2 文獻探討

本研究之相關文獻, 共分爲幾部分:(一) 同構 (Isomorphism) , (二) 字長型態 (Word Length Pattern,WLP) , (三) Minimum Aberration , (四) 計數函數 (Counting Functions), (五) 幾何非同構之建構, 將在此章詳盡回顧與探討。

在本章開始前我們先介紹一些符號與用語。令 $\mathcal{D}$ 爲 $OA(N, s_1s_2\cdots s_k)$ 的全因子設計 (full factorial design) , 其有 k 個因子和 N 個實驗點, $N = s_1s_2\cdots s_k$ 。第 i 個因子的水準是 $G_i = \{0, 1, \ldots, s_i - 1\} \subset \mathbb{R}$ 。因此, $\mathcal{D}$ 是在 $\mathbb{R}^k$ 中 N 個實驗點的集合。一個 k 個因子的因子設計 $\mathcal{A}$, 如果它的實驗點皆包含在 $\mathcal{D}$ 中, 則稱設計 $\mathcal{A}$ 在設計空間 $\mathcal{D}$ 中, 也就是, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \mathbf{x} \in \mathcal{D}$ 。在 $\mathcal{D}$ 中的一個實驗點在 $\mathcal{A}$ 中也許會出現一次或多次。我們將 $\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}} f(\mathbf{x})$ 表示爲對函數 f 將 $\mathcal{A}$ 所有的實驗點加總; 也就是如果實驗點 $\mathbf{x}$ 出現多次, $f(\mathbf{x})$ 也將加總多次。

對每個因子 X_i , 我們可定義一個直交對比 (orthogonal contrasts) 集合 $C_0^i(x), C_1^i(x), \ldots, C_{s_i-1}^i(x)$, 其滿足:

$$\sum_{x\in\{0,1,\ldots,s_i-1\}} C_u^i(x)C_v^i(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } u \neq v, \\ s_i, & \text{if } u = v. \end{cases} \tag{2.1}$$

令 $\Im = G_1 \times \cdots \times G_k$ 。在 $\mathcal{D}$ 中的一個直交對比基底 (orthonormal contrast basis, OCB) 定義爲

$$C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{k} C_{t_i}^i(x_i)。 \tag{2.2}$$

若 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \Im$ 且 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathcal{D}$ 則

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) C_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{if } \mathbf{t} \neq \mathbf{u}, \\ N, & \text{if } \mathbf{t} = \mathbf{u}. \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\mathbf{t}, \mathbf{u}$ 爲集合 $\Im$ 中的元素 (elements) 。在統計分析上, $C_0^i(x) = 1$ 常被視爲常數項。因此, 對所有的 i 當 $C_0^i(x) = 1$ 時, 我們稱 $\{C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})\}$, 爲一統計直交對比基底 (statistical orthonormal contrast basis, SOCB) 。當 $C_j^i(x)$ 爲次方 j 的多項式, $j = 0, 1, \ldots, s_i - 1$ 且 $i = 0, 1, \ldots, k$, 則 SOCB 稱爲一直交多項式基底 (orthogonal polynomial basis,OPB) 。另注意, OPB 即爲 SOCB , 且 SOCB 即爲 OCB 。

對 $\mathbf{t} \in \Im$ 再定義兩種基準。令 $\|\mathbf{t}\|_0$ 爲 $\mathbf{t}$ 中不爲0的元素個數。且令

$$\|\mathbf{t}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} t_i。$$

對於 SOCB 內的 $C_{\mathbf{t}}$, 其$\|\mathbf{t}\|_0$ 即是 $\mathbf{t}$ 包含的因子個數。如果 SOCB 亦爲 OPB , 則 $\|\mathbf{t}\|_1$ 即爲它的多項式次方。

2.1 同構

對定性因子的設計, 兩個設計稱爲組合同構 (combinatorial isomorphism) 若一設計對因子做行互換 (column permutation) 、對列做互換 (row permutation) 和對因子的水準做符號的互換 (level permutation) 後, 可得到另一設計。如表2.1 爲兩 3^{3-1} 之設計, 在表中左右兩邊表示兩個設計矩陣, 每一行表示一個因子, 每一列表示一個實驗點。右邊的設計矩陣是由左邊的設計矩陣的第 C 行做水準符號的重新排列, $\{0, 1, 2\} \to \{0, 2, 1\}$, 故此兩設計稱爲組合同構。在3水準的符號排列總共有以下六種:

$$\{0,1,2\} \to \{0,1,2\}, \quad \{0,1,2\} \to \{0,2,1\}, \quad \{0,1,2\} \to \{1,0,2\},$$
$$\{0,1,2\} \to \{1,2,0\}, \quad \{0,1,2\} \to \{2,0,1\}, \quad 和\{0,1,2\} \to \{2,1,0\}。$$

當因子爲定性時, 因子做任何一種水準重新排列所得到的另一個設計, 我們都稱兩設計爲組合同構。因爲在因子爲定性的條件下, 做任何因子的水準重排, 在設計的性質上是不會變

的, 例如, 某一因子爲機器的編號, 1號、2號和3號, 我們將2號改爲3號, 3號改爲2號, 其實驗結果是不會變的。

表 2.1: 組合同構但幾何不同構的兩設計

A	B	C	A	B	C
0	0	0	0	0	0
0	1	2	0	1	1
0	2	1	0	2	2
1	0	2	1	0	1
1	1	1	1	1	2
1	2	0	1	2	0
2	0	1	2	0	2
2	1	0	2	1	0
2	2	2	2	2	1

對定量因子之因子設計，因子水準的重新排列可能會得到不同的幾何結構和不同的設計特性, 從幾何的觀點來看, 設計矩陣的每一列表示幾何空間上的一個點, 當我們將一幾何空間做旋轉和 (或) 反射, 其幾何結構將是不變的。而旋轉即是將因子做行互換, 反射即是將因子水準做反轉。在 Cheng and Ye (2004) 將兩設計定義爲幾何同構 (geometric isomorphism) 如下:

定義 2.1 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 爲來自相同設計空間 $\mathcal{D}$ 之兩因子設計。如果一個設計允許對因子做行互換、對列做互換和對因子水準做符號反轉 *(sign reverse)*, 則稱設計 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 爲幾何同構設計。

在3水準的排列總共有六種, 可將其區分爲三群, $\{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2\}$ 和 $\{0,1,2\} \rightarrow \{2,1,0\}$ 爲同一群, $\{0,1,2\} \rightarrow \{0,2,1\}$ 和 $\{0,1,2\} \rightarrow \{2,0,1\}$ 爲同一群, $\{0,1,2\} \rightarrow \{1,0,2\}$ 和 $\{0,1,2\} \rightarrow \{1,2,0\}$ 爲同一群, 在3水準中, 此三群即所謂的水準反轉。

2.2 計數函數

關於計數函數最早的論文來自 Fontana,Pistone and Rogantin (2000)。其利用計數函數

來研究沒有重複實驗點的2水準部分因子 (fractional factorial) 設計。Ye (2003) 將其推廣至有重複實驗點的2水準部分因子設計。Cheng, Li and Ye (2004) 利用計數函數深入探討2水準非正規設計的最佳區集設計。Cheng and Ye (2004) 則使用計數函數來對於定量因子所構成的設計做更深入的研究。

相對於正規設計中, 利用群的結構來定義設計, 計數函數則採用了另一數學工具—多項式。若將設計矩陣中的每個實驗當作空間裡的一個點來看, 那麼計數函數就是代表著每一個點出現次數的函數, 因此定義如下:

定義 2.2 令 $\mathcal{A}$ 是在一設計空間 $\mathcal{D}$ 中的一個設計。設計 $\mathcal{A}$ 的計數函數 $F_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$ 是定義在 $\mathcal{D}$ 上的一個函數, 如果 $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $F_{\mathcal{A}}(\mathbf{x})$ 的值即爲 $\mathbf{x}$ 在設計 $\mathcal{A}$ 中出現的次數。

一個設計它的計數函數是唯一的, 計數函數包含了設計的所有特性。當計數函數經由 OCB 展開時, 這些特性將隨之呈現。

定理 2.1 *(Cheng and Ye, 2004)* 假設 $\mathcal{A}$ 爲一 n 個實驗點的因子設計, 令 $\mathcal{D}$ 爲 $\mathcal{A}$ 之設計空間, 且 $\{C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), \mathbf{t} \in \Im\}$ 是定義在 $\mathcal{D}$ 之*OCB*。則 $\mathcal{A}$ 的計數函數可表現成 $C_{\mathbf{t}}$ 之線性組合如下:

$$F_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{t}\in\Im} b_{\mathbf{t}} C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x}), \tag{2.4}$$

對所有 $\mathrm{x} \in \mathcal{D}$ 。其係數 $\{b_{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \in \Im\}$ 可被唯一決定如下:

$$b_{\mathbf{t}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}} C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})。 \tag{2.5}$$

若$\{C_{\mathbf{t}}\}$爲 SOCB 時, $b_{\mathbf{0}} = n/N$, 其中 $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ 。

例 1　考慮 k 個因子, 每個因子皆爲3個水準之因子設計做爲實例。其設計空間 $\mathcal{D}$ 包含了所有的 3^k 設計點: $\{(d_1, \ldots, d_k), d_i = 0, 1, 2, i = 1, \ldots, k\}$ 。根據**定義**2.2 , 任何 k 因子三水準之因子設計可以表示成定義在 $\mathcal{D}$ 上之計數函數。三水準因子之直交多項式爲

$$C_0(x) = 1, \quad C_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}(x-1) \quad 和 \quad C_2(x) = \sqrt{2}(\frac{3}{2}(x-1)^2 - 1)。$$

表 2.2: 兩個 $OA(18,3^3)$ 之因子設計

A	B	C	A	B	C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	2	0	1	2
0	2	0	0	2	0
0	2	2	0	2	2
1	0	2	1	0	1
1	0	2	1	0	2
1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	2
1	2	1	1	2	0
1	2	1	1	2	1
2	0	0	2	0	0
2	0	1	2	0	2
2	1	1	2	1	0
2	1	2	2	1	1
2	2	0	2	2	1
2	2	2	2	2	2

注意, $(C_1(0),C_1(1),C_1(2))=(-\sqrt{3/2},0,\sqrt{3/2})$ 和 $(C_2(0),C_2(1),C_2(2))=(1/\sqrt{2},-\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ 分別爲線性與二次對照之比例項, 其定義在 Wu and Hamada [2000, Section 5.6]。因此 $\{C_{\mathbf{t}}(\mathrm{x}),\mathbf{t}\in\Im\}$ 是在函數空間 $\mathcal{D}$ 中之一 OPB , 其中 $\Im$ 爲 $\{0,1,2\}^k$ 之向量空間。由**定理** 2.1 知, 一個計數函數可以寫成 $C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})'s$ 的線性組合, 其係數爲

$$b_{\mathbf{t}}=\frac{1}{3^k}\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}}C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$$

且 $b_{\mathbf{0}}=n/3^k$ 。這些係數包含了因子效應之間的別名 (aliasing) 資訊。表2.2 左邊設計的計數函數可表示如下,

$$F(\mathbf{x})=\frac{2}{3}C_{000}(\mathbf{x})+0.2357C_{211}(\mathbf{x})-0.4082C_{221}(\mathbf{x})+0.4082C_{212}(\mathbf{x})+0.2357C_{222}(\mathbf{x}),$$

其中,

$$C_{i_1 i_2 i_3}(\mathbf{x}) = C_{i_1}(x_1)C_{i_2}(x_2)C_{i_3}(x_3),$$

而右邊設計的計數函數則爲,

$$F(\mathbf{x}) = \frac{2}{3}C_{000}(\mathbf{x})+0.2357C_{211}(\mathbf{x})-0.2357C_{112}(\mathbf{x})+0.2357C_{121}(\mathbf{x})+0.2357C_{222}(\mathbf{x})。$$

從兩設計的計數函數, 即可看出他們的因子效應的別名程度, 如兩設計之 b_{111} 皆爲0表示其線性和線性的交互效應與線性主效應互爲直交, 而 b_{222} 皆不爲0表示其二次和二次的交互效應與二次主效應不爲直交, 即部份別名 (partial aliasing)。

2.3 Minimum Aberration

2.3.1 因子設計

在因子設計上 Minimum Aberration (以下簡稱爲 MA) 是一個被廣泛應用的準則。最早 MA 的定義奠基於群理論 (group theory) , 故僅能應用在正規設計 s^{p-k} 部分因子設計上 [Fries and Hunter (1980)]。後來, Xu and Wu (2001) 以編碼理論 (coding theory) 爲基礎提出一個 aberration 準則, 其可應用在一般的因子設計上。對 s^{p-k} 正規設計, 其即爲傳統 aberration 準則。而對一般2水準因子設計, 其即爲 G_2-aberration 準則 [Tang and Deng (1999)]。近來 Cheng and Ye (2004) 將其利用計數函數重新定義如下。

定義 2.3 *(Cheng and Ye, 2004)* 令 $\mathcal{A}$ 是在設計空間 $\mathcal{D}$ 中的一個 $n \times k$ 的因子設計, 假設 $F_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{t\in\Im} b_{\mathbf{t}}C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ 爲 $\mathcal{A}$ 之計數函數, 其中 $\{C_{\mathbf{t}}\}$ 爲一 *SOCB* , 其廣義字長型態 $(\alpha_1(\mathcal{A}), \ldots, \alpha_k(\mathcal{A}))$ 定義如下:

$$\alpha_i(\mathcal{A}) = \sum_{\|\mathbf{t}\|_0 = i} \left(\frac{b_{\mathbf{t}}}{b_{\mathbf{0}}}\right)^2。 \tag{2.6}$$

其廣義 *MA* 準則就是依序最小化 $\alpha_i(\mathcal{A})$, 對 $i = 1, 2, \ldots, k$ 。而 $\mathcal{A}$ 的解析度 *(resolution)* 等於使得 $\alpha_r > 0$ 最小的 r 。

在 Cheng and Ye (2004) 中, 證明了 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 可用來測量效應 $C_{\mathbf{t}}$ 和截距項之間的別名程度。因此, 式子(2.6) 中 α_i 測量了所有 i 個因子的交互效應與截距項之間的別名程度, 一個較小的 α_i 表示 i 個因子的交互效應與截距項之間的別名程度爲較小, 所以必需依序最小化 α_i 。注意, 定義中假設了所有 i 個因子的交互效應同樣重要, 此假設只適用於因子爲定性, 在因子爲定量下此定義將不再適用。

在 MA 背後有一個重要的假設稱爲等級制度原理 (hierarchical ordering principle) [Wu and Hamada (2000)]:

1. 低階效應比高階效應更重要。
2. 同階的效應同樣重要。

此原理適用在因子爲定量或定性下。但定性因子與定量因子的效應階級是不一樣的。當因子爲定性時, 所有 i 個因子的交互效應是同樣重要的, 當 $i < j$ 時 , i 個因子的交互效應比 j 個因子的交互效應更重要, 所以在式子 (2.6) 中相同的 $\|\mathbf{t}\|_0$值同樣重要。但是當因子爲定量時, 多項式模式常被使用, 在此情況下, 次方較低的效應將比次方較高的效應來得重要。回顧 OPB , $C_j(x)$ 爲一個次方爲 j 的多項式, $C_{\mathbf{t}}(\mathrm{x})$ 爲一個次方爲 $\|\mathbf{t}\|_1$ 之多項式。所以階級效應的重要程度應依 $\|\mathbf{t}\|_1$ 之值。由等級制度原理在因子爲定量且因子水準爲3水準下, 我們可知效應之重要性如下:

$$l \gg q == ll \gg lq == ql == lll \gg qq == llq == lql == qll == llll \gg \cdots ,$$

其 $\gg$ 表示“更重要”的意思, $==$ 表示“相同重要”的意思, 且 l 表示線性效應, q 表示二次效應。ll 表示線性與線性之交互效應, 等等。所以當因子爲定量時, Cheng and Ye (2004) 將 MA 重新定義如下。

定義 2.4 *(Cheng and Ye, 2004)* 令 $\mathcal{A}$ 爲一 $n \times k$ 的因子設計, 其因子爲定量, 假設 $F_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{t}\in\Im} b_{\mathbf{t}} C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ 爲 $\mathcal{A}$ 之計數函數, 其中 $\{C_{\mathbf{t}}\}$ 爲一 *OPB* , 其廣義字長型態

$(\beta_1(\mathcal{A}), \ldots, \beta_{\mathrm{K}}(\mathcal{A}))$ 定義如下:

$$\beta_i(\mathcal{A}) = \sum_{\|\mathbf{t}\|_1 = i} \left(\frac{b_{\mathbf{t}}}{b_{\mathbf{0}}} \right)^2。 \tag{2.7}$$

其廣義 MA 準則就是依序最小化 $\beta_i(\mathcal{A})$, 對 $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{K}$, 其中

$$\mathrm{K} = \sum_{i=1}^{k} (s_i - 1)。$$

而 $\mathcal{A}$ 的解析度等於使得 $\beta_r > 0$ 最小的 r 。

我們稱**定義** 2.3 之字長型形態爲 α-WLP, 稱**定義** 2.4 之字長型態爲 β-WLP。

2.3.2 區集設計

對定性因子之因子設計, 在 2.3.1 節我們提到了 α-WLP , 而在定性處理因子之區集設計下, 又多了區集因子, 所以 Sun, Wu and Chen (1997) 從定義對比子群中分出兩種字型, 即處理 WLP (W_t) 和區集 WLP (W_b) , 如下:

$$W_t = (\alpha_{3,0}, \alpha_{4,0}, \alpha_{5,0}, \alpha_{6,0}, \ldots), \tag{2.8}$$

$$W_b = (\alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1} \ldots)。 \tag{2.9}$$

其中 $\alpha_{i,0}$ 如 2.3.1 節所述之 α_i , 也就是衡量所有 i 個處理因子的交互效應與截距項之間的別名程度, 稱之爲 pure-type 字。而 $\alpha_{i,1}$ 衡量所有 i 個處理因子的交互效應與區集因子的混淆 (confounding) 程度, 稱之爲 mixed-type 字。後來 Sitter, Chen and Feder (1997) 提出了方法來比較和排序 W_t 與 W_b 。其結合了 W_t 與 W_b 提出一個單一的 WLP , 用來比較區集設計與尋找最佳區集設計。Chen and Cheng (1999) 指出 Sitter et al. (1997) 的 WLP 是不適當的, 因爲他們違背了等級制度原理。Chen and Cheng (1999) 以估計的特性爲基礎, 提出了一個準則。Cheng and Wu (2002) 則依估計特性提出兩種字型排序可供選擇:

$$W_1 : ttt \gg tttt \gg ttb \gg ttttt \gg tttttt \gg tttb \gg ttttttt \gg \cdots \tag{2.10}$$

和

$$W_2: ttt \gg ttb \gg tttt \gg ttttt \gg tttb \gg tttttt \gg ttttttt \gg ttttb \cdots \tag{2.11}$$

其 $\gg$ 表示“更重要”的意思, 且 t 表示處理效應, b 表示區集效應。ttt 表示三個處理因子的交互效應, ttb 表二個處理因子與區集因子之交互效應。

Cheng and Wu (2002) 以估計的特性爲基礎, 提出以下的論點: 考慮一個 mixed-type 字, 如 $tttb$, 則那一種 pure-type 字造成的影響比 $tttb$ 更嚴重呢? 爲了避免三階處理效應與較低階處理效應別名, 其 pure-type 字的長度至少要爲七。因此 $tttb$ 應視爲比 $ttttttt$ 更重要。再來就是 $tttttt$ 與 $tttb$ 該如何比較呢? 以估計的特性上來看也就是 $tttttt$ 所產生的三階處理交互效應互相別名和 $tttb$ 所產生的三階處理交互效應和區集效應互相混淆, 何者較重要。在 $tttttt$ 中有10 $(=\binom{6}{3}/2)$ 對三階處理效應互相別名, 比 $tttb$ 中只有一個三階處理效應被混淆還要多。因此一般來說 $tttttt$ 要比 $tttb$ 來的更重要。同理, $tttt$ 要比 ttb 來的更重要。因此可將字型排序成如式子 (2.10) 。且其 WLP 如下:

$$W_1 = (\alpha_{3,0}, \alpha_{4,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{5,0}, \alpha_{6,0}, \alpha_{3,1}, \alpha_{7,0}, \ldots), \tag{2.12}$$

以下我們稱之爲 α_{W_1}-WLP , 而當三階處理交互效應和區集效應之混淆被視爲比三階處理交互效應間的別名更重要時, 則可將字型排序成如式子 (2.11) 。且其 WLP 如下:

$$W_2 = (\alpha_{3,0}, \alpha_{2,1}, \alpha_{4,0}, \alpha_{5,0}, \alpha_{3,1}, \alpha_{6,0}, \alpha_{7,0}, \ldots), \tag{2.13}$$

以下我們稱之爲 α_{W_2}-WLP 。對一設計 $\mathcal{A}$ 其

$$\alpha_{i,0}(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{\|\mathbf{t}\|_0=i \\ \mathbf{t}:pure-type}} \left(\frac{b_{\mathbf{t}}}{b_{\mathbf{0}}}\right)^2 \tag{2.14}$$

而

$$\alpha_{i,1}(\mathcal{A}) = \sum_{\substack{\|\mathbf{t}\|_0^*=i \\ \mathbf{t}:mixed-type}} \left(\frac{b_{\mathbf{t}}}{b_{\mathbf{0}}}\right)^2, \tag{2.15}$$

其中 $\|\mathbf{t}\|_0^*$ 爲 $\mathbf{t}$ 中相對於處理因子且不爲0的元素個數。而 $\mathcal{A}$ 的解析度我們定義成 R_t 與

R_b 。R_t 爲處理效應之間的解析度, 其定義爲使得 $\alpha_{r,0} > 0$ 最小的 r 。R_b 爲處理與區集效應之間的解析度, 其定義爲使得 $\alpha_{r,1} > 0$ 最小的 $r + 1$ 。

而關於定量處理因子之區集設計的 MA 準則, 我們將在第四章加以定義並深入的探討。

2.4 $OA(18)$ 之幾何非同構之建構

本研究中所有關於幾何非同構 $OA(18)$ 直交表資料來自 Tsai (2005)。其以因子爲定量的條件下建構出所有 $OA(18, 3^p)$ 之幾何非同構直交表 , 再由 $OA(18, 3^p)$ 建構出 $OA(18, 2^1 3^p)$ 之幾何非同構之直交表。完整的摘要如表2.3 。如表列出了所有幾何非同構之 $OA(18, 3^p)$ 和 $OA(18, 2^1 3^p)$, 其 p 從3到7的直交表個數以及不同的 β-WLP 個數。由此可知, 擁有不同 β-WLP 的兩個設計, 必定是幾何非同構。但擁有相同 β-WLP 的兩個設計時, 卻不一定是幾何同構之設計。但由此表可見, 會出現相同 β-WLP 的幾何非同構設計, 在相同的 p 之下, 其比例並不高。所以 β-WLP 在判別幾何非同構上, 亦是一個不錯的方法。

表 2.3: 所有 OA(18) 幾何非同構之摘要

$OA(18, 3^p)$

Number of 3-Level Factors	3	4	5	6	7
Number of Noisomorphic Designs	13	133	332	478	284
Number of Different β-WLP	13	128	332	420	223

$OA(18, 2^1 3^p)$

Number of 3-Level Factors	3	4	5	6	7
Number of Noisomorphic Designs	119	1836	1332	1617	726
Number of Different β-WLP	118	1293	1274	1406	556

2.4.1 建構幾何非同構之 $OA(18, 3^p)$

Tsai (2005) 建構 $OA(18)$ 的方法源自 Sun, Li and Ye (2002) , 其從一個唯一的非同構設計 $OA(18, 3^2)$ 開始, 增加一行來建構出所有的 $OA(18, 3^3)$, 然後再增加另一行建構出所有的 $OA(18, 3^4)$, 依此類推。如此依序建構, 便可以得到所有幾何非同構之 $OA(18)$, 其性質如下。

性質 2.2 *(Tsai, 2005)* 令 $[A\ v]$ 表示一陣列, 由一 A 陣列增加一向量 v 而得。令 C 包含了所有幾何非同構之 $OA(n, s^p)$ 。我們可以在 $\{[A\ v]\}$ 中找到所有幾何非同構之 $OA(n, s^{p+1})$, 其中 $A \in C$ 且 v 為 s 水準之向量。

唯一的非同構設計 $OA(18, 3^2)$, 是將 $OA(9, 3^2)$ 重複兩次而得。從直交的定義可知, 在此 $OA(18, 3^2)$ 中九個水準組合都必須出現兩次。在不失一般性下, 將 $OA(18, 3^2)$ 的兩行定義如下

$$v_1^t = [000000111111222222],$$

$$v_2^t = [001122001122001122],$$

由**性質**2.2 可知, 所有幾何非同構之 $OA(18, 3^3)$ 可由 $OA(18, 3^2)$ 增加一行而得。依序則可建構出其他幾何非同構之 $OA(18, 3^p)$。

2.4.2 建構幾何非同構之 $OA(18, 2^1 3^p)$

依**性質**2.2 相同的論點, Tsai (2005) 找到所有幾何非同構之 $OA(18, 2^1 3^p)$, 其考慮從幾何非同構之 $OA(18, 3^p)$ 增加一行2水準之向量而得的 $OA(18, 2^1 3^p)$ 。此外, 再證明從兩個不同的幾何非同構之 $OA(18, 3^p)$ 增加一行2水準之向量而得到的 $OA(18, 2^1 3^p)$ 亦為幾何非同構。

引理 2.3 *(Tsai, 2005)* 令 $\mathcal{A}$ 為一 $OA(n, d^1 s^p)$ 且 $F_{\mathcal{A}}(\mathrm{x}) = \sum b_{\mathbf{t}} C_{\mathbf{t}}(\mathrm{x})$ 為其計數函數。在不失一般性下, 令 d 水準因子為其第一行。令 $\mathcal{A}'$ 為 $\mathcal{A}$ 投影到所有 s 水準之因子設計, 則 $F_{\mathcal{A}'}(\mathrm{x}') = \sum b_{\mathbf{t}'} C_{\mathbf{t}'}(\mathrm{x}')$ 其中 $\mathrm{x}' = (x_2, x_3, \ldots, x_{p+1})$ 且 $\mathbf{t}' = (t_2, t_3, \ldots, t_{p+1})$ 。此外, $b_{\mathbf{t}'} = d b_{0 t_2 t_3 \ldots t_{p+1}}$ 。

此引理為 Cheng and Ye (2004) 中的 Corollary 2.1 之一特列。

性質 2.4 *(Tsai, 2005)* 令 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是在設計空間 $\mathcal{D}$ 中之兩 $OA(n, d^1 s^p)$ 因子設計。令 $\mathcal{A}'$ 為 $\mathcal{A}$ 投影到所有 s 水準之因子設計。$\mathcal{B}'$ 亦相同定義於 $\mathcal{B}$ 上。若 $\mathcal{A}'$ 和 $\mathcal{B}'$ 為幾何非同構, 則 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 亦為幾何非同構設計。

Tsai (2005) 利用**引理**2.3 證明了**性質**2.4。由此性質可知, 當兩個 $OA(18, 2^1 3^p)$ 是建構自同一個 $OA(18, 3^p)$ 時, 我們仍須再檢查它們的同構性質。而幾何同構定義如**定義**2.1 , 但利用此定義來判別同構性質, 其計算量太過於複雜, 所以除了利用定義來判別同構性質外, Tsai (2005) 亦利用了計數函數的特性, 證明出另一性質, 在判別同構性質上, 更有效率。