3 $OA(18,3^p)$ 和 $OA(18,2^1 3^p)$ 之最佳因子設計

3.1 定量因子

由2.4節可知, 我們已有所有幾何非同構之 $OA(18,3^p)$ 和 $OA(18,2^1 3^p)$ 設計。利用這些設計, 依2.3.1節所提及之 β-WLP , 做爲我們搜尋 MA 設計之準則。其結果列於表3.1 和表3.2 。表3.1 和表3.2 的內容已呈現於 Cheng and Ye (2004) 和 Tsai (2005) 中, 但爲了本文的完整性, 我們仍將其包括在本文內, 並對這些 MA 設計稍做比較。

在表3.1 中, 我們列出了 $OA(18,3^p)$, 其 p 從 $3\sim 7$ 之 MA 因子設計, 並大略的列了每個 β-WLP , 因爲直交表的關係, β_1 和 β_2 必定爲0, 所以我們從 β_3 開始依序往後列出。當 $p=3$, MA 因子設計對應到 A(1,2,3), 爲附錄表A.1 之1,2,3行所形成之 $OA(18,3^3)$, 且其 R=IV (解析度) , 意味著某些一階主效應與三階因子效應互相部份別名, 某些二階因子效應與二階因子效應互相部份別名。雖然一階主效應與三階因子效應互相部份別名, 在估計一階主效應時, 將受到三階因子效應的影響, 但實驗設計上, 高階效應通常視爲不存在, 所以在估計一階主效應時, 並不會造成太大的困擾。而二階因子效應與二階因子效應互相部份別名, 在估計二階因子效應時, 某些二階因子效應將互相影響, 但其別名的程度並非很高, 從定義2.4 可知, β_4 是由6個 $\|\mathbf{t}\|_1=4$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 且 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 是一個介於 $0\sim 1$ 之間的一個數。因 β_4 只等於0.125, 故 $\|\mathbf{t}\|_1=4$ 的 $C_{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$ 的係數, 等於0的佔大多數, 也就是可以被清楚估計的效應佔大多數, 因此我們可說其別名程度並非很高。當 $p=4$

時, R=IV , 且 $\beta_4 = 1.875$, 看似別名程度有變高, 但此時的 β_4 是由19個 $\|\mathbf{t}\|_1 = 4$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 故可以被清楚估計的效應亦佔比較多數。當 $p = 5$ 時, R=IV , 且 $\beta_4 = 6.0625$, 此時的 β_4 是由45個 $\|\mathbf{t}\|_1 = 4$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 故相對的可以被清楚估計的效應亦佔比較多數。當 $p = 6$ 時, R=III, 意味者某些一階主效應與二階效應互相部份別名, 且 $\beta_3 = 0.75$, 此時的 β_3 是由50個 $\|\mathbf{t}\|_1 = 3$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 故可以被清楚估計的效應佔比較多數。當 $p = 7$ 時, 有二個幾何非同構設計皆爲 MA 設計, 其 R=III , 且 $\beta_3 = 0.75$, 此時的 β_3 是由77個 $\|\mathbf{t}\|_1 = 3$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 故可以被清楚估計的效應佔大多數。

在表3.2 中, 我們列出了 $OA(18, 2^1 3^p)$, 其 p 從 $3 \sim 7$ 之 MA 因子設計, 且大略的列了每個 β-WLP 。當 $p = 3$ 時, 有二個幾何非同構設計皆爲 MA 設計, 其對應到 B(1,9,10,11) 和 B(2,9,10,12) , 爲附錄表A.2 之1,9,10,11行及2,9,10,12行所形成之 $OA(18, 2^1 3^3)$, 其 R=IV 。當 $p = 4$ 和5時, R=IV 。當 $p = 6$ 和7時, 都有二個幾何非同構設計皆爲 MA 設計, 其 R=III 。

由此兩表可知, 當因子個數越多時, 解析度相對越低, 且從整體的 WLP 可看出, 因子越多時, 部份別名程度也隨之越來越高, 在估計效應時直交性就越差。

表 3.1: 幾何非同構 $OA(18, 3^p)$ 之最佳因子設計

p	設計矩陣	β-WLP $(\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \ldots)$
3	A(1,2,3)	(0 , 0.125 , 0.75 , 0.125)
4	A(1,2,4,5)	(0 , 1.875 ,0 , 1.625 , 0 , 0)
5	A(1,2,6,7,8)	(0 , 6.0625 , 0 , 4.125 , 0 , 2.3125 , 0 , 0)
6	A(1,2,9,10,11,12)	(0.75 , 6.9375 , 6.75 , 12.4375 , 4.5 , 3.375 , 1.5 , 3.1875)
7	A(1,2,13,14,15,16,17)	(1.5 , 14.625 , 12 , 26.125 , 14.34375 , 23.132812 , 9.046875 , 15.117187)
7	A(1,2,18,19,20,21,22)	(1.5 , 14.625 , 12 , 26.125 , 14.34375 , 23.132812 , 9.046875 , 15.117187)

表 3.2: 幾何非同構 $OA(18, 2^1 3^p)$ 之最佳因子設計

		β-WLP
p	設計矩陣	$(\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \ldots)$
3	B(1,9,10,11)	(0 , 0.5 , 1 , 0.5 , 0)
3	B(2,9,10,12)	(0 , 0.5 , 1 , 0.5 , 0)
4	B(3,9,10,13,14)	(0 , 2 , 4 , 2 , 0 , 0 , 0)
5	B(4,9,10,15,16,17)	(0 , 10.0625 , 0 , 9.875 , 0 , 5.8125 , 0 , 0.25)
6	B(5,9,10,18,19,20,21)	(1.25 , 14.21875 , 7.40625 , 19.9375 , 9.9375 , 15.09375 , 5.78125 , 3.5)
6	B(6,9,10,22,23,24,25)	(1.25 , 14.21875 , 7.40625 , 19.9375 , 9.9375 , 15.09375 , 5.78125 , 3.5)
7	B(7,9,10,26,27,28,29,30)	(2.5 , 22.5 , 17.3125 , 44.875 , 27.25 , 51.5625 , 22.8125 , 34.875)
7	B(8,9,10,31,32,33,34,35)	(2.5 , 22.5 , 17.3125 , 44.875 , 27.25 , 51.5625 , 22.8125 , 34.875)

3.2 定性因子

當因子爲定性時, 我們利用 Professor Angela Dean (Ohio State University) 所提供的18個實驗點的所有組合非同構設計 $OA(18, 3^p)$ 和 $OA(18, 2^1 3^p)$ 來搜尋 MA 設計。且依2.3.1節所提及之 α-WLP, 做爲我們搜尋 MA 設計之準則。其結果列於表3.3 和表3.4 。

在表3.3 中, 我們列出了 $OA(18, 3^p)$, 其 p 從 $3 \sim 7$ 之 MA 因子設計, 並大略的列了每個 α-WLP , 因爲直交表的關係, α_1 和 α_2 必定爲0, 所以我們從 α_3 開始依序往後列出。當 $p = 3$, MA 因子設計對應到 C(1,2,3) 時, 爲附錄表A.3 之1,2,3行所形成之 $OA(18, 3^3)$ 。且其 R=III , 意味者某些一階主效應與二階效應互相部份別名。注意, 在因子爲定性與定量中所稱之階級效應是不同的, 在第二章已有詳細的說明。且 $\alpha_3 = 0.5$, 從**定義**2.3 可知,α_3 是由8個 $\|\mathbf{t}\|_0 = 3$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 且每個 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 是一個介於 $0 \sim 1$ 之間的一個數。因 α_3 只等於0.5, 故可以被清楚估計的效應佔比較多數, 我們亦可說其別名程度沒有很高。當 $p = 4$ 時, R=III , $\alpha_3 = 2$, 是由32個 $\|\mathbf{t}\|_0 = 3$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 故可以被清楚估計的效應亦佔比較多數。當 $p = 5$ 時, 有二個組合非同構設計皆爲 MA 設計, R=III , 且 $\alpha_3 = 5$, 看似別名程度相當高, 但此時 α_3 是由80個 $\|\mathbf{t}\|_0 = 3$ 的 $(b_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{0}})^2$ 所相加, 相較之下, 可以被清楚估計的效應亦佔比較多數。當 $p = 6$ 時, R=III

, 其在 β-WLP 中亦爲 MA 因子設計, 也就是對應到 A(1,2,9,10,11,12) 之 $OA(18,3^6)$, 當因子爲定量或定性時, 皆爲 MA 設計。且其 $\alpha_3 = 10$, 是由 160 個 $\|\mathbf{t}\|_0 = 3$ 的 $(b_\mathbf{t}/b_\mathbf{0})^2$ 所相加, 相較之下, 可以被清楚估計的效應亦佔比較多數。當 $p = 7$ 時, 有三個組合非同構設計皆爲 MA 設計, 其中有二個設計在 β-WLP 中亦爲 MA 因子設計, 也就是對應到 A(1,2,13,14,15,16,17) 和 A(1,2,18,19,20,21,22) 之 $OA(18,3^7)$, 當因子爲定量或定性時, 皆爲 MA 設計。且其 $\alpha_3 = 22$, 是由 280 個 $\|\mathbf{t}\|_0 = 3$ 的 $(b_\mathbf{t}/b_\mathbf{0})^2$ 所相加, 相較之下, 可以被清楚估計的效應亦佔比較多數。

表 3.3: 組合非同構 $OA(18,3^p)$ 之最佳因子設計

p	設計矩陣	α-WLP $(\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\ldots)$
3	C(1,2,3)	(0.5)
4	C(1,2,4,5)	(2 , 1.5)
5	C(1,2,6,7,8)	(5 , 7.5 , 0)
5	C(1,2,9,10,11)	(5 , 7.5 , 0)
6	A(1,2,9,10,11,12)	(10 , 22.5 , 0, 7)
7	C(1,2,12,13,14,15,16)	(22 , 34.5 , 27 , 31 , 6)
7	A(1,2,13,14,15,16,17)	(22 , 34.5 , 27 , 31 , 6)
7	A(1,2,18,19,20,21,22)	(22 , 34.5 , 27 , 31 , 6)

在表3.4 中, 我們列出了 $OA(18,2^1 3^p)$, 其 p 從 $3 \sim 7$ 之 MA 因子設計, 並大略的列了每個 α-WLP 。當 $p = 3$, MA 因子設計對應到 D(1,7,8,9) 時, 爲附錄表A.4 之 1,7,8,9行所形成之 $OA(18,2^1 3^3)$, 且其 R=III 。當 $p = 4$ 時, 有二個組合非同構設計皆爲 MA 設計, R=III 。當 $p = 5$ 和6時, R 亦爲 III 。當 $p = 7$ 時, 有三個組合非同構設計皆爲 MA 設計, 其中有二個設計在 β-WLP 中亦爲 MA 因子設計, 也就是對應到 B(7,9,10,26,27,28,29,30) 和 B(8,9,10,31,32,33,34,35) 之 $OA(18,2^1 3^7)$, 當因子爲定量或定性時, 皆爲 MA 設計。

由此兩表可知, 當因子個數越多時, 解析度相對越低, 且從整體的 WLP 可看出, 因子越多時, 部份別名程度也隨之越來越高, 在估計效應時直交性就越差。此與因子爲定量時得

到相同之結果。

表 3.4: 組合非同構 $OA(18, 2^1 3^p)$ 之最佳因子設計

		α-WLP
p	設計矩陣	$(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \ldots)$
3	D(1,7,8,9)	(0.5 , 1.5)
4	D(2,7,8,10,11)	(3.5 , 4.5 , 0)
4	D(3,7,8,12,13)	(3.5 , 4.5 , 0)
5	D(4,7,8,14,15,16)	(8.5 , 12 , 3 , 2.5)
6	D(5,7,8,17,18,19,20)	(16 , 28.5 , 13.5 , 19 , 3)
7	D(6,7,8,21,22,23,24,25)	(28 , 52.5 , 52.5 , 70 , 33 , 6)
7	B(7,9,10,26,27,28,29,30)	(28 , 52.5 , 52.5 , 70 , 33 , 6)
7	B(8,9,10,31,32,33,34,35)	(28 , 52.5 , 52.5 , 70 , 33 , 6)