4 $OA(18, 3^p)$ 和 $OA(18, 2^1 3^p)$ 之最佳區集設計

4.1 區集設計之一般性質

在任何實驗上, 來自干擾因子的變異將影響實驗的結果。所謂干擾因子是指在對反應變數有可能具有效應, 但我們對其效應並不感興趣之因子。而對我們有興趣之因子, 我們稱之為處理因子 (treatment factor) 。干擾因子有可能是未知且不可控制的; 也就是在實驗中存在我們不知道的因子, 而它將影響實驗的反應結果。但是當我們知道干擾因子的存在且可以控制時, 可將其視為一區集因子 (block factor) 。雖然我們對區集因子的效應並沒有興趣去了解, 但若沒有適當地在設計中安排區集, 則估計處理因子效應時的正確性與效率性將會受到影響。

在區集設計相關文獻中, 還尚未有人探討 $OA(18, 3^p)$ 和 $OA(18, 2^1 3^p)$ 之區集設計。當我們想尋找 $OA(18, 3^p)$ 和 $OA(18, 2 \cdot 3^p)$ 之最佳區集設計時, 並無資料來搜尋最佳區集設計, 這 邊所謂的資料指的是非同構區集設計。所以我們必須從建構區集設計開始, 我們將利用來自 Tsai (2005) 所建構的 $OA(18, 3^p)$ 和 $OA(18, 2^1 3^p)$ 來產生2個區集、3個區集、6個區集之 $OA(18)$ 之區集設計。在正規區集設計上, 我們可以利用設計矩陣上任意幾行的不同水準組合來建構不同的區集。這種方法在 Wu and Hamada (2000) 被稱為取代法 (method of replacement) 。在非正規區集設計建構上亦可使用相同的方法。例如, 表 4.1 將 $OA(18, 2^1 3^4)$ 之設計建構成2個區集、3個區集和6個區集之區集設計。要建構一個

2個區集之區集設計, 我們可以將 A 行指派爲區集因子, 如表中的 “BlockII” , 其將 A 行中水準爲1和水準爲0的實驗點, 指定爲不同的區集, 而剩下的四行則視爲處理因子。若要建構一個3個區集之區集設計我們可以將 B 行指派爲區集因子, 如表中的 “BlockIII” , 當 B 行水準爲0、1和2時, 分別視爲不同的區集, 而剩下的四行則視爲處理因子。若要建構一個6個區集的設計時, 我們則可利用 A 行與 B 行來組合成區集因子, 如表中的 “BlockVI” , 將 A 行與 B 行的不同水準組合成不同的區集, 剩下的三行則可視爲處理因子。而表中的 “BlockVI” 其相對應之 A 行與 B 行的水準組合爲 (1,0), (1,1), (1,2), (0,0), (0,1) 和 (0,2), 每個水準組合各出現了三次, 我們稱之爲合格的 (eligible)。注意, 並非所有設計之任意行向量之集合皆可取代成區集因子, 當其水準組合出現次數不同時, 則不能將其取代爲區集因子, 我們稱之爲不合格的 (ineligible) 。

表 4.1: 將$OA(18, 2\cdot 3^4)$之設計建構成區集設計

A	B	C	D	E	BlockII	BlockIII	BlockVI
1	0	0	0	0	B1	B1	B1
0	0	0	0	0	B2	B1	B4
1	0	1	1	1	B1	B1	B1
0	0	1	1	1	B2	B1	B4
1	0	2	2	2	B1	B1	B1
0	0	2	2	2	B2	B1	B4
1	1	0	1	2	B1	B2	B2
0	1	0	1	2	B2	B2	B5
1	1	1	2	0	B1	B2	B2
0	1	1	2	0	B2	B2	B5
1	1	2	0	1	B1	B2	B2
0	1	2	0	1	B2	B2	B5
1	2	0	2	1	B1	B3	B3
0	2	0	2	1	B2	B3	B6
1	2	1	0	2	B1	B3	B3
0	2	1	0	2	B2	B3	B6
1	2	2	1	0	B1	B3	B3
0	2	2	1	0	B2	B3	B6

但爲何我們只探討2個區集、3個區集、6個區集之 $OA(18)$ 之區集設計而沒有9個區集之 $OA(18)$ 之區集設計呢? 我們使用之設計是由直交表而來, 所謂直交表是任意兩行中, 其所有的水準組合皆出現一樣多次, 在建構2個區集和3個區集之 $OA(18)$ 區集設計時, 其區集因子和任何一個處理因子之交互作用項 (interaction , 以下我們稱之爲 tb) , 都將是直交的 (tb=0) 。但在6個區集時, 則會出現區集因子與處理因子不直交 (tb≠0) 之設計, 原因是在所有 $OA(18)$ 之因子設計只包含了部分三行都互爲直交之設計, 且當因子個數越多時, 相對之下, 能滿足 tb=0 的機會越小。如表4.2 , 是我們將所有的 $OA(18, 2^1 3^p)$ 建構成6個區集之設計後的情況。當3個水準的因子個數爲4個, 我們建構出7344個6個區集的區集設計, 而滿足 tb=0 的有2407個, 占了將近33% 。而當3個水準的因子個數爲7個, 我們建構了5082個6個區集的區集設計, 滿足 tb=0 的只有65個, 只占了1%多。由此可知當3個水準的因子個數增加時, 能滿足 tb=0 的機會, 將快速的下降。而對於9個區集之 $OA(18)$ 之區集設計, 當我們指派任兩行水準爲3之行向量來建構成9個水準之區集因子時, 其 tb 絕對不會爲0, 因爲一個9個水準和一個3個水準的因子若要直交的話, 必需至少要有27個實驗點。因爲 tb≠0 之設計會導致處理因子的主效應受區集因子影響, 所以是一個非常不好的設計, 故以下我們將不予考慮。

表 4.2: 由 $OA(18, 2^1 3^p)$ 建構成6個區集設計後之情況

Number of 3-Level Factors	4	5	6	7
Number of Designs	7344	6660	9702	5082
Number of Designs with tb=0	2407	113	126	65

近來, 在最佳區集設計上之 WLP 與 MA 準則已有相當重要的發展。Cheng, Li and Ye (2004) 對於2水準非正規的設計, 找出最佳區集設計。以下我們將推廣其想法, 且把處理因子區分爲定性與定量兩種情形來尋找最佳區集設計。而對於定量處理因子的情況, 我們將發展新的 Minimum Aberration 與同構定義, 在後面小節加以討論與應用。

4.2 定量處理因子之區集設計 MA 準則

對定性處理因子之區集設計準則在2.3.2節, 已有大略論述, 我們在此依循其想法, 將其 WLP 推廣到定量因子之區集設計上。因此, 我們仍可先分出兩種字型:

$$W_t = (\beta_{3,0}, \beta_{4,0}, \beta_{5,0}, \beta_{6,0}, \ldots), \tag{4.1}$$

$$W_b = (\beta_{2,1}, \beta_{3,1}, \beta_{4,1}, \beta_{5,1} \ldots)。 \tag{4.2}$$

依循2.3.2節中的想法, 我們仍然以估計的特性做爲比較基礎, 由等級制度原理我們可知, $lq == ql == lll \gg qq == llq == lql == qll == llll \gg qlll == lqll == llql == lllq == qql == qlq == qql == lllll \gg \cdots$,

令 llb 爲線性與線性之交互因子效應與區集因子的交互項, 令 lqb 爲線性和二次之交互因子效應與區集因子的交互項, 其餘依此類推。若依等級制度原理, lqb 、qlb 和 $lllb$ 應視爲同樣重要。當考慮 lqb 、qlb 和 $lllb$ 時, 從估計的特性來看, 那一種 pure-type 字可以與其做比較呢? 因爲低階處理效應比高階處理效應更重要, 爲了避免三階處理效應與較低階之處理效應別名, 至少要七階效應, 即 $qlllll$ 、$lqllll$ 、$llqlll$ 、$lllqll$ 、$llllql$ 、$lllllq$ 、$qqlll$ 、$qlqll$ 、$qllql$ 、$qlllq$ 、$lqqll$ 、$lqlql$ 、$lqllq$ 、$llqql$ 、$llqlq$ 、$lllqq$ 、$qqql$ 、$qqlq$ 、$qlqq$ 、$lqqq$ 和 $lllllll$ 。此21個不只只有三階與三階的處理因子效應相互別名, 還有二階與四階效應相互別名, 如 $qllll$ 。所以此21個效應必定比 lqb 、qlb 和 $lllb$ 來的更重要。因此我們可推得其 WLP 如下:

$$W_1 = (\beta_{3,0}, \beta_{4,0}, \beta_{2,1}, \beta_{5,0}, \beta_{6,0}, \beta_{3,1}, \beta_{7,0}, \ldots), \tag{4.3}$$

以下我們稱之爲 β_{W_1}-WLP , 當區集效應比二階處理效應更重要時, 則我們可推得另一 WLP 如下:

$$W_2 = (\beta_{3,0}, \beta_{2,1}, \beta_{4,0}, \beta_{5,0}, \beta_{3,1}, \beta_{6,0}, \beta_{7,0} \ldots), \tag{4.4}$$

以下我們稱之爲 β_{W_2}-WLP 。對一設計 $\mathcal{A}$ 其

$$\beta_{i,0}(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{\|\mathbf{t}\|_1=i \\ \mathbf{t}:pure-type}} \left(\frac{b_{\mathbf{t}}}{b_{\mathbf{0}}}\right)^2 \tag{4.5}$$

和

$$\beta_{i,1}(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{\|\mathbf{t}\|_1^*=i \\ \mathbf{t}:mixed-type}} \left(\frac{b_{\mathbf{t}}}{b_{\mathbf{0}}}\right)^2, \tag{4.6}$$

其中 $\|\mathbf{t}\|_1^*$ 爲 $\mathbf{t}$ 中對應到處理因子的元素之加總。而 $\mathcal{A}$ 的解析度我們定義成 R_t 與 R_b 。R_t 爲處理效應之間的解析度, 其定義爲使得 $\beta_{r,0} > 0$ 最小的 r 。R_b 爲處理與區集效應之間的解析度, 其定義爲使得 $\beta_{r,1} > 0$ 最小的 $r+1$ 。

4.3 定量處理因子之區集設計上的同構

在第二章文獻探討中, 提到組合同構與幾何同構, 其分別適用在因子皆爲定性及定量的設計。但在同時具有定性及定量因子之設計的同構在過去的文獻中並無人加以定義與討論。區集設計當處理因子爲定量時, 其實就是同時具有定性及定量因子之設計, 因爲區集因子本身具有定性因子之特性。由於我們重點是在區集設計上, 所以我們將討論處理因子爲定量之區集設計的同構, 定義出新的同構才能在我們找出的最佳區集設計中更加細分出同構與非同構設計。

定義 4.1 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 爲兩個 $OA(n, ds_1s_2\cdots s_k)$ 之區集設計, 其中 d 是區集因子的水準個數, $s_1, s_2, \cdots, s_k$ 是 k 個處理因子的水準個數。令$\mathcal{A}_i$ 爲 $\mathcal{A}$ 中處理因子對應到區集因子之水準爲 i 的實驗點所形成的子矩陣 (submatrix) , $i = 1, \ldots, d$, 而 $\mathcal{B}_i$ 亦相同定義於 $\mathcal{B}$ 上。當 $\mathcal{A}$ 允許對處理因子做行的互換、對處理因子的水準做符號反轉和在區集內做列的互換而重新得到 $\mathcal{A}'$ 時, 如果可以找到 $\psi : \{1, \cdots, d\} \to \{1, \cdots, d\}$ 爲一對一且映成函數, 使得 $\mathcal{A}'_i = \mathcal{B}_{\psi(i)}$, $\forall i$, 則稱設計 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 爲幾何同構的區集設計。

因爲我們是在幾何上看其同構之性質所以我們仍可稱此同構爲幾何同構。其想法源自定量因子之因子設計下的幾何同構, 因爲當區集設計之處理因子爲定量時, 若忽略區集因子,

在幾何觀點來看便如同定量因子之因子設計。定義中所謂對處理因子做行互換和對處理因子的水準做符號反轉為何不改變其幾何特性, 在第二章已有加以論述。注意此處的處理因子行互換和水準符號反轉是在設計矩陣內對整行做運算, 並非僅對某區集內的處理因子做運算。而當我們再加入區集因子時, 因為區集設計在幾何上不過只是把因子設計分成不同的子矩陣, 所以我們只要再多考慮子矩陣是否相同, 即可定義出區集上之幾何同構。比如, 在區集內做列互換和區集與區集之間互換, 這都是相當直觀的想法。所謂區集內做列互換, 如實驗順序被隨機化一樣, 在同一區集內先做那一個實驗點, 對設計的特性是不產生影響的。而區集與區集互換, 則是因為區集因子有如定性因子一般, 將 BlockI 換成 BlockII , 或將 BlockII 換成 BlockI , 在設計的特性上是不會改變的。和以前定量因子之因子設計的幾何同構最大的不同, 除了多加了區集外, 實驗點的順序已不能再任意的互換, 而只能在區集內互換而以。注意, 若允許不同區集間的實驗點互換, 則將有可能導致不同的區集設計。

此定義亦可適用在因子設計, 當因子具有定性及定量因子, 且定性因子只有一個時, 定義4.1 將可適用。

例 2　如表4.3 , 我們列出了三個3個區集之 $OA(18,3^4)$ 之幾何同構設計。中間設計是將左邊設計的第 C 行做水準的轉換而得。也就是將左邊設計的第 C 行之水準{0,1,2}轉換成{2,1,0}而得到中間的設計。而右邊之設計是將中間之設計的第一個區集和第二個區集互換而得。因此三個設計皆為同構之設計。

4.4 定性處理因子

對定性處理因子之區集設計, 如何選擇最佳設計在過去的文獻中已有相當多的探討。在 Cheng and Wu (2002) 對2水準和3水準的正規設計, 選擇最佳區集設計。Cheng, Li and Ye (2004) 對於2水準非正規的設計, 找出最佳區集設計。都有詳細準則來尋找最佳設計。而在2.3.2節中則已有大略的論述。

而定性處理因子之區集設計上的同構, 因為處理因子和區集因子皆為定性, 所以可以視為定性因子之因子設計上的同構, 即組合同構。所以我們利用 Professor Angela Dean 所

表 4.3: 三個3個區集之 $OA(18, 3^4)$ 之幾何同構設計

Block	A	B	C
I	0	0	0
I	0	0	2
I	1	2	0
I	1	2	2
I	2	1	1
I	2	1	1
II	0	1	0
II	0	2	1
II	1	0	1
II	1	1	2
II	2	0	0
II	2	2	2
III	0	1	2
III	0	2	1
III	1	0	1
III	1	1	0
III	2	0	2
III	2	2	0

Block	A	B	C
I	0	0	2
I	0	0	0
I	1	2	2
I	1	2	0
I	2	1	1
I	2	1	1
II	0	1	2
II	0	2	1
II	1	0	1
II	1	1	0
II	2	0	2
II	2	2	0
III	0	1	0
III	0	2	1
III	1	0	1
III	1	1	2
III	2	0	0
III	2	2	2

Block	A	B	C
I	0	1	2
I	0	2	1
I	1	0	1
I	1	1	0
I	2	0	2
I	2	2	0
II	0	0	2
II	0	0	0
II	1	2	2
II	1	2	0
II	2	1	1
II	2	1	1
III	0	1	0
III	0	2	1
III	1	0	1
III	1	1	2
III	2	0	0
III	2	2	2

提供的所有組合非同構設計 $OA(18, 3^p)$ 和 $OA(18, 2^1 3^p)$ 來產生2個區集、3個區集、6個區集之 $OA(18)$ 之區集設計。然後我們將依照2.3.2節所提及之 α_{W_1}-WLP 和 α_{W_2}-WLP 來做爲我們搜尋 MA 設計之準則, 而所得的結果將是組合非同構的 MA 區集設計。我們將結果列於4.6節。

4.5 定量處理因子之 MA 區集設計之結果列表與探討

在因子設計上我們是先有所有非幾何同構之直交表再找出最佳設計, 但在區集設計上, 我們則反過來執行, 先找出最佳區集設計再由這些區集設計中找到同構與非同構之設計。

本章我們將討論2個區集、3個區集和6個區集之 $OA(18)$ 最佳區集設計, 其最佳設計的選取準則爲之前所定義的各種 MA 準則。

4.5.1 2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 最佳區集設計

利用 Tsai (2005) 所建構出的所有幾何非同構之 $OA(18,2^13^p)$ 建構成2個區集之 $OA(18,3^p)$, 其 $p=3\sim7$。依4.2節所推出的 β_{W_1}-WLP 和 β_{W_2}-WLP 做為搜尋 MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.4 和表4.5 。

在表4.4 中, 我們列出了2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從 3~7 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 β_{W_1}-WLP , 因為直交表的關係,$\beta_{1,0}$ 、$\beta_{2,0}$ 和 $\beta_{1,1}$ 必定為0, 所以我們從 $\beta_{3,0}$ 開始依序往後列出。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 E(1,2,3) , 為附錄表A.5 之1,2,3行所形成的2個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 β_{W_1}-WLP 下, 當 $p=3$ 和4時, 其 R_b =IV , 此意味著某些三階處理效應與區集效應互相部份混淆, R_t =IV, 此意味著某些一階處理效應與三階處理效應互相部份別名, 且某些二階處理效應和二階處理效應互相部份別名, 其 $\beta_{3,1}=0.375$ 和 $\beta_{4,0}=0.125$, 從式子 (4.5) 和式子 (4.6) 可知, 可以被清楚估計的效應佔比較多數, 所以我們可說其混淆及別名程度沒有很高。當 $p=5$, 其 R_b =IV , R_t =III 。當 $p=6$, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=7$, 有二個非同構區集設計皆為 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。

表 4.4: 2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 β_{W_1}-WLP 下的最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_1}-WLP $(\beta_{3,0},\beta_{4,0},\beta_{2,1},\beta_{5,0},\beta_{6,0},\beta_{3,1},\ldots)$
3	E(1,2,3)	(0 , 0.125 , 0 , 0.75 , 0.125 , 0.375)
4	E(1,4,5,6)	(0 , 1.875 , 0 , 0 , 1.625 , 2.125)
5	E(1,7,8,9,10)	(0 , 6.0625 , 0 , 0 , 4.125 , 4)
6	E(1,11,12,13,14,15)	(0.75 , 6.9375 , 1 , 6.75 ,12.4375 , 5.25)
7	E(1,16,17,18,19,20,21)	(1.5 , 14.625 , 1 , 12 , 26.125 , 7.875)
7	E(1,22,23,24,25,26,27)	(1.5 , 14.625 , 1 , 12 , 26.125 , 7.875)

在表4.5 中, 我們列出了2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從3~7 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 β_{W_2}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 E(1,2,3) , 為附錄表 A.5 之1,2,3行所形成的3個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 β_{W_2}-WLP 下, 當 $p=3$、4、5和7時,

其 MA 設計與在 β_{W_1}-WLP 下爲相同設計。也就是這些設計在 β_{W_1}-WLP 和 β_{W_2}-WLP 下皆爲 MA 區集設計。當 $p = 6$ 時, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。

表 4.5: 2個區集之非同構 $OA(18, 3^p)$ 在 β_{W_2}-WLP 下的最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_2}-WLP $(\beta_{3,0}, \beta_{2,1}, \beta_{4,0}, \beta_{5,0}, \beta_{3,1}, \beta_{6,0}, \ldots)$
3	E(1,2,3)	(0 , 0 , 0.125 , 0.75 , 0.375 , 0.125)
4	E(1,4,5,6)	(0 , 0 , 1.875 , 0 , 2.125 , 1.625)
5	E(1,7,8,9,10)	(0 , 0 , 6.0625 , 0 , 4 , 4.125)
6	F(1,2,3,4,5,6)	(0.75 , 0.5 , 8.71875 , 4.875 , 5.5 , 10.188)
6	F(1,7,8,9,10,11)	(0.75 , 0.5 , 8.71875 , 4.875 , 5.5 , 10.188)
7	E(1,16,17,18,19,20,21)	(1.5 , 1 , 14.625 , 12 , 7.875 , 26.125)
7	E(1,22,23,24,25,26,27)	(1.5 , 1 , 14.625 , 12 , 7.875 , 26.125)

4.5.2 3個區集之非同構 $OA(18, 3^p)$ 最佳區集設計

利用 Tsai (2005) 所建構出的所有幾何非同構之 $OA(18, 3^p)$ 建構成3個區集之 $OA(18, 3^p)$, 其 $p = 3 \sim 6$。依4.2節所推出的 β_{W_1}-WLP 和 β_{W_2}-WLP 做爲搜尋 MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.6 和表4.7 。

在表4.6 中, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18, 3^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 β_{W_1}-WLP 。當 $p = 3$, MA 區集設計對應到 G(1,2,3) , 爲附錄表A.7 之1,2,3行所形成的3個區集之 $OA(18, 3^3)$ 。在 β_{W_1}-WLP 下, 當 $p = 3$ 時, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , 此意味著某些二階處理效應與區集效應互相部份混淆, R_t =IV , 但 $\beta_{2,1} = 0.333333$ 和 $\beta_{4,0} = 0.125$, 所以其混淆與別名程度亦不高。當 $p = 4$ 時, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p = 5$ 時, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p = 6$ 時, 其 R_b =III, R_t =III。

在表4.7 中, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18, 3^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 β_{W_2}-WLP 。當 $p = 3$, MA 區集設計對應到 H(1,2,3) , 爲附錄

表 4.6: 3個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 β_{W_1}-WLP 下的最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_1}-WLP $(\beta_{3,0},\beta_{4,0},\beta_{2,1},\beta_{5,0},\beta_{6,0},\beta_{3,1},\ldots)$
3	G(1,2,3)	(0 , 0.125 , 0.333333 , 0.75 , 0.125 , 1.5)
3	G(1,4,5)	(0 , 0.125 , 0.333333 , 0.75 , 0.125 , 1.5)
4	G(1,6,7,8)	(0 , 1.875 , 0.916667 , 0 , 1.625 , 2.125)
5	G(1,9,10,11,12)	(0 , 6.0625 , 1.75 , 0 , 4.125 , 3.25)
5	G(1,13,14,15,16)	(0 , 6.0625 , 1.75 , 0 , 4.125 , 3.25)
6	G(1,17,18,19,20,21)	(0.75 , 6.9375 , 2.625 , 6.75 , 12.4375 , 9)

表A.8 之1,2,3行所形成的3個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 β_{W_2}-WLP 下, 當 $p=3$ 時, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p=4$ 時, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p=5$ 時, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其亦爲在 β_{W_1}-WLP 下之 MA 設計。當 $p=6$ 時, 有四個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。

表 4.7: 3個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 β_{W_2}-WLP 下的最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_2}-WLP $(\beta_{3,0},\beta_{2,1},\beta_{4,0},\beta_{5,0},\beta_{3,1},\beta_{6,0},\ldots)$
3	H(1,2,3)	(0 , 0.208333 , 0.375 , 0 , 1.5 , 0.125)
3	H(1,4,5)	(0 , 0.208333 , 0.375 , 0 , 1.5 , 0.125)
4	H(1,6,7,8)	(0 , 0.5 , 2.625 , 0 , 3.375 , 0.875)
5	G(1,9,10,11,12)	(0 , 1.75 , 6.0625 , 0 , 3.25 , 4.125)
5	G(1,13,14,15,16)	(0 , 1.75 , 6.0625 , 0 , 3.25 , 4.125)
6	H(1,9,10,11,12,13)	(0.75 , 2.25 , 8.71875 , 4.875 , 7.125 , 10.1875)
6	H(1,14,15,16,17,18)	(0.75 , 2.25 , 8.71875 , 4.875 , 7.125 , 10.1875)
6	H(1,19,20,21,22,23)	(0.75 , 2.25 , 8.71875 , 4.875 , 7.125 , 10.1875)
6	H(1,24,25,26,27,28)	(0.75 , 2.25 , 8.71875 , 4.875 , 7.125 , 10.1875)

4.5.3 3個區集之非同構 $OA(18, 2^1 3^p)$ 最佳區集設計

利用 Tsai (2005) 所建構出的所有幾何非同構之 $OA(18, 2^1 3^p)$ 建構成3個區集之 $OA(18, 2^1 3^p)$, 其 $p = 3 \sim 6$ 。依4.2節所推出的 β_{W_1}-WLP 和 β_{W_2}-WLP 做爲搜尋 MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.8 和表4.9 。

在表4.8 中, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18, 2^1 3^p)$, 其 p 從3~6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 β_{W_1}-WLP 。當 $p = 3$, MA 區集設計對應到 I(1,13,14,15) , 爲附錄表A.9 之1,13,14,15行所形成的3個區集之 $OA(18, 2^1 3^3)$ 。在 β_{W_1}-WLP 下, 當 $p = 3$ 時, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p = 4$ 時, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p = 5$ 時, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p = 6$ 時, 有七個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。

表 4.8: 3個區集之非同構 $OA(18, 2^1 3^p)$ 在 β_{W_1}-WLP 下最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_1}-WLP $(\beta_{3,0}, \beta_{4,0}, \beta_{2,1}, \beta_{5,0}, \beta_{6,0}, \beta_{3,1}, \ldots)$
3	I(1,13,14,15)	(0 , 0.5 , 0.5 , 1 , 0.5 , 2)
3	I(2,13,16,17)	(0 , 0.5 , 0.5 , 1 , 0.5 , 2)
4	I(3,13,18,19,20)	(0 , 3.75 , 1.166667 , 0 , 4.25 , 5.875)
5	I(4,13,21,22,23,24)	(0 , 10.0625 , 2.75 , 0 , 9.875 , 5)
5	I(5,13,25,26,27,28)	(0 , 10.0625 , 2.75 , 0 , 9.875 , 5)
6	I(6,13,29,30,31,32,33)	(1.25 , 14.21875 , 3.25 , 7.40625 , 19.9375 , 9.875)
6	I(7,13,34,35,36,37,38)	(1.25 , 14.21875 , 3.25 , 7.40625 , 19.9375 , 9.875)
6	I(8,13,39,40,41,42,43)	(1.25 , 14.21875 , 3.25 , 7.40625 , 19.9375 , 9.875)
6	I(9,13,44,45,46,47,48)	(1.25 , 14.21875 , 3.25 , 7.40625 , 19.9375 , 9.875)
6	I(10,13,49,50,51,52,53)	(1.25 , 14.21875 , 3.25 , 7.40625 , 19.9375 , 9.875)
6	I(11,13,54,55,56,57,58)	(1.25 , 14.21875 , 3.25 , 7.40625 , 19.9375 , 9.875)
6	I(12,13,59,60,61,62,63)	(1.25 , 14.21875 , 3.25 , 7.40625 , 19.9375 , 9.875)

在表4.9 中, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18, 2^1 3^p)$, 其 p 從3~6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 β_{W_2}-WLP 。當 $p = 3$, MA 區集設計對應到 J(1,3,4,5) , 爲附錄表A.10 之1,3,4,5行所形成的3個區集之 $OA(18, 2^1 3^3)$ 。在 β_{W_2}-WLP 下, 當 $p = 3$

和 $p=4$, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p=5$ 和 $p=6$ 與在 β_{W_1}-WLP 下為相同之 MA 設計。

表 4.9: 3個區集之非同構 $OA(18,2^13^p)$ 在 β_{W_2}-WLP 下最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_2}-WLP $(\beta_{3,0},\beta_{2,1},\beta_{4,0},\beta_{5,0},\beta_{3,1},\beta_{6,0},\ldots)$
3	J(1,3,4,5)	(0 , 0.375 , 0.75 , 0 , 3.375 , 1.25)
4	J(2,3,6,7,8)	(0 , 0.75 , 4.5625 , 0 , 6 , 2.625)
5	I(4,13,21,22,23,24)	0 , 2.75 , 10.0625 , 0 , 5 , 9.875)
5	I(5,13,25,26,27,28)	(0 , 2.75 , 10.0625 , 0 , 5 , 9.875)
6	I(6,13,29,30,31,32,33)	(1.25 , 3.25 , 14.21875 , 7.40625 , 9.875 , 19.9375)
6	I(7,13,34,35,36,37,38)	(1.25 , 3.25 , 14.21875 , 7.40625 , 9.875 , 19.9375)
6	I(8,13,39,40,41,42,43)	(1.25 , 3.25 , 14.21875 , 7.40625 , 9.875 , 19.9375)
6	I(9,13,44,45,46,47,48)	(1.25 , 3.25 , 14.21875 , 7.40625 , 9.875 , 19.9375)
6	I(10,13,49,50,51,52,53)	(1.25 , 3.25 , 14.21875 , 7.40625 , 9.875 , 19.9375)
6	I(11,13,54,55,56,57,58)	(1.25 , 3.25 , 14.21875 , 7.40625 , 9.875 , 19.9375)
6	I(12,13,59,60,61,62,63)	(1.25 , 3.25 , 14.21875 , 7.40625 , 9.875 , 19.9375)

4.5.4 6個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 最佳區集設計

利用 Tsai (2005) 所建構出的所有幾何非同構之 $OA(18,2^13^p)$ 建構成6個區集之 $OA(18,3^p)$, 其 $p=3\sim 6$。依4.2節所推出的 β_{W_1}-WLP 和 β_{W_2}-WLP 做為搜尋 MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.10 和表4.11 。

在表4.10 中, 我們列出了6個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 β_{W_1}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 K(1,2,3) , 為附錄表A.11 之1,2,3行所形成的6個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 β_{W_1}-WLP 下, 當 $p=3$和4 時, 其 R_b =III , R_t =IV 。當 $p=5$, 有二個非同構區集設計皆為 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=6$, 其 R_b =III , R_t =III 。

在表4.11 中, 在 β_{W_2}-WLP 下之最佳 MA 設計與在 β_{W_1}-WLP 下為相同之設計。也就是說, 在6個區集時之這些區集設計在 β_{W_1}-WLP 和 β_{W_2}-WLP 下皆為 MA 區集設計。

由 MA 區集設計的表可知, 當處理因子越多時, 解析度相對越低, 且混淆與別名程度也隨之越來越高。其特性如同因子設計一樣。

表 4.10: 6個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 β_{W_1}-WLP 下最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_1}-WLP $(\beta_{3,0},\beta_{4,0},\beta_{2,1},\beta_{5,0},\beta_{6,0},\beta_{3,1},\ldots)$
3	K(1,2,3)	(0 , 1.5 , 1.5 , 0 , 0.5 , 3)
4	K(1,4,5,6)	(0 , 2.0625 , 3 , 0 , 0.875 , 7.5)
5	K(1,7,8,9,10)	(0.375 , 3.1875 , 5 , 2.625 , 4.25 , 12.625)
5	K(1,11,12,13,14)	(0.375 , 3.1875 , 5 , 2.625 , 4.25 , 12.625)
5	K(1,15,16,17,18)	(0.375 , 3.1875 , 5 , 2.625 , 4.25 , 12.625)
6	K(1,19,20,21,22,23)	(0.75 , 6.9375 , 7.5 , 6.75 , 12.4375 , 20.25)

表 4.11: 6個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 β_{W_2}-WLP 下最佳區集設計

p	設計矩陣	β_{W_2}-WLP $(\beta_{3,0},\beta_{2,1},\beta_{4,0},\beta_{5,0},\beta_{3,1},\beta_{6,0},\ldots)$
3	K(1,2,3)	(0 , 1.5 , 1.5 , 0 , 3 , 0.5)
4	K(1,4,5,6)	(0 , 3 , 2.0625 , 0 , 7.5 , 0.875)
5	K(1,7,8,9,10)	(0.375 , 5 , 3.1875 , 2.625 , 12.625 , 4.25)
5	K(1,11,12,13,14)	(0.375 , 5 , 3.1875 , 2.625 , 12.625 , 4.25)
5	K(1,15,16,17,18)	(0.375 , 5 , 3.1875 , 2.625 , 12.625 , 4.25)
6	K(1,19,20,21,22,23)	(0.75 , 7.5 , 6.9375 , 6.75 , 20.25 , 12.4375)

4.6 定性處理因子之 MA 區集設計之結果列表與探討

本章我們將討論2個區集、3個區集和6個區集之 $OA(18)$ 最佳區集設計, 其最佳設計的選取準則爲2.3.2節所論述之各種 MA 準則。

4.6.1 2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 最佳區集設計

利用 Professor Angela Dean 所提供的所有組合非同構之 $OA(18,2^1 3^p)$ 建構成2個區集之 $OA(18,3^p)$, 其 $p=3\sim 7$。依2.3.2節所提及的 α_{W_1}-WLP 和 α_{W_2}-WLP 做爲搜尋

MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.12 和表4.13 。

在表4.12 中, 我們列出了2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從3∼7 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_1}-WLP , 因爲直交表的關係,$\alpha_{1,0}$ 、$\alpha_{2,0}$ 和 $\alpha_{1,1}$ 必定爲0, 所以我們從 $\alpha_{3,0}$ 開始依序往後列出。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 L(1,2,3) , 爲附錄表A.12 之1,2,3行所形成的2個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 α_{W_1}-WLP 下, 當 $p=3$、4、5和6時, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=7$, 有三個非同構設計區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。

表 4.12: 2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 α_{W_1}-WLP 下之最佳區集設計

p	設計矩陣	α_{W_1}-WLP $(\alpha_{3,0},\alpha_{4,0},\alpha_{2,1},\alpha_{5,0},\alpha_{6,0},\alpha_{3,1},\cdots)$
3	L(1,2,3)	(0.5 , 0 , 1.5)
4	L(1,4,5,6)	(2 , 1.5 , 1.777778 , 2.444444 , 0.277778)
5	L(1,7,8,9,10)	(5 , 7.5 , 4 , 0 , 3 , 4.5 , 2)
6	L(1,11,12,13,14,15)	(10 , 22.5 , 6 , 0 , 7 , 6 , 13.5 , 12 , 3)
7	L(1,16,17,18,19,20,21)	(22 , 34.5 , 6 , 27 , 31 , 18 , 6 , 25.5 , 39 , 27 , 6)
7	L(1,22,23,24,25,26,27)	(22 , 34.5 , 6 , 27 , 31 , 18 , 6 , 25.5 , 39 , 27 , 6)
7	L(1,28,29,30,31,32,33)	(22 , 34.5 , 6 , 27 , 31 , 18 , 6 , 25.5 , 39 , 27 , 6)

在表4.13 中, 我們列出了2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從3∼7 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_2}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 L(1,2,3) , 爲附錄表A.12 之1,2,3行所形成的2個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 α_{W_2}-WLP 下之 MA 設計, 與在 α_{W_1}-WLP 下皆爲相同之設計。

4.6.2 3個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 最佳區集設計

利用 Professor Angela Dean 所提供的所有組合非同構之 $OA(18,3^p)$ 建構成3個區集之 $OA(18,3^p)$, 其 $p=3\sim 6$。依2.3.2節所提及的 α_{W_1}-WLP 和 α_{W_2}-WLP 做爲搜尋 MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.14 和表4.15 。

表 4.13: 2個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 α_{W_2}-WLP 下之最佳區集設計

p	設計矩陣	α_{W_2}-WLP $(\alpha_{3,0},\alpha_{2,1},\alpha_{4,0},\alpha_{5,0},\alpha_{3,1},\alpha_{6,0},\cdots)$
3	L(1,2,3)	(0.5 , 0 , 1.5)
4	L(1,4,5,6)	(2 , 1.777778 , 1.5 , 2.444444 , 0.277778)
5	L(1,7,8,9,10)	(5 , 4 , 7.5 , 0 , 3 , 4.5 , 2)
6	L(1,11,12,13,14,15)	(10 , 6 , 22.5 , 0 , 6 , 7 , 13.5 , 12 , 3)
7	L(1,16,17,18,19,20,21)	(22 , 6 , 34.5 , 27 , 18 , 31 , 6 , 25.5 , 39 , 27 , 6)
7	L(1,22,23,24,25,26,27)	(22 , 34.5 , 6 , 27 , 31 , 18 , 6 , 25.5 , 39 , 27 , 6)
7	L(1,28,29,30,31,32,33)	(22 , 34.5 , 6 , 27 , 31 , 18 , 6 , 25.5 , 39 , 27 , 6)

在表4.14 中, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_1}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 M(1,2,3) , 為附錄表A.13 之1,2,3行所形成 的3個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 α_{W_1}-WLP 下, 當 $p=3$, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=4$, 有二非同構區集設計皆為 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=5$, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=6$, 其 R_b =III , R_t =III , 其在 β_{W_1}-WLP 亦為 MA 設計, 故此區集設計不管處理因子為定性或定量時, 在 α_{W_1}-WLP 與 β_{W_1}-WLP 下皆為最佳設計。

表 4.14: 3個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 α_{W_1}-WLP 下之最佳區集設計

p	設計矩陣	α_{W_1}-WLP $(\alpha_{3,0},\alpha_{4,0},\alpha_{2,1},\alpha_{5,0},\alpha_{6,0},\alpha_{3,1},\cdots)$
3	M(1,2,3)	(0.5 , 1.5 , 1.5)
4	M(1,4,5,6)	(2 , 1.5 , 3 , 6 , 0)
4	M(1,7,8,9)	(2 , 1.5 , 3 , 6 , 0)
5	M(1,10,11,12,13)	(5 , 7.5 , 5 , 0 , 15 , 0 , 7)
6	G(1,17,18,19,20,21)	(10 , 22.5 , 12 , 0 , 7 , 12 , 27 , 24 , 6)

在表4.15 中, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_2}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 M(1,2,3) , 為附錄

表A.13 之1,2,3行所形成的3個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 α_{W_2}-WLP 下之 MA 設計, 與在 α_{W_1}-WLP 下皆爲相同之設計。

表 4.15: 3個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 在 α_{W_2}-WLP 下之最佳區集設計

		α_{W_2}-WLP
p	設計矩陣	$(\alpha_{3,0},\alpha_{2,1},\alpha_{4,0},\alpha_{5,0},\alpha_{3,1},\alpha_{6,0},\cdots)$
3	M(1,2,3)	(0.5 , 1.5 , 1.5)
4	M(1,4,5,6)	(2 , 1.5 , 3 , 6 , 0)
4	M(1,7,8,9)	(2 , 1.5 , 3 , 6 , 0)
5	M(1,10,11,12,13)	(5 , 7.5 , 5 , 0 , 15 , 0 , 7)
6	G(1,17,18,19,20,21)	(10 , 22.5 , 12 , 0 , 7 , 12 , 27 , 24 , 6)

4.6.3 3個區集之非同構 $OA(18,2^13^p)$ 之最佳區集設計

利用 Professor Angela Dean 所提供的所有組合非同構之 $OA(18,2^13^p)$ 建構成3個區集之 $OA(18,2^13^p)$, 其 $p=3\sim 6$。依2.3.2節所提及的 α_{W_1}-WLP 和 α_{W_2}-WLP 做爲搜尋 MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.16 和表4.17 。

在表4.16 中, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18,2^13^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_1}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 N(1,7,8,9) , 爲附錄表A.14 之1,7,8,9行所形成的3個區集之 $OA(18,2^13^3)$ 。在 α_{W_1}-WLP 下, 當 $p=3$, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 $R_b=$III , $R_t=$III 。$p=4$, 其 $R_b=$III , $R_t=$III 。$p=5$, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 $R_b=$III , $R_t=$III 。$p=6$, 其 $R_b=$III , $R_t=$III 。

在表4.17 中, 在 α_{W_2}-WLP 下, 我們列出了3個區集之非同構 $OA(18,2^13^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_2}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 O(1,2,3,4) , 爲附錄表A.15 之1,2,3,4行所形成的3個區集之 $OA(18,^1 3^3)$, 其 $R_b=$III , $R_t=$III 。當 $p=4$、5和6時之 MA 設計, 與在 α_{W_1}-WLP 下全爲相同之設計。

表 4.16: 3個區集之非同構 $OA(18,2^13^p)$ 在 α_{W_1}-WLP 下之最佳區集設計

		α_{W_1}-WLP
p	設計矩陣	$(\alpha_{3,0},\alpha_{4,0},\alpha_{2,1},\cdots)$
3	N(1,7,8,9)	(0.5 , 4.5 , 3 , 0 , 0)
3	N(2,7,10,11)	(0.5 , 4.5 , 3 , 0 , 0)
4	N(3,7,12,13,14)	(3.5 , 4.5 , 5 , 7.5 , 3 , 2.5 , 0)
5	N(4,7,15,16,17,18)	(8.5 , 12 , 8.5 , 3 , 15 , 16.5 , 12.5 , 4 , 0)
5	N(5,7,19,20,21,22)	(8.5 , 12 , 8.5 , 3 , 15 , 16.5 , 12.5 , 4 , 0)
6	N(6,7,23,24,25,26,27)	(16 , 28.5 , 12 , 13.5 , 19 , 24 , 42 , 51 , 30 , 6 , 0)

表 4.17: 3個區集之非同構 $OA(18,2^13^p)$ 在 α_{W_2}-WLP 下之最佳區集設計

		α_{W_2}-WLP
p	設計矩陣	$(\alpha_{3,0},\alpha_{2,1},\alpha_{4,0},\cdots)$
3	O(1,2,3,4)	(0.5 , 2 , 5 , 0.5 , 0)
4	N(3,7,12,13,14)	(3.5 , 4.5 , 5 , 7.5 , 3 , 2.5 , 0)
5	N(4,7,15,16,17,18)	(8.5 , 12 , 8.5 , 3 , 15 , 16.5 , 12.5 , 4 , 0)
5	N(5,7,19,20,21,22)	(8.5 , 12 , 8.5 , 3 , 15 , 16.5 , 12.5 , 4 , 0)
6	N(6,7,23,24,25,26,27)	(16 , 28.5 , 12 , 13.5 , 19 , 24 , 42 , 51 , 30 , 6 , 0)

4.6.4 6個區集之非同構 $OA(18,3^p)$ 最佳區集設計

利用 Professor Angela Dean 所提供的所有組合非同構之 $OA(18,2^13^p)$ 建構成6個區集之 $OA(18,3^p)$, 其 $p=3\sim 6$。依2.3.2節所提及的 α_{W_1}-WLP 和 α_{W_2}-WLP 做爲搜尋 MA 區集設計之準則。其結果分別列於表4.18 和表4.19 。

在表4.18 中, 我們列出了6個區集之非同構 $OA(18,3^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_1}-WLP 。當 $p=3$, MA 區集設計對應到 P(1,2,3) , 爲附錄表A.16 之1,2,3行所形成的6個區集之 $OA(18,3^3)$ 。在 α_{W_1}-WLP 下, 當 $p=3$, 有六個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=4$, 有五個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=5$, 有三個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其 R_b =III , R_t =III 。當 $p=6$, 有二個非同構區集設計皆爲 MA 設計, 其

R_b =III , R_t =III 。

表 4.18: 6個區集之非同構 $OA(18, 3^p)$ 在 α_{W_1}-WLP 下之最佳區集設計

p	設計矩陣	α_{W_1}-WLP $(\alpha_{3,0}, \alpha_{4,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{5,0}, \alpha_{6,0}, \alpha_{3,1}, \cdots)$
3	P(1,2,3)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,4,5)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,6,7)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,8,9)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,10,11)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,12,13)	(0.5 , 6 , 1.5)
4	P(1,14,15,16)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,17,18,19)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,20,21,22)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,23,24,25)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,26,27,28)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
5	P(1,29,30,31,32)	(5 , 7.5 , 20 , 0 , 15 , 22.5 , 10)
5	P(1,33,34,35,36)	(5 , 7.5 , 20 , 0 , 15 , 22.5 , 10)
5	P(1,37,38,39,40)	(5 , 7.5 , 20 , 0 , 15 , 22.5 , 10)
6	P(1,41,42,43,44,45)	(10 , 22.5 , 30 , 0 , 7 , 30 , 67.5 , 60 , 15)
6	P(1,46,47,48,49,50)	(10 , 22.5 , 30 , 0 , 7 , 30 , 67.5 , 60 , 15)

在表4.19 中, 我們列出了6個區集之非同構 $OA(18, 3^p)$, 其 p 從3∼6 之 MA 區集設計, 並大略的列了每個 α_{W_2}-WLP 。當 $p = 3$, MA 區集設計對應到 P(1,2,3) , 爲附錄表A.16 之1,2,3行所形成的6個區集之 $OA(18, 3^3)$ 。在 α_{W_2}-WLP 下之 MA 設計, 與在 α_{W_1}-WLP 下全爲相同之設計。

表 4.19: 6個區集之非同構 $OA(18, 3^p)$ 在 α_{W_2}-WLP 下之最佳區集設計

p	設計矩陣	α_{W_2}-WLP $(\alpha_{3,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{4,0}, \alpha_{5,0}, \alpha_{3,1}, \alpha_{6,0}, \cdots)$
3	P(1,2,3)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,4,5)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,6,7)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,8,9)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,10,11)	(0.5 , 6 , 1.5)
3	P(1,12,13)	(0.5 , 6 , 1.5)
4	P(1,14,15,16)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,17,18,19)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,20,21,22)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,23,24,25)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
4	P(1,26,27,28)	(2 , 1.5 , 12 , 6 , 4.5)
5	P(1,29,30,31,32)	(5 , 7.5 , 20 , 0 , 15 , 22.5 , 10)
5	P(1,33,34,35,36)	(5 , 7.5 , 20 , 0 , 15 , 22.5 , 10)
5	P(1,37,38,39,40)	(5 , 7.5 , 20 , 0 , 15 , 22.5 , 10)
6	P(1,41,42,43,44,45)	(10 , 22.5 , 30 , 0 , 7 , 30 , 67.5 , 60 , 15)
6	P(1,46,47,48,49,50)	(10 , 22.5 , 30 , 0 , 7 , 30 , 67.5 , 60 , 15)