6. 二水準二因子設計之相異試驗點探討

在這一章節之中，我們將對二水準二因子之設計，利用其設計所對應之計數函數的係數，找出設計中相異試驗點的個數。使用的方法正是前述的 Groebner 基底之運用。

二因子二水準設計 E，其計數函數一般式可表示為

$$C_E(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 \text{ ，其中 } \beta_0 、\beta_1 、\beta_2 、\beta_3 \in \boldsymbol{Q}$$

利用前一章的作法，找出 $\overline{E}$ 中點的個數，而 $\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 的基底為

$$\left\{x_1^2 - 1 \text{，} x_2^2 - 1 \text{，} \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2\right\}$$

所使用的項次序為 lex order。

(1) 當 $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ 時，則其 Groebner 基底為 $\left\{x_1^2 - 1 \text{，} x_2^2 - 1\right\}$，$x_1^2 - 1$ 與 $x_2^2 - 1$ 領導項分別是 x_1^2 及 x_2^2， 故可得 $\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E})) = \left\{1 , x_1 , x_2 , x_1 x_2\right\}$，此集合共有四個元素，因此根據定理可知，設計之相異實驗點為 $2^2 - 4 = 0$ 個。

(2) 當 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$，且 $\beta_0 \neq 0$，則 Groebner 基底為 $\left\{x_1^2 - 1 \text{，} x_2^2 - 1 \text{，} 1\right\}$，此集合 $\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E})) = \phi$，故相異實驗點有 $2^2 - 0 = 4$ 個。

(3) 當 $\beta_1 = \beta_3 = 0$ 且 $\beta_2 \neq 0$ 時，$\boldsymbol{I}(\overline{E})$ 的基底為 $G = \left\{x_1^2 - 1 \text{，} x_2^2 - 1 \text{，} \beta_0 + \beta_2 x_2\right\}$

接下來將做 $x_1^2 - 1$ 與 $\beta_0 + \beta_2 x_2$ 的 $S-$ 多項式，故

$$S(x_1^2 - 1, \beta_0 + \beta_2 x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2}\left(x_1^2 - 1\right) - \frac{x_1^2 x_2}{\beta_2 x_2}\left(\beta_0 + \beta_2 x_2\right)$$

$$= -\frac{\beta_0}{\beta_2} x_1^2 - x_2 = -\frac{\beta_0}{\beta_2}\left(x_1^2 - 1\right) - \frac{1}{\beta_2}\left(\beta_0 + \beta_2 x_2\right) \text{。}$$

可得到 $\overline{S(x_1^2 - 1, \beta_0 + \beta_2 x_2)}^{G} = 0$，下一個步驟則是對 $x_2^2 - 1$ 與 $\beta_0 + \beta_2 x_2$ 作 S - 多項式，即得到

$$S(x_2^2-1,\beta_0+\beta_2x_2)=\frac{x_2^2}{x_2^2}\left(x_2^2-1\right)-\frac{x_2^2}{\beta_2x_2}\left(\beta_0+\beta_2x_2\right)=-1-\frac{\beta_0}{\beta_2}x_2$$

$=-\frac{\beta_0}{{\beta_2}^2}\left(\beta_0+\beta_2x_2\right)+\frac{{\beta_0}^2}{{\beta_2}^2}-1$，因此 $\overline{S(x_2^2-1,\beta_0+\beta_2x_2)}^G=\frac{{\beta_0}^2}{{\beta_2}^2}-1$

(3.1) 如果當 $\frac{{\beta_0}^2}{{\beta_2}^2}=1$，亦即 ${\beta_0}^2={\beta_2}^2$ 時，則 $\overline{S(x_2^2-1,\beta_0+\beta_2x_2)}^G=0$

$G=\left\{x_1^2-1，x_2^2-1，\beta_0+\beta_2x_2\right\}$是$\boldsymbol{I}(\overline{E})$的Groebner基底，領導項分別是 x_1^2、x_2^2、x_2這三項，因此$\text{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\{1，x_1\}$，集合中有兩個元素，此時相異試驗點為$2^2-2=2$個。

(3.2) 而當${\beta_0}^2\neq{\beta_2}^2$時，$\left\{x_1^2-1，x_2^2-1，1\right\}$則為Groebner基底，此時不可被Groebner基底領導項所整除的集合$\text{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\phi$，因此相異試驗點為$2^2-0=4$個。

(4) 當$\beta_3=0$，且$\beta_1\neq0$，理想$\boldsymbol{I}(\overline{E})$的基底為$G=\left\{x_1^2-1，x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\right\}$

同樣的方式，先對x_1^2-1 和$\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2$做$S$-多項式的運算，

$$S(x_1^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2)=\frac{x_1^2}{x_1^2}\left(x_1^2-1\right)-\frac{x_1^2}{\beta_1x_1}\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\right)$$

$$=-\frac{\beta_0}{\beta_1}x_1-\frac{\beta_2}{\beta_1}x_1x_2-1=-\frac{x_1}{\beta_1}\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\right)+\left(x_1^2-1\right)$$

根據除法定理知，$\overline{S(x_1^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2)}^G=0$，而

$$S(x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2)=\frac{x_1x_2^2}{x_2^2}\left(x_2^2-1\right)-\frac{x_1x_2^2}{\beta_1x_1}\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\right)$$

$$=-x_1-\frac{\beta_0}{\beta_1}x_1x_2-\frac{\beta_2}{\beta_1}x_2^3=\left(\frac{\beta_0\beta_2}{{\beta_1}^2}-\frac{\beta_2}{\beta_1}x_2\right)\left(x_2^2-1\right)$$

$$-\left(\frac{\beta_0}{{\beta_1}^2}x_2+\frac{1}{\beta_1}\right)\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\right)+\left(\frac{{\beta_0}^2}{{\beta_1}^2}x_2+\frac{\beta_0\beta_2+\beta_0\beta_1}{{\beta_1}^2}\right)$$

(4.1)如果當$\beta_0=0$時，此時$\overline{S(x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2)}^G=0$，其Groebner基底為$\left\{x_1^2-1，x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2\right\}$，則$\text{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\{1，x_2\}$，此時設計的相異試驗點個數為2個。

(4.2) 但是當$\beta_0 \neq 0$時，必須把$\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2$這一項加入$G$中，此時

$$G = \{x_1^2 - 1，x_2^2 - 1，\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2\}$$

再作S-多項式的動作，即可得

$$S(x_1^2 - 1，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2}(x_1^2 - 1) - \frac{x_1^2 x_2}{\beta_0 x_2}(\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2)$$

$$= -\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_0} x_1^2 - x_2 = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_0}(x_1^2 - 1) - \frac{1}{\beta_0}(\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2)$$

因此$\overline{S(x_1^2 - 1，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2)}^G = 0$，同理可知

$$S(x_2^2 - 1，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) = \frac{x_2^2}{x_2^2}(x_2^2 - 1) - \frac{x_2^2}{\beta_0 x_2}(\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) = -1 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_0} x_2$$

$$= -\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_0^{\ 2}}(\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) + \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2}{\beta_0^{\ 2}} - 1$$

(4.2.1) $\beta_0^{\ 2} \neq (\beta_1 + \beta_2)^2$時，其Groebner基底為

$$G = \{x_1^2 - 1，x_2^2 - 1，\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2，1\}$$

其$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E})) = \phi$，也就是說設計相異試驗點為4個。

(4.2.2) 當$\beta_0^{\ 2} = (\beta_1 + \beta_2)^2$時，則$\overline{S(x_2^2 - 1，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2)}^G = 0$

此時將做$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$與$\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2$的$S$-多項式的運算。

$$S(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) = \frac{x_1 x_2}{\beta_1 x_1}(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2) - \frac{x_1 x_2}{\beta_0 x_2}$$

$$(\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) = \frac{\beta_2}{\beta_1} x_2^2 + \frac{\beta_0}{\beta_1} x_2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_0} x_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1}(x_2^2 - 1) - \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_0 \beta_1} \cdot$$

$$(\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) + \left(\frac{\beta_0^2 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2}{\beta_0^{\ 2} \beta_1}\right)(\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2) + \frac{\beta_2\left[\beta_0^2 - (\beta_1 + \beta_2)^2\right]}{\beta_0^{\ 2} \beta_1}$$

但是因為$\beta_0^{\ 2} = (\beta_1 + \beta_2)^2$，所以$\overline{S(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2)}^G = 0$

$G = \{x_1^2 - 1，x_2^2 - 1，\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2，\beta_0 x_2 + \beta_1 + \beta_2\}$是Groebner基底

$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E})) = \{1\}$，此時相異試驗點為3個。

(5) 當$\beta_3 \neq 0$，理想$\boldsymbol{I}(\overline{E})$的基底為$G = \{x_1^2 - 1，x_2^2 - 1，\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2\}$

$$S(x_1^2 - 1，\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2) = -\frac{1}{\beta_3}(\beta_0 x_1 + \beta_3 x_2 + \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_1 x_2)$$

$$=-\frac{\beta_1}{\beta_3}\left(x_1^2-1\right)-\frac{\beta_2}{\beta_3^2}(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2)$$

$$+\frac{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}{\beta_3^2}x_1+\frac{\beta_3^2-\beta_2^2}{\beta_3^2}x_2+\frac{\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2}{\beta_3^2}$$

而且$S\left(x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right)=-\frac{\beta_2}{\beta_3}\left(x_2^2-1\right)-\frac{\beta_1}{\beta_3^2}(\beta_0+\beta_1x_1+$

$\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2)+\frac{\beta_3^2-\beta_1^2}{\beta_3^2}x_1+\frac{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}{\beta_3^2}x_2+\frac{\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1}{\beta_3^2}$

(5.1)因此當$\beta_0\beta_3=\beta_1\beta_2$、$\beta_3^2=\beta_2^2$、$\beta_1\beta_3=\beta_0\beta_2$、$\beta_3^2=\beta_1^2$、且$\beta_2\beta_3=\beta_0\beta_1$時

$G=\left\{x_1^2-1，x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right\}$是$\boldsymbol{I}(\overline{E})$的Groebner基底

$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\{1，x_1，x_2\}$，可得相異試驗點個數為1個。

(5.2)當$\beta_0\beta_3=\beta_1\beta_2$、$\beta_3^2=\beta_2^2$、$\beta_1\beta_3=\beta_0\beta_2$、$\beta_3^2\neq\beta_1^2$時，此時把$(\beta_3^2-\beta_1^2)x_1+$

$(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)$這一多項式加入$G$中，可再運算$S$-多項式

$$S\left(x_1^2-1，(\beta_3^2-\beta_1^2)x_1+(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\right)$$

$$=-\frac{\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1}{\beta_3^2-\beta_1^2}x_1-1=-\frac{\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1}{\left(\beta_3^2-\beta_1^2\right)^2}\left((\beta_3^2-\beta_1^2)x_1+(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\right)$$

根據除法定理，可知$\overline{S\left(x_1^2-1，(\beta_3^2-\beta_1^2)x_1+(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\right)}^G=0$

同理可得$\overline{S\left(x_2^2-1，(\beta_3^2-\beta_1^2)x_1+(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\right)}^G=0$

以及$\overline{S\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2，(\beta_3^2-\beta_1^2)x_1+(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\right)}^G=0$

$$G=\left\{x_1^2-1，x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2，(\beta_3^2-\beta_1^2)x_1+(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\right\}$$

是$\boldsymbol{I}(\overline{E})$的Groebner基底，$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\{1，x_2\}$，設計中相異試驗點為2個。

(5.3)當$\beta_0\beta_3=\beta_1\beta_2$、$\beta_3^2\neq\beta_2^2$時，加入$\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)$到$G$集合中

$$G=\left\{x_1^2-1，x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2，\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right\}$$

$$S\left(x_1^2-1，\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right)$$

$$=-\frac{\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2}{\beta_3^2-\beta_2^2}\left(x_1^2-1\right)-\frac{1}{\beta_3^2-\beta_2^2}\left(\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right)$$

得$\overline{S\left(x_1^2-1，\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right)}^G=0$，同理

$$\overline{S\left(x_2^2-1\text{，}\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right)}^G=\frac{(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2)^2-\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)^2}{\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)^2}$$

此時當$\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)^2\neq\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)^2$，則$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\phi$，可得相異試驗點為4個。

(5.4) 當$\beta_0\beta_3=\beta_1\beta_2$、$\beta_3^2\neq\beta_2^2$、$\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)^2=\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)^2$，因為

$$\overline{S\left(x_2^2-1\text{，}\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right)}^G=\frac{\beta_3^2-\beta_1^2}{\beta_3^2}x_1+\frac{\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1}{\beta_3^2}$$

且$\overline{S\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\text{，}\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right)}^G=0$

(5.4.1)如果$\beta_3^2=\beta_1^2$且$\beta_2\beta_3=\beta_0\beta_1$，$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\{1\text{，}x_1\}$，故相異試驗點為2個。

(5.4.2)但是如果$\beta_3^2=\beta_1^2$、$\beta_2\beta_3\neq\beta_0\beta_1$，此時$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\phi$，相異試驗點為4個。

(5.5) $\beta_0\beta_3=\beta_1\beta_2$、$\beta_3^2\neq\beta_2^2$、$\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)^2=\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)^2$、$\beta_3^2\neq\beta_1^2$時，

此時Groebner基底的元素至少有以下這幾個

$\{x_1^2-1\text{，}x_2^2-1\text{，}\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\text{，}\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\text{，}$
$\left(\beta_3^2-\beta_1^2\right)x_1+\left(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1\right)\}$

由定理5−2可知，$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))$裡的元素最多可為1個，因此設計相異試驗點至少有3個以上。

(6) 當$\beta_3\neq0$時，$\boldsymbol{I}(\overline{E})$的基底為$G=\left\{x_1^2-1\text{，}x_2^2-1\text{，}\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right\}$

由前面可以知道

$$\overline{S\left(x_1^2-1\text{，}\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right)}^G=\frac{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}{\beta_3^2}x_1+\frac{\beta_3^2-\beta_2^2}{\beta_3^2}x_2+\frac{\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2}{\beta_3^2}$$

故當$\beta_0\beta_3\neq\beta_1\beta_2$時，就必須把$\left(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2\right)x_1+\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)$這一項加入$G$集合中，再對$x_2^2-1$及$\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2$做$S$-多項式的運算，即

$$\begin{aligned}S\left(x_2^2-1\text{，}\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right)&=-\frac{\beta_2}{\beta_3}\left(x_2^2-1\right)-\frac{\beta_1}{\beta_3{}^2}\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right)\\&+\frac{\beta_3^2-\beta_1^2}{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}[(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)x_1+\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)]\\&+[\frac{(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)^2-(\beta_3^2-\beta_1^2)(\beta_3^2-\beta_2^2)}{(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)}]\cdot x_2+[\frac{(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)}{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}\\&-\frac{(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2)(\beta_3^2-\beta_1^2)}{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}]\end{aligned}$$

(6.1) 此時若$(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)^2 \neq (\beta_3^2-\beta_1^2)(\beta_3^2-\beta_2^2)$時，就要把$[(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)^2-(\beta_3^2-\beta_1^2)(\beta_3^2-\beta_2^2)]\cdot x_2+[(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)-(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2)(\beta_3^2-\beta_1^2)]$這一項加入$G$集合中，且根據定理5.2可知，此時$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))$裡的元素個數最多可為1個，所以對應到的設計相異試驗點至少有3個以上。

(6.2) $(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)^2=(\beta_3^2-\beta_1^2)(\beta_3^2-\beta_2^2)$但是$(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)\neq(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2)(\beta_3^2-\beta_1^2)$時，此時的$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\phi$，因此設計之相異試驗點個數為4個。

(7)而當$\beta_3\neq 0$，$\beta_0\beta_3\neq\beta_1\beta_2$，$(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)^2=(\beta_3^2-\beta_1^2)(\beta_3^2-\beta_2^2)$而且$(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2)(\beta_2\beta_3-\beta_0\beta_1)=(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2)(\beta_3^2-\beta_1^2)$時，從上面(6)的運算可得$\overline{S\left(x_2^2-1，\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2\right)}^G=0$，同時再對$x_2^2-1$與$\left(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2\right)x_1+\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)$做$S$-多項式，即可利用除法定理得到$\overline{S\left(x_2^2-1，\left(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2\right)x_1+\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right)}^G=0$，再去計算

$$\overline{S\left(\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_1x_2，\left(\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2\right)x_1+\left(\beta_3^2-\beta_2^2\right)x_2+\left(\beta_1\beta_3-\beta_0\beta_2\right)\right)}^G$$
$$=\frac{2\left(\beta_0\beta_2-\beta_1\beta_3\right)}{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}x_2+\frac{\beta_0^2+\beta_2^2-\beta_1^2-\beta_3^2}{\beta_0\beta_3-\beta_1\beta_2}$$

(7.1)此時若$\beta_0\beta_2\neq\beta_1\beta_3$，則就要把$2\left(\beta_0\beta_2-\beta_1\beta_3\right)x_2+\beta_0^2+\beta_2^2-\beta_1^2-\beta_3^2$加入$G$中，故$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))$的個數最多只可能有一個元素，故設計之相異試驗點至少有3個以上。

(7.2)若$\beta_0\beta_2=\beta_1\beta_3$、但是$\beta_0^2+\beta_2^2\neq\beta_1^2+\beta_3^2$，此時可得到$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\phi$，所以設計之相異試驗點個數為4個。

(7.3)$\beta_0\beta_2=\beta_1\beta_3$且$\beta_0^2+\beta_2^2=\beta_1^2+\beta_3^2$，此時集合$\mathrm{Est}(\boldsymbol{I}(\overline{E}))=\left\{1，x_2\right\}$，有兩個元素在此集合中，所以根據定理可知設計相異試驗點為2個。

我們將把以上的所有運算結論，表示成計數函數之係數關係樹狀圖呈現在圖1中。

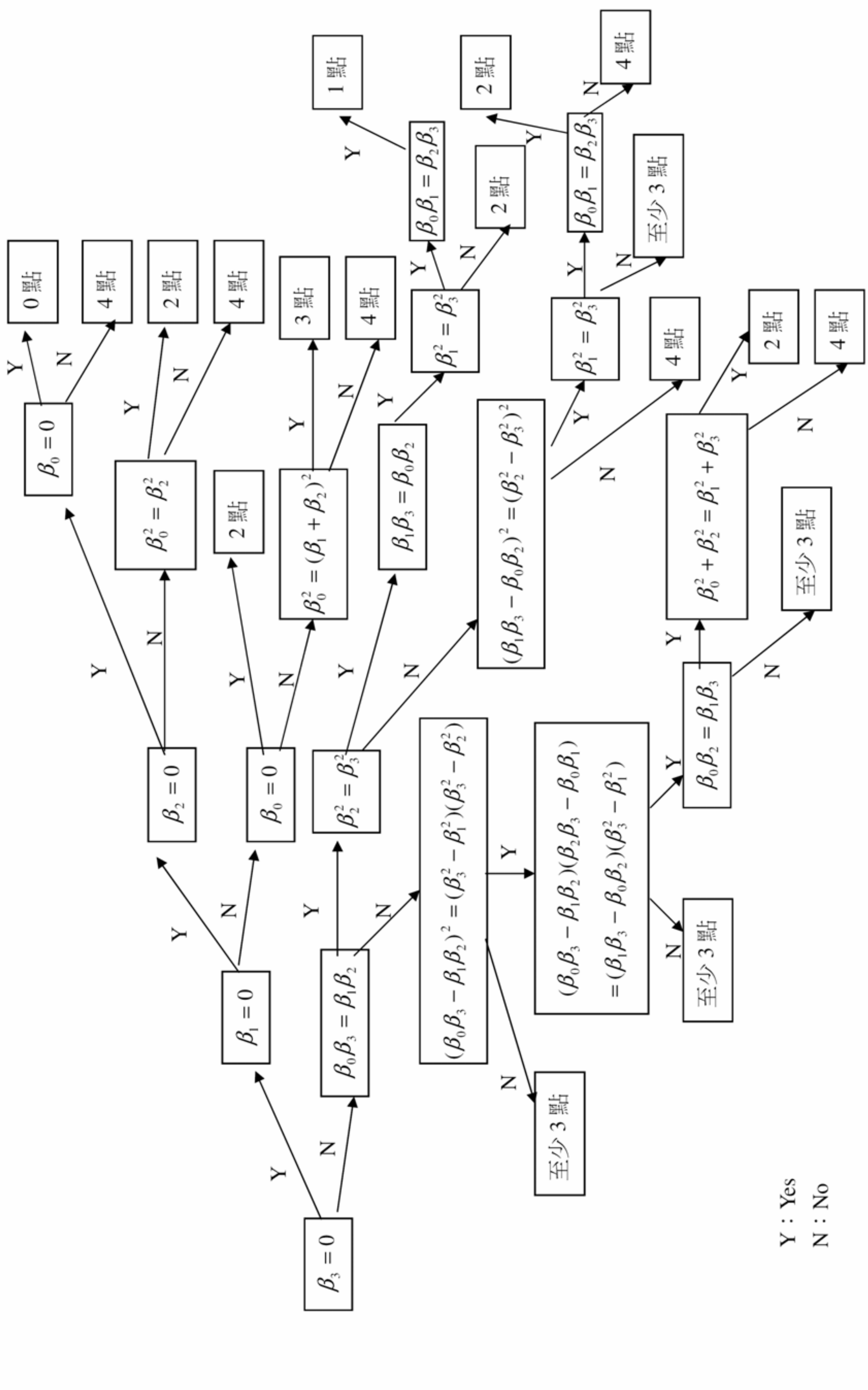

圖 1：指標函數之係數樹狀圖