上一節中發現互爲正交的因子, 不論是定性型因子或是定量型因子, 在指標函數中展開項係數皆會爲0。而在第二章關於正規設計的例子裡, 與定義對比子群相關的展開項, 在指標函數中係數不爲0; 或者效應間互有別名關係, 則其指標函數係數亦不爲0。係數爲0可以直觀的認爲是一種良好的特性, 但是什麼時候會造成係數爲0?

我們首先觀察僅有定量型因子效應的係數, 由4.2節介紹, 因爲現在並不需考

慮定性型因子生成向量 ,則係數的生成方式爲該效應的定量因子生成向量與常數向量的內積, 當指標函數中該效應係數爲0, 是否代表相關的因子在實驗中與常數項爲正交? 由下面例子可以發現並非完全如此。

例子1・定量型因子效應

因子A,B爲定量型因子, 具有3個設計水準, 在設計矩陣中以0,1,2表示3個水準, 在部分因子設計G中實驗3次, 以下表4.2表示, 並顯示因子A, B的線性效應及二次效應。

A的水準	l_A	q_A	B的水準	l_B	q_B
0	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
1	0	$\sqrt{2}$	1	0	$\sqrt{2}$
0	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

表 4.2: 定量型因子效應

我們可以發現因子B在部分因子設計G中與常數項向量具有正交性, 因此其指標函數中線性效應展開項與二次效應展開項係數皆爲0, 也可將向量l_B,q_B 元素加總可得其值爲0; 而因子A與常數項向量並不具有正交性, 但其二次效應展開項係數爲0, 其與常數項不正交的特性在因子A的線性效應展開項係數不爲0中展現出來。因此判別一因子與常數項是否正交, 或因子間是否具有正交性, 不能單看單一效應的展開項是否爲0而下定論。若要使指標函數中定量型效應展開項係數爲0, 則將該效應生成向量各元素加總, 若元素加總和爲0, 則在指標函數中展開項係數亦爲0; 反之若向量元素加總和不爲0 , 則指標函數中係數亦不爲0。

而在混合性指標函數中, 具由同時含有定性型因子及定量型因子的混合型效應, 則指標函數中何時混合型效應係數爲0, 我們在以下做探討; 而對於單有定性型因子的交互作用項, 可將常數項向量視爲其定量型生成向量, 因此一併在此討論。首先要介紹複數單位圓的一個重要特性, 當p爲質數時,$a_0, a_1, ..., a_{p-1}$爲實數, 則

$$\sum_{j=0}^{p-1} a_i * exp\frac{2\pi i}{p}j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} \tag{4.1}$$

這項特性我們可從複變數的書中查得, 可參閱由 Ponnusamy(1995) 所著述, 或由 Pistone 及 Rogantin(2007) 之文獻可查得。在混合型指標函數中, 定性因子採用複數編碼的方式, 因此與式子 (4.1) 有相關。我們以3個水準的因子爲例, 對於混合型效應的係數, 可由該效應的定性型生成向量與定量型生成向量內積而得, 定性型生成向量爲複數向量, 而定量型生成向量爲實數向量, 其內積恰可改寫成如式子 (4.1) 中的形式。

如因子A, B皆爲水準爲3的定性型因子, 今探討指標函數中$X^{11}C_\beta$的係數; 首先我們取出$X^{11}C_\beta$的定性型生成向量, 對於設計矩陣中$2A+2B(\mathrm{mod}\ 3)$ 的向量, 可經由複數編碼則產生$X^{11}C_\beta$定性型生成向量。而對於定量型生成向量C_β中, 先將向量C_β中相對於向量$2A+2B$值爲0的元素加總, 如$t_1, t_2, ..., t_i$皆爲對應至向量 A+B 中值爲0的元素, 則令

$$t_1 + t_2 + ... + t_i = a_0$$

同理我們可取得a_1, a_2。經由 (4.1) 可發現當$X^{11}C_\beta$係數爲0時, 若且爲若

$$a_0 = a_1 = a_2$$

對於因子水準爲質數下的定性型交互作用, 因爲相對的定量型生成向量即爲常數向量, 其各元素皆固定, 因此唯有當該交互作用向量中各水準出現次數相同時, 其指標函數展開項係數會爲0, 否則係數不爲0。而對混合型效應則無此特性, 因爲效應中定量型生成向量各元素不固定, 因此與定性型生成向量中水準出現的次數並無直接的關聯性。

例子2 · 混合型因子效應

因子A爲定性型因子, 因子B爲定量型因子, 且皆具有3個水準, 將部分因子設計G以下表4,3表示。由表4.3可發現, 對於指標函數中因子A與因子B線性效應展開項係數爲0, 並且對於因子A與因子B二次效應展開項係數亦爲0, 但是因子A, B並不具有正交性。那相對於具有正交性的部份因子設計有何差別呢? 我們可以由指標函數中因子A主效應的係數與因子B二次效應的係數比較可得, 其兩者在指標函數中展開項係數皆不爲0; 而若因子皆具有正交性, 則展開項係數皆爲0。

A的水準	X^A	B的水準	l_B	q_B
0	1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
0	1	1	0	$\sqrt{2}$
0	1	2	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
0	1	1	0	$\sqrt{2}$
1	$exp\frac{2\pi i}{3}$	1	0	$\sqrt{2}$
2	$exp\frac{4\pi i}{3}$	1	0	$\sqrt{2}$

表 4.3: 混合型效應

這也可論証第三章所提γ 字長對實驗設計比較順序的一項依據: 指標函數中, 展開項牽涉因子個數多但係數爲0時, 不代表該群因子其低階效應的係數皆爲0, 因此比較γ 字長時, 我們必須先從因子個數較少的效應作爲比較的依據, 當相同時再往因子個數越多的效應做比較。

4.5 定性型因子水準調換與γ字長

在定量型因子之中, 我們會將定量型因子的水準依其大小順序對應到實驗設計的水準上, 如因子B代表實驗設計的濃度, 有30%,40%,50%三個水準, 則我們可以在設計矩陣中用 (0,1,2) 來表示

$$\begin{pmatrix} 0 & & 30\% \\ 1 & \Rightarrow & 40\% \\ 2 & & 50\% \end{pmatrix}$$

因此我們鮮少會在定量型因子中將水準任意變換。而在定性因子之中, 水準的排序可能會有所變換, 如因子A代表操作的機器甲, 乙, 丙。我們可能用水準0代表機器甲, 我們也可能使用水準1代表機器甲。這樣的情形我們稱之爲水準調換 (level permutation)。對定性型因子而言, 雖然水準調換, 但所代表的設計是一樣的。若今天因爲對定性型因子做水準調換, 而會造成γ字長的變化, 則γ字長就會喪失做爲判別部分因子設計優劣的準則。因此我們接下來將證明, 在定性型因子水準調換下,γ字長並不改變。

定理 6. 對同時具有定性型因子與定量型因子的部份因子設計, 當定性型因子水準編排方式改變時, 在指標函數中的γ字長並不隨之改變, 即相同字長下係數長度平方總和對水準調換下仍爲一固定值。

證明. 目前僅針對水準爲3的因子做證明, 相同証法應可推廣到任意水準的情形。首先對於定量型的因子效應, 因爲因子水準與因子大小順序有關, 所以我們並不考慮定量型因子水準調換的情形, 只考慮定性型因子水準調換的情形。對於指標函數中僅有定性型的因子交互作用展開項, 則係數的生產方式可由定性型因子生成向量與常數項的交乘產生, 我們可將常數項視爲一定量型效應的生成向量, 因此我們可由證明γ字長中定量型效應與定性型交互作用的字長係數不變, 來推斷出γ字長中僅定性型因子交互作用的字長在定性型因子調換下字長仍然不變。

首先對於定量因子的效應, 因爲是爲各個效應相互交乘而成, 因此我們用 $\vec{t} = (t_1, t_2 ... t_i)^T$, 來代表定量因子效應的生成向量, 並用$A$,$B$,$C$... 表示各個定性因子。我們將證明對特定的定量型效應與定性型因子的交互作用, 其指標函數中所有展開項係數平方和在定性因子水準變動下爲固定。

型一　單一定性因子與定量因子 (At 型)

我們分爲兩種類型來探討, 單一定性型因子中水準1與水準2互換, 與單一定性型因子中水準0與任一水準對換的情形。令因子A'的向量爲水準調換後的情形,t_i爲定量因子效應生成向量中, 將相對於定性型因子生成向量中水準$i-1$的部份加總而得。

1.因子A中水準1與2互換

t	A	$\Rightarrow$	A'
t_1	0		0
t_2	1		2
t_3	2		1

表 4.4: 因子A水準1,2互換

令$X^{\alpha}C_{\beta}$爲原指標函數的展開項, 而$X^{\alpha'}C_{\beta}$爲新指標函數的展開項, 則$\alpha = 1$時原指標函數展開項的係數與新指標函數$\alpha' = 2$時展開的係數相同, 同理可推廣至 $\alpha = 2$與$\alpha' = 1$的情形。因此交互作用項At在指標函數中展開項係數的平方和, 若爲定性型因子A中水準1與2互調的情形, 並不改變在指標函數中與因子A相關的係數長度平方和。

2.因子A中水準0與1互換

t	A	$\Rightarrow$	A'
t_1	0		1
t_2	1		0
t_3	2		2

表 4.5: 因子A水準1,0互換

則在指標函數中, 原At項係數長度平方和爲

$$\begin{aligned}
&\left\|t_1 + t_2 exp\frac{2\pi}{3}i + t_3 exp\frac{4\pi}{3}i\right\|^2 + \left\|t_1 + t_2 exp\frac{4\pi}{3}i + t_3 exp\frac{2\pi}{3}i\right\|^2 \\
&= (t_1 - \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{2}t_3)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}t_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}t_3)^2 + (t_1 - \frac{1}{2}t_2 - \frac{1}{2}t_3)^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2}t_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t_3)^2 \\
&= 2(t_1^2 + \frac{1}{4}t_2^2 + \frac{1}{4}t_2^3 - t_1t_2 - t_1t_3 + \frac{1}{2}t_2t_3 + \frac{3}{4}t_2^2 + \frac{3}{4}t_3^2 - \frac{3}{2}t_2t_3) \\
&= 2(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_1t_2 - t_2t_3 - t_3t_1)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

而在指標函數中, 新的$A't$項係數長度平方和爲

$$\begin{aligned}
&\left\|t_1 exp\frac{2\pi}{3}i + t_2 + t_3 exp\frac{4\pi}{3}i\right\|^2 + \left\|t_1 exp\frac{4\pi}{3}i + t_2 + t_3 exp\frac{2\pi}{3}i\right\|^2 \\
&= (-\frac{1}{2}t_1 + t_2 - \frac{1}{2}t_3)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}t_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}t_3)^2 + (-\frac{1}{2}t_1 + t_2 - \frac{1}{2}t_3)^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2}t_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t_3)^2 \\
&= 2(\frac{1}{4}t_1^2 + t_2^2 + \frac{1}{4}t_2^3 - t_1t_2 - t_2t_3 + \frac{1}{2}t_1t_3 + \frac{3}{4}t_1^2 + \frac{3}{4}t_3^2 - \frac{3}{2}t_1t_3) \\
&= 2(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - t_1t_2 - t_2t_3 - t_3t_1)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

由 (4.2) 與 (4.3) 得, 原At項係數長度平方和與新的$A't$項係數長度平方和一至, 即調換定性因子水準0與水準1的情形下, 與因子A相關的係數長度平方和不變。並

由型一中證明1得知, 水準1與水準2互換的情形下係數長度平方和不變, 推得出單一定性因子下, 水準0與水準2調換下亦不改變係數長度平方和。由上述兩個證明推得, 對於指標函數中, 單一定性因子與定量型因子的交互作用項, 任意改變定性因子的水準並不改變指標函數中相對應的展開項係數長度平方和。

型二　兩定性因子與定量因子 (ABt 型)

我們令A',B'為因子A及因子B水準調換後的情形,$X^{\alpha}C_{\beta}$為原指標函數的展開項,而$X^{\alpha'}C_{\beta}$為新指標函數的展開項, 我們分為幾個類型來討論。

1.將單一因子的水準1與2對調

今將定性型因子A中水準1與水準2互換

原先定性因子的各項組合

A	B	$\Rightarrow$	$A+B$	$2A+2B$	$A+2B$	$2A+B$
0	0		0	0	0	0
0	1		1	2	2	1
0	2		2	1	1	2
1	0		1	2	1	2
1	1		2	1	0	0
1	2		0	0	2	1
2	0		2	1	2	1
2	1		0	0	1	2
2	2		1	2	0	0

表 4.6: 兩定性因子與定量因子效應水準未互換下

將因子A水準1與2對調, 所得之各項組合為表4.7。由表4.6與表4.7我們得知, 在將單一因子水準1與2對調下, 對於定性因子各種組合皆存在相對應的組合, 如對於向量$A'+B$下, 我們可以找得$2A+B$的向量與其相符合。所以對於新的指標函數展開項的係數, 我們可以由原指標函數中的係數找到相同的對應, 因此不改變指標函數中交互作用項ABt的係數平方和。此外我們也可藉由$A'=2A(\text{mod}3)$, 並配合係數生成定理, 可得知係數長度平方和不變。

A'	B	$\Rightarrow$	$A'+B$	$2A'+2B$	$A'+2B$	$2A'+B$
0	0		0	0	0	0
0	1		1	2	2	1
0	2		2	1	1	2
2	0		2	1	2	1
2	1		0	0	1	2
2	2		1	2	0	0
1	0		1	2	1	2
1	1		2	1	0	0
1	2		0	0	2	1

表 4.7: 兩定性因子下, 因子A水準1與2對調

2.將單一因子水準0與1對調

如將因子A水準{0,1,2}改為{1,0,2}, 則原先因子組合為

A	B	$\Rightarrow$	$A+B$	$2A+2B$	$A+2B$	$2A+B$	t
0	0		0	0	0	0	t_1
0	1		1	2	2	1	t_2
0	2		2	1	1	2	t_3
1	0		1	2	1	2	t_4
1	1		2	1	0	0	t_5
1	2		0	0	2	1	t_6
2	0		2	1	2	1	t_7
2	1		0	0	1	2	t_8
2	2		1	2	0	0	t_9

表 4.8: 兩定性因子與定量因子效應水準未互換下

其中t_i為定量型效應生成向量中中, 將對應於定性型因子水準組合相同的項相加而成, 如t_1為將定量型生成向量中, 相對於定性型水準組合為$(0,0)$的部份加總而成。將A,B交互作用項中, 有相同的水準者合併列出, 如$A+B=0$的部份, 可對應至上表中定量型效應向量的 (t_1,t_6,t_8) 的部份, 我們由下列的方式列出

$A+B=(0,1,2)$ 等同於定量型效應中 $((t_1,t_6,t_8)$,(t_2,t_4,t_9),$(t_3,t_5,t_7))$

$2A+2B=(0,1,2)$等同於定量型效應中 $((t_1,t_6,t_8)$,(t_3,t_5,t_7),$(t_2,t_4,t_9))$

$A+2B=(0,1,2)$ 等同於定量型效應中 $((t_1,t_5,t_9)$,(t_2,t_6,t_7),$(t_3,t_4,t_8))$

$2A+B=(0,1,2)$ 等同於定量型效應中 $((t_1,t_5,t_9)$,(t_3,t_4,t_8),$(t_2,t_6,t_7))$

而因子A水準0與1對調後

A'	B	$\Rightarrow$	$A'+B$	$2A'+2B$	$A'+2B$	$2A'+B$	t
1	0		1	2	1	2	t_1
1	1		2	1	0	0	t_2
1	2		0	0	2	1	t_3
0	0		0	0	0	0	t_4
0	1		1	2	2	1	t_5
0	2		2	1	1	2	t_6
2	0		2	1	2	1	t_7
2	1		0	0	1	2	t_8
2	2		1	2	0	0	t_9

表 4.9: 兩定性因子下, 因子A水準0與1對調

我們也將A',B交互作用項中, 有相同的水準者合併列出

$A'+2B=(1,0,2)$ 等同於定量型效應中 $((t_1,t_6,t_8)$,(t_2,t_4,t_9),$(t_3,t_5,t_7))$
$2A'+B=(2,0,1)$等同於定量型效應中 $((t_1,t_6,t_8)$,(t_3,t_5,t_7),$(t_2,t_4,t_9))$
$A'+B=(1,2,0)$ 等同於定量型效應中 $((t_1,t_5,t_9)$,(t_2,t_6,t_7),$(t_3,t_4,t_8))$
$2A'+2B=(2,1,0)$ 等同於定量型效應中 $((t_1,t_5,t_9)$,(t_3,t_4,t_8),$(t_2,t_6,t_7))$

取相對應相同的情行下, 我們以$A+B$, 與$A'+2B$爲例, 在$A+B$及$A'+2B$之中, 令

$t_1+t_6+t_8=s_1$
$t_2+t_4+t_9=s_2$
$t_3+t_5+t_7=s_3$

因此在計算原指標函數中展開項$\alpha=(1,1)$的係數長度平方, 與新指標函數中計算展開項$\alpha'=(1,2)$的係數長度平方, 等同計算下列兩表的係數長度平方總和

$A+B$	s
0	s_1
1	s_2
2	s_3

與

$A'+2B$	s
1	s_1
0	s_2
2	s_3

對於$A+B$與$A'+2B$的兩個向量, 我們可視爲將$A+B$的水準 (0,1,2) 調換爲水準 (1,0,2) 的情形, 並由型一的証明得知在單一定性型因子的水準調換下, 其係數平方合並不改變。由此可推出對於指標函數中$\alpha = (1,1)$的展開項, 與新的指標函數中$\alpha' = (1,2)$的展開項係數相等。同理我們對照上述中各個兩因子交互作用展開項, 皆存在一水準調換後的展開項與其對應, 因此在ABt的情形下, 若單一因子水準0與水準1互換, 並不改變指標函數中此交互作用展開項的係數平方總和。

因爲我們推導出單一因子水準0與水準1互換不變, 且單一因子水準1與水準2互換不變, 可推得單一因子水準0與水準2調換下, 其係數平方和亦不改變。而對於兩個定性型因子都有水準調換的情形, 我們可先調換單一因子的水準, 如調換因子A的水準之後, 再調換另一因子的水準, 如調換因子B的水準, 因爲每次調換單一因子水準, 皆不改變指標函數中該交互作用展開項的係數平方和, 因此在兩次單一因子的調換之後指標函數中該交互作用展開項的係數平方和並不改變。

型三　三定性型因子及以上與定量因子

首先我們先證明單一因子改變下係數長平方和不改變, 再以相同方式便可推廣至一般情形。

如下頁表4.10所示, 在$ABCt$下, 今考慮只變動因子C之水準今只改變因子C之水準, 則因子A,B交互作用下並不改變。則係數的生成等同處理向量A+B,A+$2B$,$2A$+B,$2A+2B$與C,$2C$的搭配。以$A+B+C$爲例, 因爲$A+B$的向量固定, 我們可將$A+B$視爲一定性型因子D, 則變成型二的型態。因此不管因子C水準如何改變, 以型二證明得知, 將$A+B+C$相同水準項合併, 則在$A+B+C'$中也可找到相同的組合項。

同樣的方法可推廣至A+$2B$,$2A$+B,$2A$+$2B$的情形, 及和$2C$搭配的情形。因此對單一因子變化水準下,$ABCt$在指標函數中的展開項係數長度平方和並不改變。推導出單一因子水準調換下不影響係數平方和的特性, 對於三個因子都產生水準調換的情形, 我們可由一次變動一項定性型因子水準的方式推出, 定性型水準調換

A	B	C	$A+B$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	2	0
0	1	0	1
0	1	1	1
0	1	2	1
0	2	0	2
0	2	1	2
0	2	2	2
1	0	0	1
1	0	1	1
1	0	2	1
1	1	0	2
1	1	1	2
1	1	2	2
1	2	0	0
1	2	1	0
1	2	2	0
2	0	0	2
2	0	1	2
2	0	2	2
2	1	0	0
2	1	1	0
2	1	2	0
2	2	0	1
2	2	1	1
2	2	2	1

表 4.10: 三定性型因子

下, 對$ABCt$的指標函數展開項中係數長度平方和並不改變。而由此方法可推至所有三個因子或者更多因子的情形下, 我們首先僅變動單一定性型因子的水準, 固定其他水準的情況下可由型二的証明推導出不影像係數平方和的特性, 再由一次改變一個因子水準的步驟, 就可證明出任意改變定性因子的水準分配下, 指標函數中與該交互作用項牽涉的係數平方和皆不變。

由型一至型三, 我們可得若任意改變定性型因子A, B, C...的水準, 對於指標函數中與因子A, B, C...相關的展開項, 其係數平方和並不會有所改變。因此對於 γ字

長中, 對任一$\gamma_{i,j}$都有固定的性質, 不會因定性型因子水準變動而變化。 □

4.6 係數大小與別名程度

由上述的定理我們可以得知,γ字長並不會因爲定性型因子的水準調換而有所改變, 即γ字長對於相同的實驗設計保有固定性。將γ字長作爲比較實驗依據的概念有三

1. 指標函數中因子集合T的展開項係數爲0, 則代表因子集合T具有正交性
2. γ字長不因定性因子水準調換而有所改變
3. 實驗設計總數與重複頻率固定下, 則係數長度平方和總和固定

因此在混合型的部份因子設計之中, 我們藉由指標函數所衍生的γ字長, 來作爲我們比較實驗設計優劣的依據。

而對於交互作用間別名程度的大小, 由指標函數中的展開項係數平方和作爲判斷依據。若爲一定量型因子效應, 則我們將該效應的係數取其長度平方, 若長度平方越大, 則視該定量型效應與常數項 (constant effect) 的別名效應越大。而對於定性型因子的交互作用, 我們取指標函數中該定性型因子交互作用的展開項, 將其係數取長度平方和相加, 視爲該交互作用與常數項的別名大小。而對於定量型因子效應與定性型因子交互作用的交乘項, 我們亦取該指標函數中的展開項, 將其係數長度平方總和相加, 做爲該交乘項與常數項的別名大小。由上可以得知, 在此我們將指標函數中效應所展開的係數長度平方和大小, 作爲該效應別名程度大小的依據。

Chapter 5

係數與空間中向量夾角的關聯性

5.1 效應間別名的關係

在混合型實驗中的因子可分爲定性型因子與定量型因子, 探討效應間的別名關係則可區分爲三種;

1. 定量型效應與定量型效應的別名
2. 定性型交互作用與定性型交互作用的別名
3. 定量型效應與定性型交互作用的別名

若在實驗中共有6個因子, 因子A, B, C爲定性型因子, 因子D, E, F爲定量型因子。探討定量型效應間的別名關係, 我們可以單獨取指標函數中該項係數, 如比較定量型因子D的線性效應與定量型因子F的二次效應, 因爲指標函數中定量性因子的展開項基底爲各因子的階層效應, 因此探討效應間別名時則可取指標函數中 $(\alpha, \beta) = (000, 102)$的展開項。而對於定性型因子間的別名關係, 指標函數中所考慮的係數不只一項, 因爲在定性型因子的分析採用變異數分析的方式, 並非採取單一效應的分析方式, 因此對所相關的係數皆要一併考慮。如當比較定性型因子AB的交互作用與定性因子C的別名關係, 則我們取指標函數中 $\beta = (0, 0, 0)$, 且

$$\alpha = (1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)$$

的所有係數來一起衡量。

而在比較定量型效應與定性型因子交互作用的別名關係時, 因爲牽涉到定性型的因子的交互作用, 所以別名效應所牽涉到的指標函數係數不只一項。如比較定量型因子D的線性效應及E的二次效應交乘項, 與定性因子BC的交互作用的別名關係, 則我們取指標函數中展開項爲$\beta = (1, 2, 0)$且

$$\alpha = (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 2, 2)$$

的係數來討論。

對於定量型效應間別名的大小, 我們以該效應的係數長度平方來做比較; 而對於定性型交互作用的別名大小, 或定量型效應與定性型因子交互作用別名關係時, 則我們將所牽涉的係數其長度平方相加, 作爲比較效應間別名大小的依據。

5.2 空間中的相關性

接下來我們用空間的概念, 在對定性型因子做出部分的限制下, 採用向量間與向量間的夾角關係, 來比較係數長度平方和的大小與向量間夾角的關聯。

部份因子設計G, 實驗次數爲n, 全因子設計總數爲N下, 若實驗因子皆爲定量型的因子,Cheng 和 Ye(2004) 提出了β字長的方式, 其將定量型效應依效應的階層大小做排序, 再將效應階層相同的展開項的係數平方和相加, 則得β字長。而展開項係數的生成我們可以由先前介紹的生成向量產生, 如一定量型效應β的生成向量爲$\vec{\beta}$, 將其與實驗設計中常數項向量$\vec{I_n}$做內積後, 除以全因子部份總數N, 便可得此展開項係數P_β, 其中$\vec{I_n}$爲 n 維的向量, 且各元素爲1。在內積運算中, 我們設$\vec{\beta}$與$\vec{I_n}$夾角爲ϕ, 則

$$P_\beta = \frac{1}{N}\vec{\beta} \cdot \vec{I_n} = \left\|\vec{\beta}\right\| \left|\vec{I_n}\right\| \cos\phi$$

我們可得知, 定量因子的指標函數中, 展開項的係數大小, 會與效應本身生成向量的長度, 及生成向量與常數項向量的夾角ϕ有關聯。

在空間之中, 我們在比較兩個向量間相關性的大小, 我們可藉由探討向量間的夾角大小來判斷, 如兩向量間夾角爲ϕ, 則我們取$\cos\phi$的值來作爲比較依據, 若向

量間$|\cos\phi|$值越小, 則兩向量間相關性越小, 若$|\cos\phi|$值越大, 則兩向量間相關性越大。由上面敍述可發現, 係數的長度平方和跟生成向量與常數項向量間的夾角有關聯, 我們將$|\cos\phi|$的值作爲兩向量間相關性的評價依據。

如果今天是比較一平面空間M_A與一平面空間M_B的相關性, 我們可藉由在多變量分析中有提到典型相關 (canonical correlation) 的概念, 來作爲類似的想法。對平面空間M_A中, 我們由空間M_A中取出向量$\vec{\alpha}$, 同時在平面空間M_B中取出一向量$\vec{\beta}$, 使得$\vec{\alpha}$與$\vec{\beta}$的相關性最大, 則將$\vec{\alpha}$與$\vec{\beta}$的相關性作爲平面空間M_A與平面空間M_B的相關性。我們可以藉由類似這樣的概念出發, 比較兩維空間與四維空間的相關性, 或者四維空間與四維空間的相關性等, 而當我們將平面空間M_B縮減爲單一向量時, 便可視爲一向量與一平面空間相關性的比較。

若今天考慮到定量型因子的效應與定性型因子的交互作用項, 則夾角的概念該如何應用? 我們可令定量型因子效應β的生成向量爲$\vec{\beta}$, 若定性型因子的一主效應或交互作用爲A時, 則令在指標函數中, 定性型因子主效應或交互作用A的生成向量爲$\vec{A}_1$,$\vec{A}_2$,...,$\vec{A}_t$, 並令$\vec{A}_1$,$\vec{A}_2$,...,$\vec{A}_t$構成一個平面空間M_A, 則我們可將向量$\vec{\beta}$對平面空間M_A做投影, 得到其投影向量$\vec{\beta}'$, 令其夾角爲ϕ, 則$\vec{\beta}$與$\vec{\beta}'$的夾角可視爲向量$\vec{\beta}$與平面空間M_A的夾角。

上述的方式爲取出向量$\vec{\beta}$與平面空間M_A的最小夾角, 若今$\vec{\beta}$可由平面空間M_A所生成, 則其夾角ϕ爲 0。而若 $\vec{\beta}$不能由平面空間M_A生成, 則其夾角不爲 0。我們可由$|\cos\phi|$的值來觀測$\vec{\beta}$在平面空間M_A的分量大小; 分量越大, 則代表$\vec{\beta}$與平面空間M_A相關性越大。

5.3 係數長度平方和與空間夾角的關聯性

接下來我們將證明, 若定性型因子交互作用A, 其生成向量 $\vec{A}_1$,$\vec{A}_2$,...,$\vec{A}_t$互相垂直下, 則定量型效應β與交互作用A在指標函數中的展開項係數總和, 與夾角 ϕ有關聯。

定理 7. 在部份因子設計G中, 實驗總數爲n, 全因子設計下實驗個數爲N, 有一定性型因子交互作用項或主效應爲A, 令交互作用或主效應A的生成向量爲$\vec{A_1}$,$\vec{A_2}$,...,$\vec{A_t}$, 且各個生成向量互爲垂直, 並令向量組$\vec{A_i}$所構成之空間命名爲M_A。則對指標函數中任一定量型因子效應展開項β, 其生成向量爲$\vec{\beta}$, 向量$\vec{\beta}$於M_A之投影向量$\vec{\beta'}$, 夾角爲ϕ, 且指標函數中交互作用項A, 與效應β的展開項係數爲P_1,P_2...P_t, 則

$$\sum_{i=1}^{t} \|P_i\|^2 = \frac{n}{N^2} \left\|\vec{\beta}\right\|^2 \cos^2\phi$$

証明. 令$\vec{\beta}$與$\vec{A_i}$之夾角爲θ_i, 根據係數生成定理

$$P_i = \frac{1}{N}\vec{\beta} \cdot \vec{A_i} = \frac{1}{N} \left\|\vec{\beta}\right\| * \left\|\vec{A_i}\right\| \cos\theta_i$$

且由於複數之特性,$\left\|\vec{A_i}\right\| = \sqrt{n}$

$$\frac{\vec{\beta} \cdot \vec{A_i}}{\sqrt{n}} = \left\|\vec{\beta}\right\| \cos\theta_i$$

$\left\|\vec{\beta}\right\| \cos\theta_i$即是向量$\vec{\beta}$於$\vec{A_i}$的投影向量, 我們由$\vec{A_i}$互相垂直的特性與畢氏定理

$$\sum_{i=1}^{t} \left\|\vec{\beta}\right\|^2 \cos^2\theta_i = \left\|\vec{\beta'}\right\|^2 = \left\|\vec{\beta}\right\|^2 \cos^2\phi$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{t} \|P_i\|^2 = \frac{n}{N^2} \left\|\vec{\beta}\right\|^2 \cos^2\phi$$

□

我們可由此定理得知, 設計矩陣中, 一定性型因子的主效應或交互作用A, 若在指標函數中的A的生成向量互相垂直下, 且生成向量構成的平面空間爲M_A, 對於一定量型效應β, 其生成向量爲$\vec{\beta}$下, 則可得知交互作用A與定量型效應β的係數長度平方和, 會與$\vec{\beta}$的向量長度, 還有β與M_A的夾角具有相關性。若今定量型因子效應的生向向量長度亦固定下, 則係數長度平方和越大, 則代表β與M_A的夾角越小, 若係數長度平方和越小, 則β與M_A的夾角越大。

若兩個定性型因子交互作用或主效應爲A,B, 令定性因子交互作用或主效應A, 其在指標函數中的生成向量爲 $\vec{A}_1$,$\vec{A}_2$,...,$\vec{A}_k$且皆垂直, 則上述定理的特性亦可推廣至定性型因子的交互作用與定性型因子的交互作用之中。

定理 8. 在部分因子設計G中, 實驗總數爲n, 而全因子設計總數爲N, 對於定性型因子交互作用項A, 與定性型因子交互作用項B, 令$\vec{A}_1$,$\vec{A}_2$,...,$\vec{A}_k$爲交互作用A在指標函數中的生成向量, 令其生成的平面空間爲M_A, 且$\vec{A}_i$互相垂直。

而$\vec{B}_1$,$\vec{B}_2$,...,$\vec{B}_l$爲交互作用B在指標函數中的生成向量, 令$\vec{B}_i$與空間M_A夾角爲ϕ_i, 指標函數中交互作用項AB的展開項係數爲係數爲P_1,P_2,...P_t 則

$$\sum_{j=1}^{t} \|P_j\|^2 = \frac{n^2}{N^2} \sum_{i=1}^{k} \cos^2 \phi_i$$

証明. 由上述定理得知, 我們先將每個向量$\vec{B}_i$個別取出, 其在指標函數中與交互作用項A的展開項係數記爲 P_{i_j}, 則

$$\sum_{j=1}^{k} \|P_{i_j}\|^2 = \frac{n}{N^2} \left\|\vec{B}_i\right\|^2 \cos^2 \phi \tag{5.1}$$

因爲現今$\vec{B}_i$爲一複數向量, 由複數平面中單位圓上的解與複數的特性,

$$\left\|\vec{B}_i\right\|^2 = n$$

將上式代入 (5.1) 式中得

$$\frac{n}{N^2} \left\|\vec{B}_i\right\|^2 \cos^2 \phi = \frac{n^2}{N^2} \cos^2 \phi$$

再將所有$\vec{B}_i$依此方式運算, 做加總可得

$$\sum_{j=1}^{t} \|P_j\|^2 = \frac{n^2}{N^2} \sum_{i=1}^{k} \cos^2 \phi_i$$

□

由上述定理得知, 當定性型因子本身生成向量具有垂直的特性時, 我們能將係數的長度平方和與向量和平面間的夾角關係做聯繫。當符合定性型交互作用或主效應生成向量間互相垂直的特性下, 指標函數中係數長度平方和, 會與定量型因子生成向量與定量型因子生成向量間的夾角, 或與定量因子生成向量與定性因子生成空間M_A的夾角有關聯性。

Chapter 6

結論

本篇論文嘗試將指標函數概念導入同時擁有定性及定量的實驗之中，使用複數單位圓上的解方式表現指標函數中定性型因子的展開項，而用垂直多項式基底的方式呈現指標函數中的定量型因子的展開項，並推導一些原本存在於僅有定性因子下或定量因子中的指標函數特性，在混合型指標函數之中亦可成立。

指標函數主要用意爲呈現實驗設計中各個水準組合的實驗次數，並且由指標函數中的係數，我們可以判別有哪些因子間具有別名效應，而哪些因子又有正交性。同時，在正規設計中的定義對比子群，亦可利用於指標函數之中。但是不管對正規設計或非正規設計，指標函數的應用性皆有較大之彈性。

以往常只比較單具定性因子或定量因子的效應做重要性排序，今將定性與定量因子混合下，排序其效應的重要性，利用上自由度大小，與統計上分析的方式不同，我們嘗試排列出同時考慮定量型因子的效應與定性型因子的效應，還有混合型的效應。並且將此排序發展至指標函數之中，我們應用了之前探討指標函數係數的α字長與β字長，發展出一套γ的字長型態。對水準爲3的因子，我們將效應的重要排序如下，

$$l \gg a \gg ll == q \gg al \gg aa \gg lll == lq == ql \gg all == aq \gg aal \gg aaa$$
$$\gg llll == llq == lql == qll == qq \gg alll == alq == aql \gg aall == aaq$$
$$\gg aaal \gg aaaa$$

由於利用上各效應的排序, 以及指標函數係數中, 各項係數長度平方加總和固定的特性, 我們可以將不一樣的實驗設計列出其指標函數, 並藉由係數長度平方的加總來比較優劣性。並且在指標函數中定性型因子主效應或交互作用的生成向量有相互垂直的限制下, 我們可發現係數長度平方和的加總值, 會與生成該項係數之向量彼此間的夾角有相關, 當夾角越小時, 則係數長度平方和越大, 代表著向量與向量間, 或向量與平面間的相關性越強。

在二水準的因子下, 對於實驗設計來說, 並沒有定量型因子或定性型因子的差異, 所以本篇論文主要是以三個水準的因子作爲主要探討部份, 比較三水準下指標函數的各項特性及應用。然而對於更高水準的因子或同時具有多種水準因子的實驗, 則可能還需經過更多的推導及驗證, 我們期待指標函數能應用在更多的設計之上, 並且也能發掘更多指標函數的特性與性質。

參考文獻

[**1**]Cheng, S.-W., Ye, K.Q.,(2004). "Geometric isomorphism and minimum aberration for factorial designs with quantitative factors." *The Annals of Statistics*, 32, 2168-2185.

[**2**]Fontana, R., Pistone, G., Rogantin, M.P.,(2000). "Classification of two-level factorial fractions." *Journal of Statistical Planning and Inference*, 87, 149-172.

[**3**]Jones, B.A., Nachtsheim, C.J., Ye, K.Q.,(2007). "Model discrimination–another perspective on model-robust designs." *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137, 1576-1583.

[**4**]Piston, G., Rogantin, M.-P.,(2007). "Indicator function and complex coding for mixed fractional factorial designs." *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138, 787-802.

[**5**]Ponnusamy, S.,(1995). *Foundations of Complex analysis*, Narosa Publishing House.

[**6**]Tang, B.,(2001). "Theory of J-characteristics for fractional factorial designs and projection justification of minimum G_2-aberration." *Biometrika*, 88, 401-407.

[**7**]Wu, C.F.J., Hamada, M.,(2000). *Experiments planning,analysis,and parameter design optimization*, Wiley Series in Probability and Statistics.

[**8**]Xu, H., Wu, C.F.J.,(2001). "Generalized minimum aberration for asymmetrical fractional factorial designs." *The Annals of Statistics*, 29, 549-560.

[**9**]Ye, K.Q.,(2003). "Indicator function and its application in two-level factorial designs." *The Annals of Statistics*, 31, 984-994.