1. 導論

因子設計是一個廣泛的被使用在各種科學實驗中的工具。因子設計主要可區分為正規設計與非正規設計。正規設計是指試驗點之間滿足一個群（group）的結構，因有此數學結構，故在正規設計上可以發展出許多很漂亮的數學理論。而非正規設計中的性質相對來說，則因無此結構故較不易探討。然而有時因研究經費以及時間上的不足，試驗次數（run size）必須有所限制時，因為非正規設計比正規設計在試驗次數上更有彈性，因此非正規設計（如直交表）的地位越來越被大家所重視。近幾年來，出現了一個數學工具 -- 計數函數（counting function），對於非正規設計的研究上極有幫助，許多原本只有在正規設計上發展出來的理論與結果，藉由計數函數這座橋樑，可相對應的推廣到非正規設計上。

一般而言，在實驗設計中，試驗（run）的個數就代表可被使用來估計效應（effect）的自由度。但是當試驗點有重複的狀況下，在作資料分析時，並不是所有的自由度都可拿來估計因子間的不同效應，而是相異試驗點的個數才是可被拿來估計因子參數的數量。因此，相異試驗點的個數在分析研究時對我們來講是相當重要的一個訊息。本論文將利用計數函數這個工具及其代數結構來探討相異試驗點的個數的問題。

計數函數是以多項式的方式呈現，一個設計 E 的計數函數是一個由全因子設計（full factorial design）D 映射到非負整數的函數，對於每一個 D 裡的試驗點，這個函數的值就代表該點在 E 中出現的次數。每一個設計 E 都有唯一對應的的計數函數。而且計數函數的常數項，攜帶著試驗次數的訊息。例如，有一 4 因子，每個因子都有兩水準（level）的設計之計數函數為：

$$C_E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^4}(12 - 4x_1x_2x_3 - 4x_1x_2x_4 + 4x_1x_3x_4 - 4x_2x_3x_4 - 4x_1x_2x_3x_4)$$

因其常數項的分子部分為 12，故此設計的試驗次數為 12，但 12 是否包含重複點的次數，則無法僅由其常數項來判定。故由計數函數的常數項並無法判斷設計的

相異試驗點個數。

我們要研究的主題內容就是，從一個計數函數這個多項式，發展出相異試驗點與計數函數係數的公式，找出計數函數係數如何對應到設計中有幾個相異的試驗點。我們將利用代數學的理想（ideal）與 Groebner 基底（basis），以及其所發展的工具，來對設計的計數函數作研究與分析，把實驗設計用代數的語言來表示，推論出一套從計數函數找出相異試驗點的演算法過程。但是最重要的還是發展出一套計數函數係數對應到相異試驗點的公式，而不是僅有演算法的內容。

我們將在第 2 章中，介紹計數函數的一些相關內容，並且對設計定義另一個新的函數名詞 -- 指標函數（indicator function），此函數與計數函數最大的不同，就是指標函數不考慮試驗點出現的次數，只在意該點在設計中是否出現，故其函數值只有兩個值，0 代表沒出現，1 表示有出現。第 3 章介紹代數中的理想，並且定義出設計理想與補設計理想，並且找出補設計理想中的一組基底，基底內的一個元素就是計數函數。第 4 章介紹 Groebner 基底及如何找出一設計的 Groebner 基底，我們也將從補設計理想的基底出發，利用這組基底轉換成 Groebner 基底。第 5 章把 Groebner 基底運用到實驗設計中相異試驗點的研究，先把 Groebner 基底中各元素的領導項找出，最後定義出不能被此領導項所整除的集合，則此集合的元素個數即為非試驗點的個數，故可得到設計中的相異試驗點個數。第 6 章利用此項研究結論來對 2 因子 2 水準的計數函數的係數值所對應到的相異試驗點的個數來討論研究，畫出各係數對應到相異試驗點個數之樹狀圖形。第 7 章則對本篇研究內容做出一些總結。