3. 理想

3.1 理想

定義 3.1：假設 k 是一個體（field），如有理數 $\boldsymbol{Q}$、實數 $\boldsymbol{R}$、複數 $\boldsymbol{C}$ ，令 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ 為一 n 元非負整數，$k[x_1,x_2,...,x_n]$為係數屬於 k 的 n 元 $(x_1,x_2,...,x_n)$ 多次多項式所形成的集合，即

$$k[x_1,x_2,...,x_n]=\{\sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha \mid x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}, a_\alpha\in k\}$$

定義 3.2：子集合 $\boldsymbol{I}\subset k[x_1,x_2,...,x_n]$ 是一個理想（Ideal）如果 $\boldsymbol{I}$ 滿足以下條件：

(i) $0\in\boldsymbol{I}$.

(ii) 若 $f,g\in\boldsymbol{I}$,則 $f+g\in\boldsymbol{I}$

(iii) 若 $f\in\boldsymbol{I}$ 而且 $h\in k[x_1,x_2,...,x_n]$,則 $hf\in\boldsymbol{I}$

若給定任何一個有限集合 $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{Q}^n$，其中 $\boldsymbol{Q}$ 代表是有理數體，

$$\boldsymbol{Q}^n=\{\mathbf{a}=(a_1,a_2,...,a_n)\mid a_1,a_2,...,a_n\in\boldsymbol{Q}\}$$

令 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})=\{f\in\boldsymbol{Q}[x_1,...,x_n]\mid f(\mathbf{a})=0,\forall\mathbf{a}\in\boldsymbol{A}\}$

則：

(i) $\mathbf{0}(\mathbf{a})=0$，所以 $\mathbf{0}\in\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})$

(ii) 若 f，$g\in\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})$，則 $f(\mathbf{a})=0$，$g(\mathbf{a})=0$，$\forall\mathbf{a}\in\boldsymbol{A}$ 故 $f(\mathbf{a})+g(\mathbf{a})=0$，$\forall\mathbf{a}\in\boldsymbol{A}$，所以 $f+g\in\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})$

(iii) 若 $f\in\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})$，$h\in\boldsymbol{Q}[x_1,...,x_n]$，$h(\mathbf{a})f(\mathbf{a})=0$，所以 $hf\in\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})$

因此 $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{A})$ 是一個理想。

定義 3.3：令 $f_1,f_2,...,f_k$ 為在 $k[x_1,...,x_n]$的多項式，則 $f_1,f_2,...,f_k$為理想 $\boldsymbol{I}$ 的一組基底。若對任何一個屬於 $\boldsymbol{I}$ 裡的多項式 f 皆存在 $s_1,s_2,...,s_k\in k[x_1,...,x_n]$ 使得

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{j=1}^{k} s_j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) f_j\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)。$$

此時可將 $\boldsymbol{I}$ 表示為 $\left\langle f_{1,} f_2, ... f_s \right\rangle$，即 $\boldsymbol{I}$ 為 $f_{1,} f_2, ... f_s$ 所生成的理想。

根據 Hilbert basis 定理，可知道每一個理想 $\boldsymbol{I}$ 都可由一組有限基底所生成。任何一個理想都可找到對應的一組基底，而且同一個理想並不僅只有一組基底，你可以找到其他不同的基底但皆對應到相同的理想.。

3.2 設計之理想

在實驗設計上，令 n 為因子之個數，D 為一個兩水準全因子設計之集合，水準以 -1 跟 1 表示。令 E 為一 n 因子的設計，$\overline{E}$ 為在 D 中未出現在 E 的試驗點的集合（注意：$\overline{E}$ 中每個試驗點皆無重複），則 E 與 $\overline{E}$ 都是 D 的子集，由定義 3.2 可知，$\boldsymbol{I}(E)$ 與 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 都是理想。因為 E 為一設計，故我們稱 $\boldsymbol{I}(E)$ 稱為設計 E 之理想，而將 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 稱為設計 E 的補設計理想。

假如 $f_1, f_2, ..., f_k$ 為 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 這理想的一組基底，則 $\overline{E}$ 的集合會跟

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_k = 0 \end{cases}$$

這組方程式的解集合是相同的。如果知道 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 的一組基底時，便可利用解聯立方程式的方式去找出 $\overline{E}$ 裡的元素。

由第 2 章我們知道計數函數定義為

$$C_E(\mathbf{a}) = r_{\mathbf{a}}$$

這裡的 $\mathbf{a}$ 是 D 裡的一個點。當 $\mathbf{a} \in E$ 時，$C_E(\mathbf{a}) = r_{\mathbf{a}} \geq 1$，故 $r_{\mathbf{a}}$ 的值並不一定，因此 $\boldsymbol{I}(E)$ 的基底並不是那麼容易找出來；但如果 $\mathbf{a} \in \overline{E}$ 時，$C_E(\mathbf{a}) = 0$，此時 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 的一組基底可以找出。 因為對於所有 $\mathbf{a} \in D$，因子的水準為 -1 或 1，所以其滿足

$$x_i^2 - 1 = 0 \text{，} \forall i \in 1,2,\ldots n \text{，}$$

令 $f \in \boldsymbol{I}(\overline{E})$，則對 $\mathbf{a} \in E$

$$0 = f(\mathbf{a})\{C_E(\mathbf{a}) - r_{\mathbf{a}}\} = f(\mathbf{a})C_E(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \cdot r_{\mathbf{a}}$$

所以 $f(\mathbf{a}) \cdot r_{\mathbf{a}} = f(\mathbf{a})C_E(\mathbf{a})$，故

$$f(\mathbf{a}) = \frac{f(\mathbf{a})C_E(\mathbf{a})}{r_{\mathbf{a}}} = \frac{f(\mathbf{a})}{r_{\mathbf{a}}}C_E(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} s_i(\mathbf{x})\left(x_i^2 - 1\right)$$

對 $\mathbf{a} \in \overline{E}$ 時，

$$f(\mathbf{a}) = 0 = s_0(\mathbf{x}) \cdot C_E(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} s_i(\mathbf{x})\left(x_i^2 - 1\right)$$

因此 $\left\{x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, \ldots, x_n^2 - 1, C_E(\mathbf{x})\right\}$ 是 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 的一組基底。

找到了 $\left\{x_1^2 - 1, x_2^2 - 1, \ldots, x_n^2 - 1, C_E(\mathbf{x})\right\}$ 是 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 的一組基底，可知 $\overline{E}$ 的集合與聯立方程式

$$\begin{cases} x_1^2 - 1 = 0 \\ x_2^2 - 1 = 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n^2 - 1 = 0 \\ C_E(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

的解集合是相同的；求出了這組方程組的解或者知道解的個數，就可找出此實驗設計中有幾個試驗點不包含在 E 中，換句換說，就當然可以知道此設計中有幾

個相異的試驗點，即 $2^s - |\overline{E}|$ 。

例 3.1(續 2.1)：

此設計的計數函數為

$$C_E(\mathbf{x}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_1x_2$$

可得到以下之方程組：

$$\begin{cases} x_1^2 - 1 = 0 \\ x_2^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2 - \dfrac{1}{4}x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

此方程組的解為 $(-1, -1)$，此點不被包含在 E 中，即此設計共有 $2^2 - 1 = 3$ 個相異的試驗點。

$C_E(\mathbf{x})$ 計數函數是一個多元多次的多項式，現在想問的是多元多次的方程組如何求解呢？解的個數是多少呢？以下介紹 Groebner 基底正是用來研究多元多次方程組解的一個好方法。